Doctorado en Ingeniería

Métodos Numéricos

Trabajo Práctico 8: Ecuaciones Diferenciales con Valores de Contorno

Problema 1:

Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$10\frac{d^2u(x)}{dx^2} + 3(x-1) = 0 \qquad si\ x\varepsilon\Omega = \{x\varepsilon R : 0 \le x \le 1\}$$
$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 5$$

Usando una aproximación central de la derivada segunda, hallar u(x) en forma discreta para la siguiente discretización propuesta con tres puntos interiores al dominio

X={	0;	0.25;	0.5;	0.75;	1}
u(x)={	u_0;	u_1;	u_2;	u_3;	u_4}

Luego de realizado lo anterior, resolver empleando los códigos desarrollados en los Trabajos Prácticos anteriores. Graficar la solución **u** en función de **x**.

Problema 2:

La ecuación diferencial en coordenadas polares que determina la posición de una membrana circular (como el parche de un tambor) de radio interno ra y radio externo r_b, sometida a una tracción uniforme T y capaz de sostener una acción distribuida p(r), está dada por

$$T\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{T}{r}\frac{du}{dr} + p(r) = 0, \qquad si\, r \in \Omega = \{r \in R : ra \le r \le rb\},$$
$$\text{con } u(ra) = u(rb) = 0.$$

Plantee una solución aproximada usando derivación numérica y al menos cinco puntos interiores en el dominio Ω. Encuentre el sistema de ecuaciones lineales que debe resolverse. Como datos se puede considerar: r_a=1; r_b=10; T= 500; p(r)= 100.

Luego de realizado lo anterior, resolver empleando los códigos desarrollados en los Trabajos Prácticos anteriores. Graficar la solución **u** en función de **r**.

Problema 3:

Un elemento unidimensional que se encuentra en un dominio $\Omega = \{x \in R : 0 \le x \le L\}$ tiene una conductividad térmica k(x)=0,5, un perímetro P, una sección transversal A y sus extremos sometidos a temperaturas T(0)=T_0 y T(L)=T_L. La distribución de temperatura T(x) relativa a la temperatura del medio a lo largo del elemento se puede determinar mediante la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dT(x)}{dx}\right) + \frac{hc \cdot P}{A}T(x) = S(x), \qquad \text{en } \Omega = \{x \in R : 0 \le x \le L\},$$

$$T(0) = To \quad y \quad T(L) = T_L.$$

Aquí hc es el coeficiente de convección; $T(x)=T_e-T_\infty$, con T_e, temperatura del elemento y T_∞ la temperatura del medio y S(x) es un término fuente de calor. Unidades: k (W/mK); hc (W/m^2K); P (m); A(m^2); S(W/ m^3); T(K).
Plantee una solución usando derivación numérica y al menos cinco puntos interiores en el dominio Ω. Encuentre el sistema de ecuaciones lineales que debe resolverse.

Luego de realizado lo anterior, resolver empleando los códigos desarrollados en los Trabajos Prácticos anteriores. Graficar la solución **T** en función de **x**.

Problema 4:
Un elemento unidimensional que se encuentra en un dominio $\Omega=\{x\in R: 0\le x\le L\}$ tiene una conductividad térmica k(x)=0,5, un perímetro P, una sección transversal A y sus extremos sometidos a temperaturas $T(0)=T_0$ y $T(L)=T_L$. La distribución de temperatura relativa a la temperatura del medio T(x) a lo largo del elemento se puede determinar mediante la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dT(x)}{dx}\right)+\frac{hc\cdot P}{A}T(x)=S(x), \qquad \text{en} \;\; \Omega=\{x\in R: 0\le x\le L\},$$

$$T(0)=T_0 \quad y \quad \frac{dT}{dx}(L)=0.$$

Aquí hc es el coeficiente de convección; $T=T_e-T_\infty$, con T_e, temperatura del elemento y T_∞ la temperatura del medio y S(x) un término fuente de calor. Note que este ejercicio es como el anterior pero con diferente con condición de frontera en x=L (“borde adiabático”).
Plantee una solución usando derivación numérica y al menos cinco puntos interiores en el dominio Ω. Encuentre el sistema de ecuaciones lineales que debe resolverse. Compare con el ejercicio anterior.

Luego de realizado lo anterior, resolver empleando los códigos desarrollados en los Trabajos Prácticos anteriores. Graficar la solución **T** en función de **x**.

Problema 5:
Las vibraciones libres de de una cuerda que está fija a los puntos x=0 y x=L y que está sometida a una fuerza T en sus extremos, se puede determinar resolviendo la siguiente ecuación diferencial

$$T\frac{d^2v(x)}{dx^2}+\omega^2\cdot\rho(x)\cdot v(x)=0 \qquad si\; x\varepsilon\Omega=\{x\varepsilon R: 0\le x\le L\}$$
$$con\;\; v(0)=v(L)=0$$

Plantear una solución discreta usando derivación numérica y considerando que en el dominio Ω los datos disponibles son: L=12; T=500; ρ(x) dada por la siguiente función:

X={	0;	2,0;	4,0;	6,0;	8,0;	10;	12}
ρ(x)={	10;	20;	40;	80;	40;	20;	10}

Encontrar el sistema de ecuaciones lineales que debe resolverse. Describa que tipo de sistemas de ecuaciones se obtiene en este caso.

Luego de realizado lo anterior, resolver empleando los códigos desarrollados en los Trabajos Prácticos anteriores.

Problema 6:
Dada la siguiente ecuación diferencial,

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad en \;\; \Omega = \{x\,\varepsilon\, R : 0 \le x \le L\}$$

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(x,0) = 0$$

$$u(L,t) = 0 \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(\pi \cdot x / L)$$

Usando una aproximación central de la derivada segunda, y cinco puntos interiores al dominio hallar el sistema de ecuaciones que resulta y permite encontrar la solución discreta aproximada de u(x,t).