Doctorado en Ingeniería

Métodos Numéricos

Trabajo Práctico 7: Ecuaciones Diferenciales con Valores Iniciales

Problema 1:
Considere la siguiente la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 2y(x) - 2x - 1$$

con $y(x_0)=y_0$, siendo $x_0=0$ mientras que $y_0=2$.

- Identificar f(x,y) y calcular mediante el método de Euler hacia adelante la solución aproximada en [0,1] para un paso h=0,25. Resolver primero en forma manual. Luego, desarrollar un código que permita obtener la solución y graficar y(x) entre x=0 y x=1.
- Repetir los cálculos para un paso h=0,10. *(Item optativo).*
- Calcular el error absoluto de la solución aproximada respecto a la solución exacta $y_{exac.}(x)=e^{2x}+x+1$
- Para x=0,5 use extrapolación de Richardson, con las dos soluciones obtenidas con el método de Euler hacia adelante, y comparar con la solución exacta. *(Item optativo).*

Problema 2:
Considere la siguiente la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(x)}{dx} = x^2 - y(x)$$

con $y(x_0)=y_0$, siendo $x_0=0$ mientras que $y_0=0,5$.

- Identificar f(x,y) y calcular mediante el método del Punto Medio la solución aproximada en [0,1] para un paso h=0,25.

Problema 3:
Considere la siguiente la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 2y(x) - 2x - 1$$

con $y(x_0)=y_0$, siendo $x_0=0$ mientras que $y_0=2$.

- Identificar f(x,y) y calcular mediante el método de Euler mejorado la solución aproximada en [0,1] para un paso h=0,25. Resolver primero en forma manual. Luego, desarrollar un código que permita obtener la solución y graficar y(x) entre x=0 y x=1.
- Repetir los cálculos para un paso h=0,10. *(Item optativo).*
- Calcular el error absoluto de la solución aproximada respecto a la solución exacta $y_{exac.}(x)=e^{2x}+x+1$
- Para x=0,5 use extrapolación de Richardson, con las dos soluciones obtenidas con el método de Euler mejorado. *(Item optativo).*

Problema 4:
Considere la siguiente la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 2y(x) - 2x - 1$$

con $y(x_0)=y_0$, siendo $x_0=0$ mientras que $y_0=2$.

- Identificar f(x,y) y calcular mediante el método de Euler modificado la solución aproximada en [0,1] para un paso h=0,25. Resolver primero en forma manual. Luego, desarrollar un código que permita obtener la solución y graficar y(x) entre x=0 y x=1.
- Repetir los cálculos para un paso h=0,10. *(Item optativo).*
- Calcular el error absoluto de la solución aproximada respecto a la solución exacta $y_{exac.}(x)=e^{2x}+x+1$
- Para x=0,5 use extrapolación de Richardson, con las dos soluciones obtenidas con el método de Euler modificado. Comparar con los resultados obtenidos con el método de Euler hacia adelante y con el de Euler mejorado. *(Item optativo).*

Problema 5:
Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy(x)}{dx} = -x\, y(x)^2$$

con $y(x_0)=y_0$, siendo $x_0=0$ mientras que $y_0=2$.

- Identificar f(x,y) y calcular mediante el método de Heun la solución aproximada en [0,1] para un paso h=0,25. Para la fase correctora realizar 3 iteraciones.

Problema 6:
Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy_1}{dt} = -10 \cdot y_1(t) + 4 \cdot y_2(t)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = -4 \cdot y_1(t) + 0 \cdot y_2(t)$$

con condiciones iniciales

$y_1(0) = 5$

$y_2(0) = 3$

- Identificar **f(t,y)** y calcular mediante los métodos de Euler hacia adelante, Euler mejorado y Euler modificado la solución aproximada en [0,1] para un paso h=0,01. Resolver primero unos pocos pasos en forma manual. Luego, desarrollar o modificar los códigos de los ejercicios anteriores a fin de obtener la solución completa. Graficar $y_1(t)$ e $y_2(t)$ para t entre 0 y 1.
- Calcular el error absoluto de la solución aproximada respecto a la solución exacta dado por:

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix} e^{-2t} + \frac{14}{3}\begin{Bmatrix}1\\1/2\end{Bmatrix} e^{-8t}$$

Problema 7:
Considere la ecuación diferencial del péndulo simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0$$

con condiciones iniciales
$\theta(t_0)=\theta_0$
$\frac{d\theta}{dt}=\beta_0 \; en \; t=t_0$
siendo θ(t) la posición angular medida respecto de la vertical, $\theta(t_0)$ la posición inicial y β_0 la velocidad inicial.

- Transformar la ecuación diferencial en un sistema de primer orden. Expresar los vectores **y**(t), **y**(t_0) y **f(t,y)** .
- Resolver con el método de Euler hacia adelante. Para ello considerar θ(0)=π/4; α(0)=0; L=10; g=9,81 y paso h=0,001. Desarrollar o modificar los códigos de los ejercicios anteriores para obtener la solución. Graficar θ(t) versus t, y dθ(t)/dt versus t para t entre 0 y 12,4. Además, graficar dθ(t)/dt versus θ(t) para t entre 0 y 12,4.
- Repetir el ítem anterior pero el código desarrollado debe poder emplear Euler mejorado o modificado mediante el cambio del valor de w por el usuario.
- Verificar que θ(t=3,2) es aproximadamente -π/4.

Problema 8:
Considere las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$16\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2}+4(\theta_2+\theta_1)=5t$$
$$32\frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2}+9\theta_1=-3t^2$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}_{t0}=\begin{Bmatrix}\pi/8\\ -\pi/4\end{Bmatrix} \; y \; \begin{Bmatrix}\frac{d\theta_1}{dt}\\ \frac{d\theta_2}{dt}\end{Bmatrix}_{t0}=\begin{Bmatrix}0,1\\ -0,2\end{Bmatrix}$$

- Transformar dichas ecuaciones de segundo orden en un sistema de primer orden cuyo vector de incógnitas es **y**(t); y encontrar el vector de valores iniciales **y**(0) y el vector **f** (t, **y**) que resulta de escribir el sistema de primer orden.

Problema 9:
Considere el siguiente sistema ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1(t)\\ \ddot{x}_2(t)\\ \ddot{x}_3(t)\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&4&1\\4&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5e^t+8e^{2t}+\cos t\\ -8e^{2t}+4e^t\\ -\cos t-3sen t+e^t\end{Bmatrix}$$

con condiciones iniciales en $t=t_0=0$:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se debe mencionar que la solución exacta puede ser expresada como:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^t \\ 2e^{2t} \\ \cos(t) \end{Bmatrix}$$

- Calcular **x**(t) mediante el método de Diferencia Central para un paso $\Delta t=0{,}1$.

Problema 10:
Considere la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$-T\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + m\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad si\ x\varepsilon\Omega = \{x\varepsilon R : 0 \le x \le L\}$$

cuyas condiciones de borde e iniciales son las siguientes:

$$\forall t: \qquad u(0,t)=0 \qquad\qquad u(L,t)=0$$

$$t=0: \qquad u(x,0)=sen(\pi\cdot x/L) \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$$

- Obtener el siguiente sistema $\mathbf{M}\cdot\ddot{\vec{u}}(t)+\mathbf{K}\cdot\vec{u}(t)=\vec{0}$ de EDO discretizando con 3 puntos interiores equidistantes en *x* usando reglas de derivada numérica con igual orden de error.
- Desarrollar un código que permita calcular *u(x,t)* mediante el Método de Diferencia Central, entre t=0 y $t_{final}=3$, considerando L=600000; T=500; *m*=5E-10; con $\Delta t=0{,}001$.
- Expresar el vector solución en t= t_{final}, y graficar u(L/2,t) en función de t entre t=0 y t_{final}.