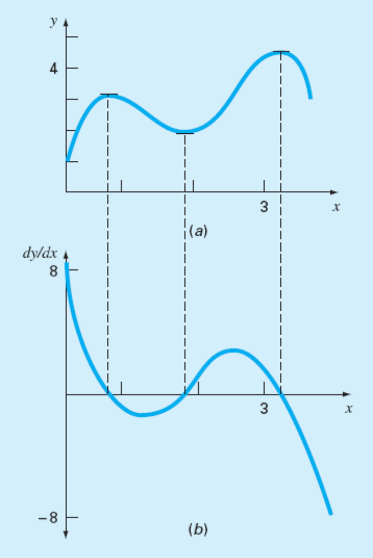
Ecuaciones Diferenciales con Valores de Contorno

Claudio Careglio

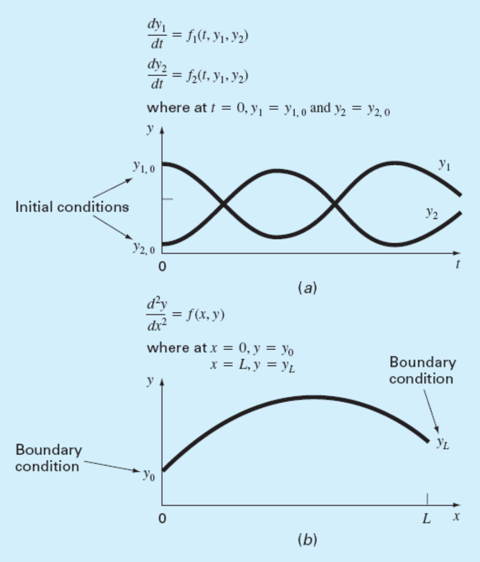
Métodos Numéricos, Doctorado en Ingeniería

Plan de la presentación I


y
4
3
x
(a)
dy/dx
8
3
x
−8
(b)

-Problema de valores iniciales: Todas las condiciones son especificadas en el mismo valor de la variable independiente.

-Problema de valores de contorno: Las condiciones son especificadas en diferentes valores de la variable independiente.



-Ecuaciones diferenciales ordinarias: Funciones incógnitas dependen de una única variable independiente.

Primer orden

Siempre de valor inicial.
Ejemplo:

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0 \quad A\epsilon\mathbb{R}$$
$$u(t_0) = U_0$$

Solución discreta se aproxima a la solución exacta:

$$U_k \approx u(t_k)$$

Orden superior

De valores iniciales. Ejemplo:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}u(t) = 0$$
$$u(t_0) = U_0 \qquad \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_0} = V_0$$

Solución discreta se aproxima a la solución exacta:

$$U_k \approx u(t_k)$$

De valores de contorno
Ejemplo:

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) - x = 0 \quad \Omega = \{x\epsilon\mathbb{R} : 0 \leq x \leq L\}$$
$$u(x = x_0) = U_0 \qquad u(x = x_L) = U_L$$

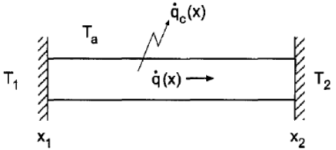
Solución discreta se aproxima a la solución exacta:

$$U_k \approx u(x_k)$$

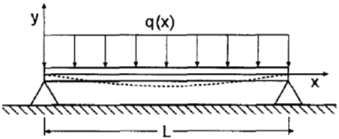
-Ecuaciones diferenciales a derivadas parciales: Funciones incógnitas dependen de más de una variable independiente.

-Problemas de valores de contorno con condiciones de Dirichlet.

-Problemas de valores de contorno con condiciones de Neumann.



$$\frac{d^2T}{dx^2} - \alpha^2 T = -\alpha^2 T_a, \quad T(x_1) = T_1, \text{ and } T(x_2) = T_2$$



$$E\,I(x)\,\frac{d^4y}{dx^4} = g(x)$$

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(L) = 0, \text{ and } y''(L) = 0$$

En la clase de hoy:

- Reglas de derivación numérica para:
  - Soluciones (discretas, aproximadas) de ED con valores de contorno.
  - Solución: en dominio cerrado de las variables independientes.
  - Solución unívocamente determinada:
    - Asociar condiciones a cumplir por la función en determinados puntos
    - Cuando condiciones expresadas en la fronteras del dominicio cerrado $\Rightarrow$ ED de valores de contorno

- En lugar de obtener $u(x)$ (solución exacta en todos los puntos del dominio Ω) $\longrightarrow$ se obtiene:
  $U(X_K) = U_k$ con $k = 0, 1, \cdots, N$
- Es decir, se obtiene la función discreta que es una aproximación de la función continua $u(x)$.
- Ω en N segmentos iguales $\Rightarrow$ $N + 1$ puntos (incluyendo los bordes del dominio)
- Paso: $\Delta x = \frac{1}{N}$
- Se plantea la ecuación diferencial en forma discreta en cada punto interior.
- Se tendrán $N - 1$ ecuaciones con $N + 1$ incógnitas $\Rightarrow$ considerar las dos ecuaciones correspondientes a las Condiciones de Contorno $\Rightarrow$ $N + 1$ ecuaciones con $N + 1$ incógnitas.

- Caso 1:

- *Ejemplo:*

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)-x=0 \qquad \Omega=\{x\epsilon\mathbb{R}:0\leq x\leq 1\}$$

$$u(x_0=0)=0 \qquad u(x_L=1)=0$$

Discretizar con $N=2, N=4$ y $N=8$.
Encontrar:
$U_k=?$

a) 1 punto interior (N=2):
Discretización:

$$-\frac{1}{0,5^2}\left(U_0-2U_1+U_2\right)+U_1-X_1=0$$

Solución aproximada:

$$\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,055555 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) 3 puntos interiores (N=4):

SEL:

$$\begin{bmatrix} 33 & -16 & 0 \\ -16 & 33 & -16 \\ 0 & -16 & 33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ 0,75 \end{Bmatrix}$$

Solución aproximada:

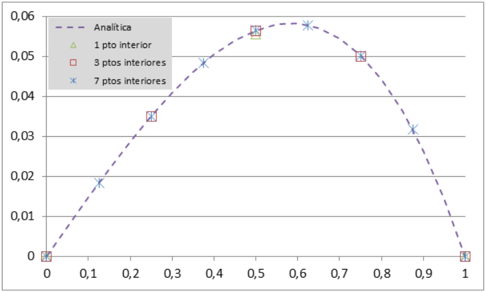
$$\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,03488525 \\ 0,05632582 \\ 0,05003676 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) 7 puntos interiores (N=8):
SEL:

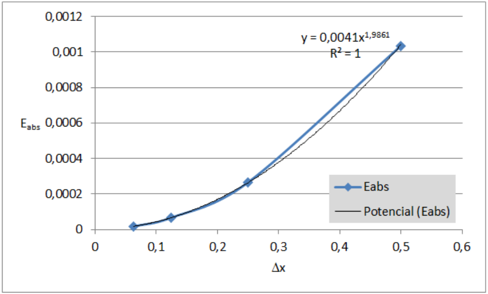
$$\begin{bmatrix} 129 & -64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -64 & 129 & -64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -64 & 129 & -64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -64 & 129 & -64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -64 & 129 & -64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -64 & 129 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -64 & 129 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/8 \\ 2/8 \\ 3/8 \\ 4/8 \\ 5/8 \\ 6/8 \\ 7/8 \end{Bmatrix}$$

Solución aproximada:

$$\begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0183367 \\ 0,03500678 \\ 0,04831759 \\ 0,05652399 \\ 0,05780107 \\ 0,05021568 \\ 0,03169615 \\ 0 \end{Bmatrix}$$


0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
Analítica
1 pto interior
3 ptos interiores
7 ptos interiores

(a)


y = 0,0041x^1,9861
R² = 1
0,0012
0,001
0,0008
0,0006
0,0004
0,0002
0
Eabs
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
Δx
Eabs
Potencial (Eabs)

(b)

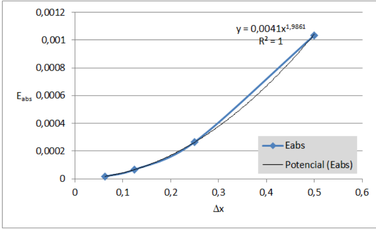
Considerando la solución analítica:

$$u(x)_{\text{analítica}} = x - \frac{senh(x)}{senh(1)}$$

se tiene que:

$$E_{abs.} = \left| U_{aprox.}(X = 0,5) - u(x = 0,5)_{\text{analítica}} \right|$$

$$E_{rel.} = \left| \frac{U_{aprox.}(X = 0,5) - u(x = 0,5)_{\text{analítica}}}{u(x = 0,5)_{\text{analítica}}} \right|$$



Aproximando por
mínimos cuadrados los datos Δx vs E_{abs}:

$$E_{abs.} = C\ \Delta x^p$$

se obtiene $\Delta x^{1,9861} \rightarrow \Delta x^2$ que es el orden del error de truncamiento local de la aproximación de derivada segunda utilazada.

N	Δx	$U_{aprox.}(X = 0,5)$	$E_{abs.}$	$E_{rel.}$
2	0,5	0,05555556	0,001035002	1,83 %
4	0,25	0,05632582	0,000264735	0,47 %
8	0,125	0,05652399	6,65711E-05	0,12 %
16	0,0625	0,05657389	1,66672E-05	0,03 %

- Caso 2:

-*Ejemplo:*

$$EJ\frac{d^2u(x)}{dx^2} + P(x - L) = 0 \qquad \Omega = \{x\epsilon\mathbb{R} : 0 \leq x \leq L\}$$

$$u(x_0 = 0) = 0 \qquad \frac{du(x = L)}{dx} = 0$$

donde $L = 10$, $P = 100$ y $EJ = 10000$.
Discretizar con $N = 4$ considerando:

$$X = \{0;\ 0,25L;\ 0,50L;\ 0{,}75L;\ L\}$$

$$U(X) = \{u_0;\ u_1;\ u_2;\ u_3;\ u_4\}$$

Encontrar:
$U_k = ?$

- Caso 3:

$$10\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \lambda\, u(x) = 0 \qquad \Omega = \{x\epsilon\mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$
$$u(x_0 = 0) = 0 \qquad u(x_L = 1) = 0$$

Discretizar con $N = 4$ considerando:

$$X = \{0;\ 0,25;\ 0,50;\ 0{,}75;\ 1\}$$
$$U(X) = \{u_0;\ u_1;\ u_2;\ u_3;\ u_4\}$$

Encontrar:

U_k =?

¿Qué tipo de sistema de ecuaciones se obtiene en este caso?

- En lugar de obtener $u(x,t)$ (solución exacta en todos los puntos del dominio Ω) $\longrightarrow$ se obtiene:
  $U_k(t) = u(X_k, t)$ con $k = 0, 1, \cdots, N$
  es decir, discreta en x y continua en t
- Dominio de x en N segmentos iguales $\Rightarrow$ $N+1$ puntos (incluyendo los bordes del dominio)
- Si se consideran derivadas parciales respecto x ($t = cte$) $\Rightarrow$ función a derivar es discreta y se puede hacer derivadas numéricas.
- Si se consideran derivadas parciales respecto t ($x = cte$) $\Rightarrow$ función a derivar es continua y se puede hacer derivadas analíticas.
- Resumiendo:
  - En cada X_k se plantea la ED con una aproximación de la derivada respecto a x en forma de derivada numérica;
  - y con la derivada respecto de la variable t en forma analítica evaluada en esa abscisa X_k.

-Ejemplo:

$$-12\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad \Omega=\{x\epsilon\mathbb{R}:0\leq x\leq 1\}$$

$u(x_0=0,t)=0$ $\qquad u(x_L=1,t)=0$

$u(x,t_0=0)=sen(\pi x)$ $\qquad \dfrac{\partial u(x,t_0=0)}{\partial t}=3$

Discretizar con $N=4$ en la variable x.
Encontrar:
$U_k(t)=?$

Se plantean las siguientes ecuaciones discretas en x:

$$
\begin{aligned}
X_0 : \quad & U_0(t) = 0 \\
X_1 : \quad & -\frac{12}{0,25^2}\left\{U_0(t) - 2U_1(t) + U_2(t)\right\} + X_1^2 \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} = 0 \\
X_2 : \quad & -\frac{12}{0,25^2}\left\{U_1(t) - 2U_2(t) + U_3(t)\right\} + X_2^2 \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} = 0 \\
X_3 : \quad & -\frac{12}{0,25^2}\left\{U_2(t) - 2U_3(t) + U_4(t)\right\} + X_3^2 \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} = 0 \\
X_4 : \quad & U_4(t) = 0
\end{aligned}
$$

o matricialmente:

$$
\frac{12}{0,25^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,25^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,50^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2U_3(t)}{dt^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

que se debe resolver con las C.I.:

$$
\begin{Bmatrix} U_1(t_0) \\ U_2(t_0) \\ U_3(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} sen(\pi X_1) \\ sen(\pi X_2) \\ sen(\pi X_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} sen(\pi 0,25) \\ sen(\pi 0,50) \\ sen(\pi 0,75) \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \frac{dU_1(t_0)}{dt} \\ \frac{dU_2(t_0)}{dt} \\ \frac{dU_3(t_0)}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}
$$

-Ejemplo:

$$-k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + m(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p(x)g(t) \qquad \Omega = \{x\epsilon\mathbb{R} : 0 \leq x \leq L\}$$

$$u(x_0 = 0, t) = 0 \qquad\qquad k(L,t)\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = -M_L\frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2}$$

Discretizar según $x_i = x_0 + i\,x$ con $i = 0, \cdots, 7$ en la variable x y mantener la continuidad en la variable t.
Comprobar que se obtiene el sistema:

$$\mathbf{M\ddot{u}}(t) + \mathbf{Ku}(t) = \mathbf{b}(t)$$

donde el vector $\mathbf{u}$ agrupa las funciones incógnitas de la variable tiempo.
Nota: para resolver numéricamente se deben especificar las C.I.