Ecuaciones diferenciales ordinarias

Generalidades y EDOs de primer orden

Facultad de Ingeniería - UNCuyo - 2024

Análisis Matemático II

Contenido

Recorrido

Modelos: dinámica poblacional

Malthus 1798

$P(t)$: población en el instante t

Modelos: dinámica poblacional

Malthus 1798

$P(t)$: población en el instante t

$$P'(t) = kP(t)$$

Ejercicio de dinámica poblacional

$$P'(t) = kP(t)$$

Adapte este modelo a los siguientes escenarios:

1. Se agrega un crecimiento constante por inmigración.
2. Hay una tasa de natalidad y una tasa de mortalidad.
3. La natalidad es proporcional a P, la mortalidad es proporcional a P^2.
4. En una población de peces como el ítem 3, agregue una tasa constante de desaparición por ser pescados.

Modelos: Ley del enfriamiento-calentamiento de Newton

$$T(t): \text{ temperatura en el instante } t$$

$$T_m: \text{ temperatura del medio}$$

Modelos: Ley del enfriamiento-calentamiento de Newton

$T(t)$: temperatura en el instante t

T_m : temperatura del medio

$$T'(t) = k(T(t) - T_m)$$

Ejercicio sobre la Ley de enfriamiento-calentamiento de Newton

Dadas la ecuación

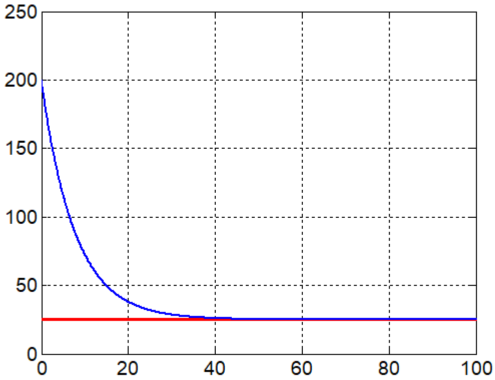
$$T'(t) = k(T(t) - T_m),$$

y el siguiente gráfico de la función T.

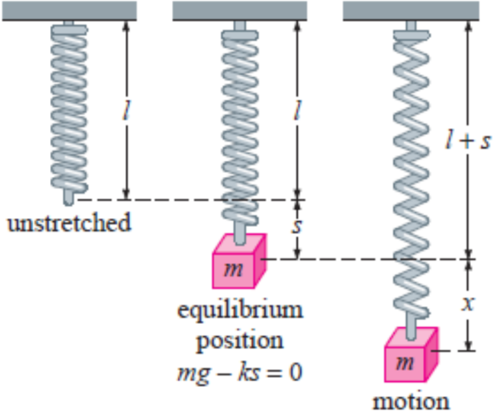
1. Reconozca:

$$T(0) \text{ y } T_m.$$

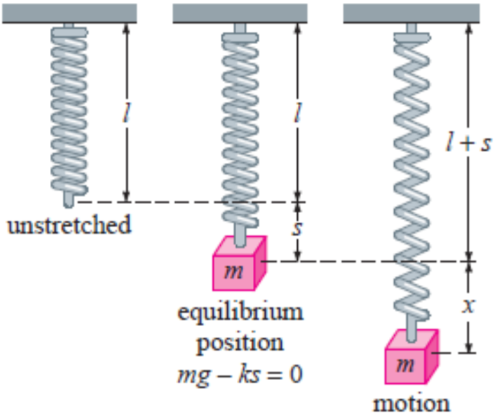
2. Indique cuál es el $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)$.



Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

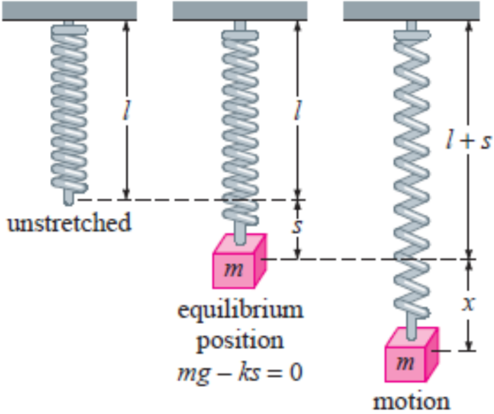
$$m\ddot{x} = -k(s+x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

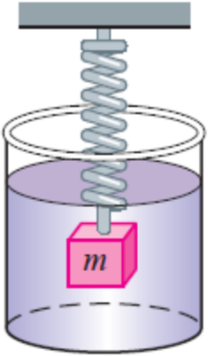
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s+x) + mg = -kx$$

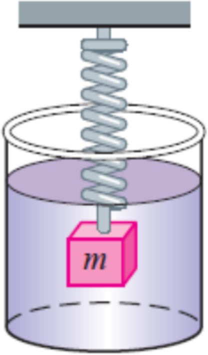
$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

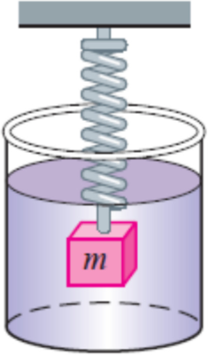
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



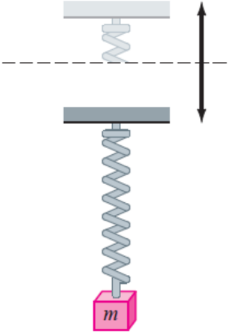
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

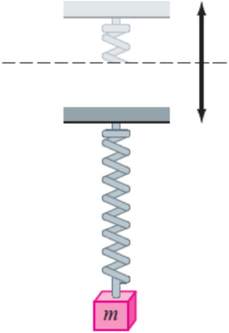
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



$f(t)$: fuerza externa.

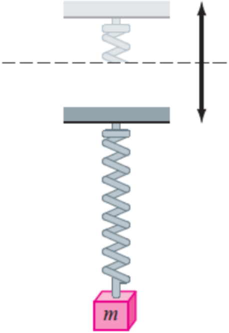
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



$f(t)$: fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Definición

Definición

Se llama ecuación diferencial a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

Recorrido

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$$

Clasificación

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Recorrido

Notación

Solemos escribir las EDO de orden n así:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{n-1}).$$

Ejemplo:

$$y'(x) = \underbrace{x\sqrt{y(x)}}_{f(x,y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Ejemplo

- La función $y(x) = 3sen(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $y''(x) = -y(x)$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Ejemplo

- La función $y(x) = 3sen(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $y''(x) = -y(x)$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$, es una solución implícita de $x + yy'(x) = 0$.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Distinguir dominio de definición de la función f en cuanto solución y como función.

Ejercicio

Sea la EDO $y'(x) = x\sqrt{y}$.

1. Verificar que la familia uniparamétrica
$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c$$
es una familia de soluciones de la misma.
2. ¿Qué valores puede tomar el parámetro c?
3. ¿Qué función constante es solución de la ecuación dada?
4. Dicha solución, ¿se puede encontrar dándole algún valor a c?
5. La ecuación dada, ¿tiene solución general?

Problemas con valores iniciales

Un PVI es un problema que consiste en encontrar una solución $y(x)$ de una EDO de orden n, sujeto a condiciones prescritas, es decir, condiciones sobre $y(x)$ y/o sus derivadas.
A dichas condiciones prescritas que debe cumplir la función $y(x)$ y/o sus derivadas, se las llama condiciones iniciales.
Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Problemas con valores iniciales

Un PVI es un problema que consiste en encontrar una solución $y(x)$ de una EDO de orden n, sujeto a condiciones prescritas, es decir, condiciones sobre $y(x)$ y/o sus derivadas.
A dichas condiciones prescritas que debe cumplir la función $y(x)$ y/o sus derivadas, se las llama condiciones iniciales.
Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} y''(x) & = -y(x) \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 0 \end{cases}$$

PVI

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

PVI

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

PVI

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

PVI

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

PVI

Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^{x}$$

$$y_1(x) = 3\, e^{x},$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e}\, e^{x}$$

PVI

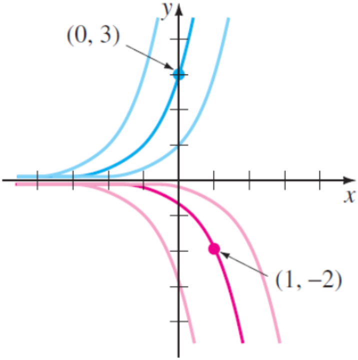
Ejemplo 2: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e}\, e^x$$



Soluciones de los dos PVI.

PVI

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

PVI

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

PVI

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

PVI

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Además, la función constante $y(x) = 0$ es solución singular de la misma EDO.

PVI

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Además, la función constante $y(x) = 0$ es solución singular de la misma EDO.
Las dos soluciones del PVI:

PVI

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Además, la función constante $y(x) = 0$ es solución singular de la misma EDO.
Las dos soluciones del PVI:

$$y(x) = \tfrac{1}{16}x^4;$$

PVI

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO es

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Además, la función constante $y(x) = 0$ es solución singular de la misma EDO.
Las dos soluciones del PVI:

$$y(x) = \tfrac{1}{16}x^4; \qquad y(x) = 0.$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden)

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, y sea (x_0, y_0) un punto interior a R. Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son cotinuas en R, entonces existe un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$ y existe una única función y definida en I que es solución del problema con valores iniciales (1).

Recorrido

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo 1: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo 1: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

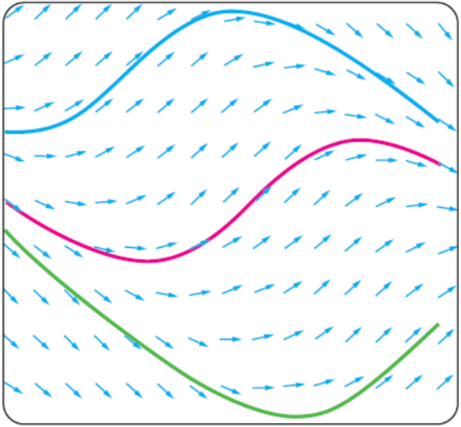
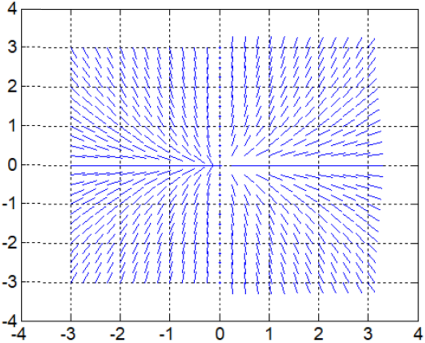


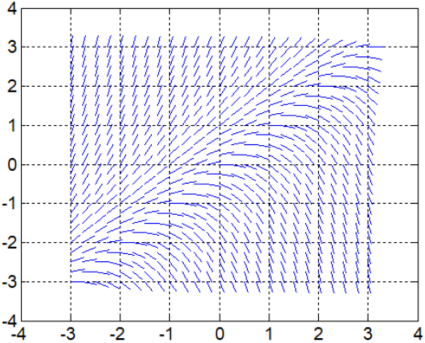
FIGURA 2.1.2 Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

Ejercicio: campos direccionales

Dadas las EDOs: $y'(t) = y(t) - t$ y $y'(t) = 2\dfrac{y(t)}{t}$,

1. Trace los diagramas de direcciones en $[-2;2] \times [-2;2]$.
2. Indique a cuál corresponde cada una:





Recorrido

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y}$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \to \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \to \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$y' = y + \operatorname{sen} x$ *NO es una EDO separable*

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \text{\textit{NO es una EDO separable}}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \to \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \qquad \textit{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \to \quad (1+x)dy = y\,dx \quad \to$$

Variables separables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \to \quad y' = \underbrace{y^2 e^{4y}}_{p(y)} \underbrace{x e^{3x}}_{g(x)}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$ *NO es una EDO separable*

$$(1+x)dy - y\,dx = 0 \quad \to \quad (1+x)dy = y\,dx \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}y$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R};$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \qquad \rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C\,|x+1| \qquad \textit{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R}; \qquad y = -C(x+1) \qquad \textit{en } \mathbb{R};$$

$$y = 0(x+1) = 0 \qquad \textit{en } \mathbb{R}.$$

Luego, la solución general de la EDO dada es:

$$y = K(x+1),\ K \in \mathbb{R}, \quad \text{para toda } x \text{ en } \mathbb{R}.$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}},$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}}, \quad k \in \mathbb{R}; \ \text{ si } k > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k};$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}}, \quad k \in \mathbb{R}; \text{ si } k > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k};$$

$$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2;$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad\qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

$$y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}}, \quad k \in \mathbb{R}; \text{ si } k > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k};$$

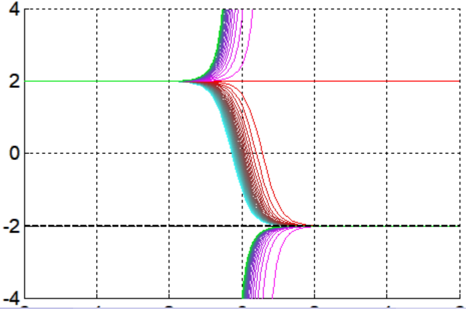
$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2; \quad y \equiv -2$ es solución singular.

Pérdida de una solución

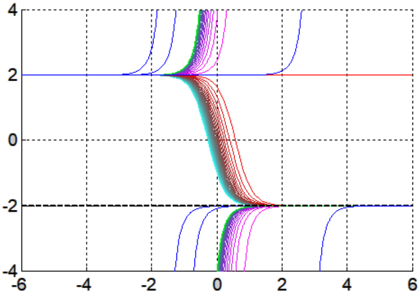
$$y' = y^2 - 4 \qquad \frac{1}{y^2-4}dy = dx$$

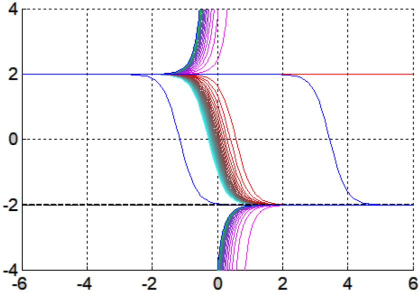
$$y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}}, \quad k \in \mathbb{R}; \ \text{si } k>0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k};$$

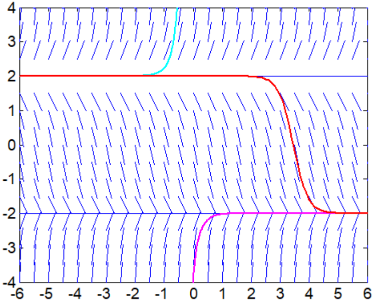
$$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2; \quad y \equiv -2 \text{ es solución singular.}$$



Pérdida de una solución







Recorrido

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0, a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I.

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

FORMA ESTÁNDAR:

$$y' + P(x)y = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) =$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$
$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$
$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$
$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$
$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C$$

$$y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C$$

$$y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

Recorrido

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Una condición suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una forma diferencial exacta, en una región abierta, conexa y simplemente conexa R, es

$$N_x(x,y) = M_y(x,y),$$

para todo $(x,y) \in R$.

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ o $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta si $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Una condición suficiente para que $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ sea una forma diferencial exacta, en una región abierta, conexa y simplemente conexa R, es

$$N_x(x,y)=M_y(x,y),$$

para todo $(x,y)\in R$.

Observación: esto equivale a decir que el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)=(M(x,y),N(x,y))$ es conservativo en R.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, proponemos una solución implícita $S(x,y) = C$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, proponemos una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivamos con respecto a x:

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, proponemos una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivamos con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, proponemos una solución implícita $S(x, y) = C$.
Para hallar S, derivamos con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, proponemos una solución implícita $S(x, y) = C$.
Para hallar S, derivamos con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$, $S(x, y) = C$ será una solución implícita de la EDO.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, proponemos una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivamos con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = N(x,y),$$

es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M,N)$, $S(x,y) = C$ será una solución implícita de la EDO.

LA SOLUCIÓN DE LA EDO ES $S(x,y) = C$.

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

$$S(x,y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

$$S(x,y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2} = C$$

Recorrido

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

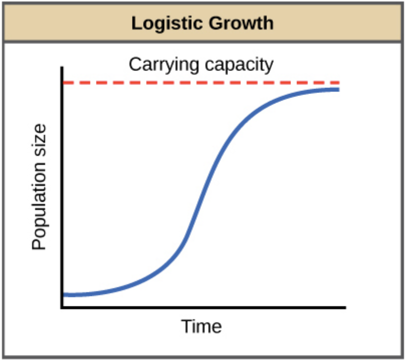
Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$



$$\frac{dN}{dT} = r_{max}\frac{(K-N)}{K}N$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

$$n = 0 \quad \rightarrow \quad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{(lineal)}$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

$$\begin{aligned} n = 0 \quad &\to \quad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{(lineal)} \\ n = 1 \quad &\to \quad y' + P(x)y = Q(x)y \end{aligned}$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

$$\begin{array}{lcll} n = 0 & \rightarrow & y' + P(x)y = Q(x) & \text{(lineal)} \\ n = 1 & \rightarrow & y' + P(x)y = Q(x)y & \\ & & y' = \underbrace{(-P(x) + Q(x))}_{g(x)} \underbrace{\ y\ }_{p(y)} & \text{(separable)} \end{array}$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

$$\begin{aligned} n = 0 \quad &\rightarrow \quad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{(lineal)} \\ n = 1 \quad &\rightarrow \quad y' + P(x)y = Q(x)y \\ & \qquad y' = \underbrace{(-P(x) + Q(x))}_{g(x)} \underbrace{\;y\;}_{p(y)} \quad \text{(separable)} \end{aligned}$$

$n \neq 1$ *la sustitución sugerida es* $v = y^{1-n}$

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x)$$

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x) \qquad \leftarrow n = 4$$

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x) \qquad \leftarrow n = 4$$

$$v(x) = y^{1-4}(x) = y^{-3}(x),$$

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x) \qquad \leftarrow \color{red}{n = 4}$$

$$v(x) = y^{1-4}(x) = y^{-3}(x), \qquad v'(x) = -3y^{-4}(x)y'(x).$$

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x) \qquad \leftarrow n = 4$$

$$v(x) = y^{1-4}(x) = y^{-3}(x), \qquad v'(x) = -3y^{-4}(x)y'(x).$$

Dividimos ambos miembros de la EDO dada por $y^4(x)$:

$$y^{-4}(x)y'(x) - y^{-3}(x) = 1,$$

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x) \qquad \leftarrow n = 4$$

$$v(x) = y^{1-4}(x) = y^{-3}(x), \qquad v'(x) = -3y^{-4}(x)y'(x).$$

Dividimos ambos miembros de la EDO dada por $y^4(x)$:

$$y^{-4}(x)y'(x) - y^{-3}(x) = 1,$$

sustituimos $v'(x)$ y $v(x)$: $-\dfrac{v'(x)}{3} - v(x) = 1,$

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x) \qquad \leftarrow n = 4$$

$$v(x) = y^{1-4}(x) = y^{-3}(x), \qquad v'(x) = -3y^{-4}(x)y'(x).$$

Dividimos ambos miembros de la EDO dada por $y^4(x)$:

$$y^{-4}(x)y'(x) - y^{-3}(x) = 1,$$

sustituimos $v'(x)$ y $v(x)$: $-\dfrac{v'(x)}{3} - v(x) = 1$, $v'(x) + 3v(x) = -3$.

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x) \qquad \leftarrow n = 4$$

$$v(x) = y^{1-4}(x) = y^{-3}(x), \qquad v'(x) = -3y^{-4}(x)y'(x).$$

Dividimos ambos miembros de la EDO dada por $y^4(x)$:

$$y^{-4}(x)y'(x) - y^{-3}(x) = 1,$$

sustituimos $v'(x)$ y $v(x)$: $-\dfrac{v'(x)}{3} - v(x) = 1$, $v'(x) + 3v(x) = -3$.

Esta nueva EDO es lineal con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$; su solución es: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x) \qquad \leftarrow n = 4$$

$$v(x) = y^{1-4}(x) = y^{-3}(x), \qquad v'(x) = -3y^{-4}(x)y'(x).$$

Dividimos ambos miembros de la EDO dada por $y^4(x)$:

$$y^{-4}(x)y'(x) - y^{-3}(x) = 1,$$

sustituimos $v'(x)$ y $v(x)$: $-\dfrac{v'(x)}{3} - v(x) = 1$, $v'(x) + 3v(x) = -3$.

Esta nueva EDO es lineal con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$; su solución es: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \qquad \rightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}$$

Ejemplo

$$y'(x) - y(x) = y^4(x) \qquad \leftarrow n = 4$$

$$v(x) = y^{1-4}(x) = y^{-3}(x), \qquad v'(x) = -3y^{-4}(x)y'(x).$$

Dividimos ambos miembros de la EDO dada por $y^4(x)$:

$$y^{-4}(x)y'(x) - y^{-3}(x) = 1,$$

sustituimos $v'(x)$ y $v(x)$: $-\dfrac{v'(x)}{3} - v(x) = 1$, $v'(x) + 3v(x) = -3$.

Esta nueva EDO es lineal con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$; su solución es: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \qquad \rightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}}$$