

DISEÑO ESTRUCTURAL II

Carrera de **Arquitectura**

Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Cuyo



UNIDAD 3

COMPRESIÓN – COLUMNAS



Dr. Ing. Gonzalo S. Torrasi

2021

1- Introducción

Una columna es un elemento estructural que presenta una dimensión longitudinal mayor a las transversales (la altura es mayor que la sección). Las características de resistencia están gobernadas por su altura, la sección transversal, la conexión (por medio de los vínculos) y el material.

Se las puede clasificar en cortas o largas según la relación entre la longitud y la sección transversal. Las cortas llegan a la rotura por aplastamiento (compresión) de las fibras del material cuando alcanzan su tensión límite. En cambio las columnas largas llegarán al colapso mucho antes de alcanzar esa tensión poniendo en evidencia el fenómeno de pandeo. Las fallas por pandeo son subrepticias y sin aviso, produciendo colapsos catastróficos.

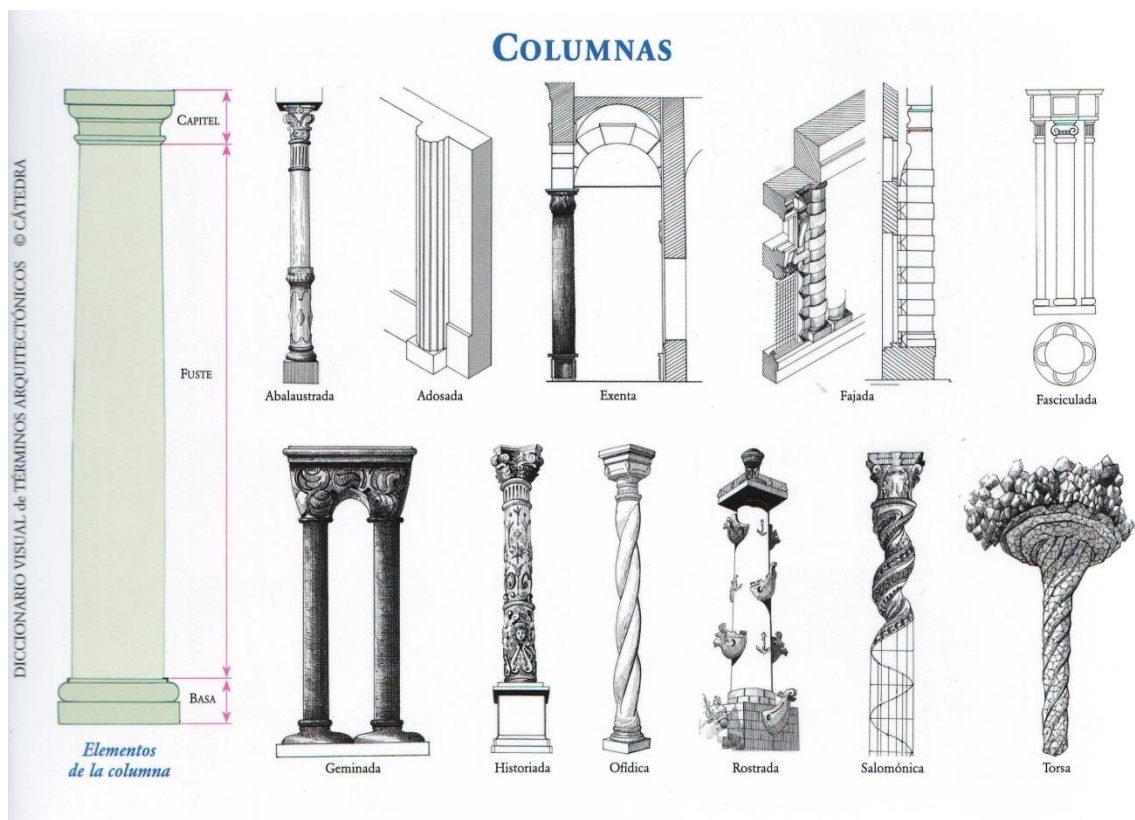


Figura 1: Tipos de columnas

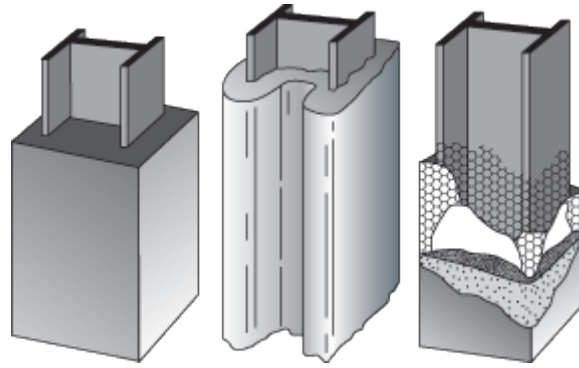


Figura 2: Columnas mixtas



Figura 3: Columna armada de acero



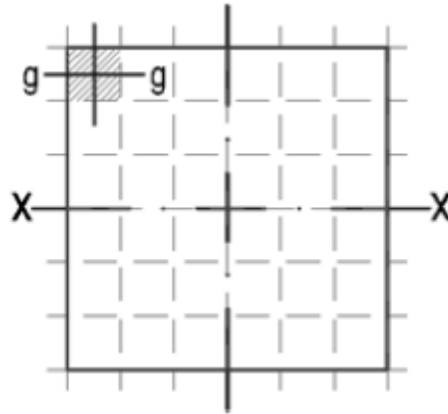
Figura 4: Columnas metálicas

Antes de adentrarnos más en el tema recordaremos algunos conceptos:

Momento de Inercia: resistencia de un cuerpo a girar alrededor de un eje. Para definirlo, primero se debe establecer cuál es el eje de giro, pues el valor dependerá del eje elegido. Matemáticamente es la integral de los diferenciales de área por la distancia al cuadrado al eje considerado:

$$I = \int y^2 dA \quad (1)$$

Teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos: El teorema de Steiner (Jakob Steiner) se emplea cuando el eje de referencia no coincide con los baricéntricos. Establece que el momento de inercia con respecto a cualquier eje paralelo a un eje que pasa por el centro de gravedad, es igual al momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de gravedad más el producto del área por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes:



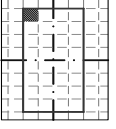
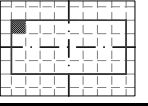
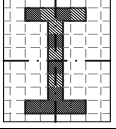
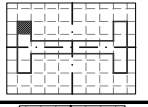
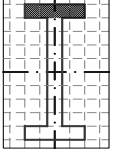
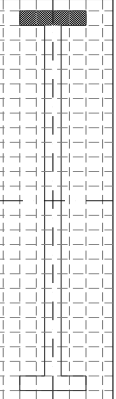
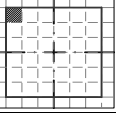
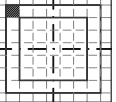
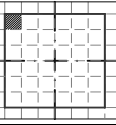
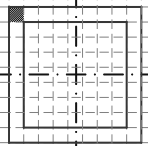
$$I_{xx} = I_{gg} + Ad^2 \quad (2)$$

Siendo “d” la distancia entre el eje x-x y el eje g-g.

Radio de Giro: En ingeniería estructural, el radio de giro describe la forma en la cual el área transversal (masa) se distribuye alrededor de un eje. Numéricamente es el valor medio cuadrático de distancia de los puntos de la sección o la distribución de masa respecto a un eje baricéntrico. Matemáticamente:

$$r^2A = I \quad (3)$$

Tabla 1: Eficiencia de secciones

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LAS SECCIONES						
Nº	Sección	Momento de Inercia	Área	Eficiencia	Radio de giro	
		J	A	J/A	i	
		[cm ⁴]	[cm ²]	[cm ⁴ /cm ²]	[cm]	gráfico
1		170	32	5,3	2,30	
2		40	32	1,3	1,12	
3		115	14	8,2	2,87	
4		10	14	0,7	0,85	
5		204	16	12,8	3,57	
6		2400	32	75,0	8,66	
7		108	36	3,0	1,73	
8		85	20	4,3	2,06	
9		344	32	10,8	3,28	
10		146	24	6,1	2,47	

2- Comportamiento y dimensionamiento en acero y madera

De acuerdo con investigaciones teóricas realizadas por Euler (1740) se pudo establecer en forma analítica la carga crítica para elementos comprimidos determinada para una columna biarticulada con sección uniforme y carga centrada. En rigor, estudió la altura que podía alcanzar una columna antes de pandear por su propio peso.

$$P_{crit} = \pi^2 \frac{EI_{min}}{L^2} = \pi^2 \frac{EA}{\lambda^2} \quad (4)$$

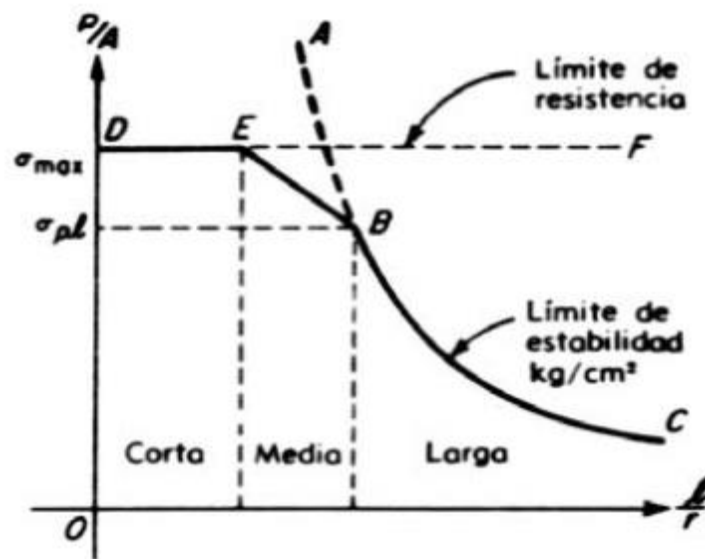


Figura 5: Variación de la tensión crítica con la esbeltez

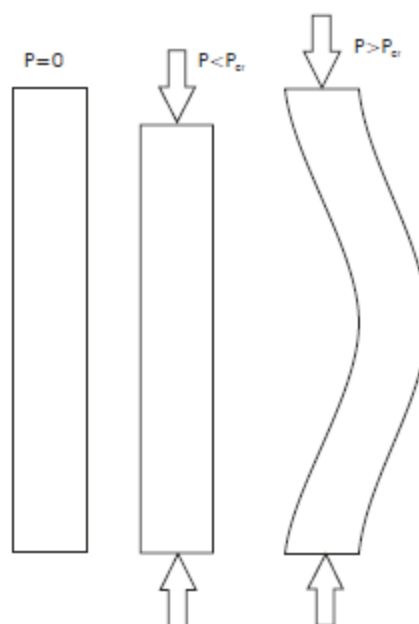


Figura 6: Concepto de carga crítica

La deformada que tomaba la columna era la de una función hiperbólica (seno) (figura 6). Por ello cualquier otro caso de carga, distinta sección o diferentes vínculos en los extremos se la asimila a una columna con las características mencionadas, es decir biarticulada, de sección constante, carga centrada y perfectamente rectilínea con la condición de que tenga la misma carga crítica que el componente original.

Si la columna presenta un extremo articulado pero el otro empotrado, se buscará la columna biarticulada equivalente que nos permita aplicar la expresión de Euler para su dimensionamiento. Esto se logra multiplicando la longitud real por un factor de corrección, para obtener la longitud de pandeo de la columna como:

$$L_p = kL \tag{5}$$

En la figura 8 se observa la influencia de los vínculos en la carga crítica por la cantidad de carga colocada. La que menos resiste es la empotrada y libre (4ª de izquierda a derecha) y la que más resiste es la empotrada-empotrada (2ª de izquierda a derecha)

La figura 7 indica los valores reglamentarios del coeficiente “k” para determinar la longitud de pandeo. Los valores analíticos del coeficiente “k”, para los casos abajo mostrados son: 1.00; 0.65; 0.50; 2.00.

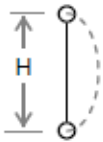
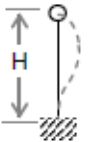
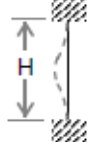
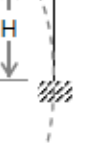
Coeficiente “k” para determinar (Lp)			
articulada articulada	articulada empotrada	empotrada empotrada	empotrada libre
			
1.00	0.80	0.65	2.10

Figura 7: Coeficiente “k” para determinar la longitud de pandeo

Por ejemplo, si vemos la tercer columna de la figura 7, la onda de la función seno tiene un semiperíodo igual a la mitad de la longitud de la columna, mientras que la columna 4 debe tener una longitud ficticia igual al doble de su longitud real para formar el semiperíodo, el cual es igual a la altura de la columna biarticulada, o sea, al primera.

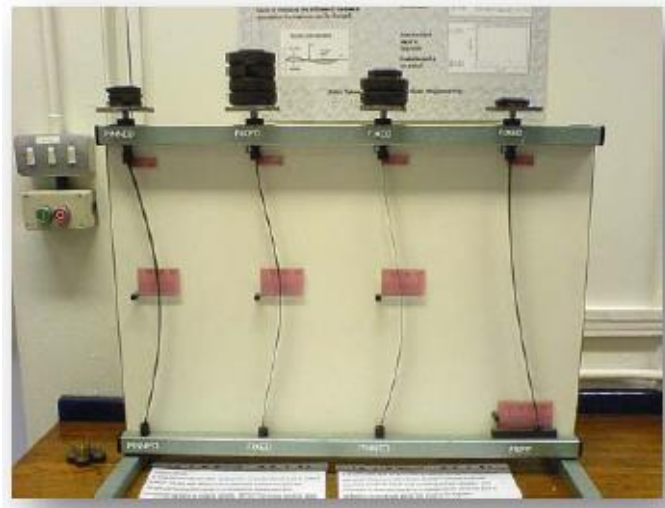


Figura 8: Efecto de vínculos en la carga crítica

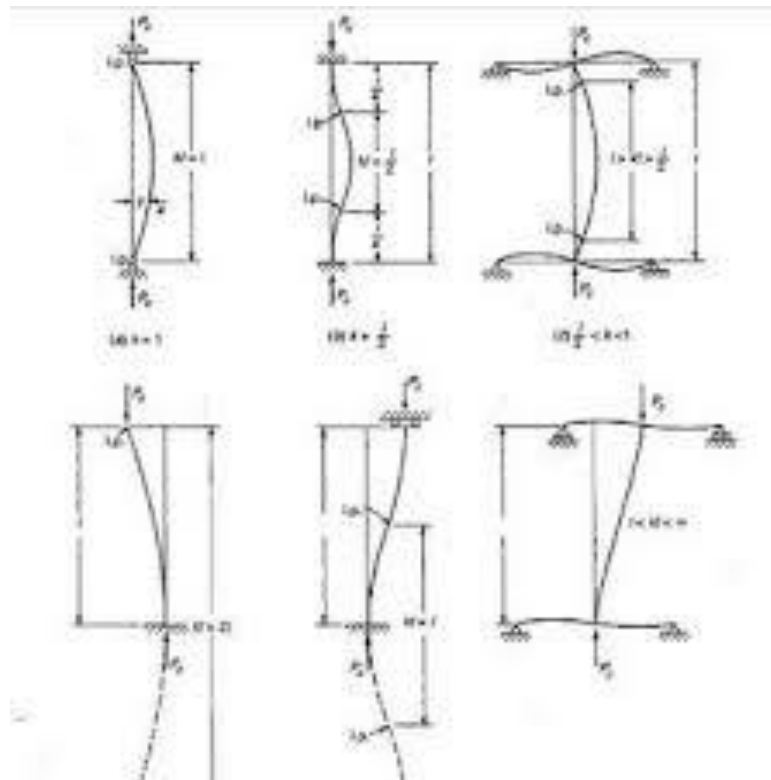


Figura 9: Efecto de vínculos

La sección transversal también influye en la carga que alcanzará el elemento comprimido, donde el área y el momento de inercia son los parámetros que definirán el comportamiento. Debemos preguntarnos si ambos participan en la misma medida o si alguno de ellos resulta más importante. Si tomamos distintas columnas de igual altura e igual área, pero cambiando la inercia, ¿aumentará o disminuirá la carga que pueda soportar?.

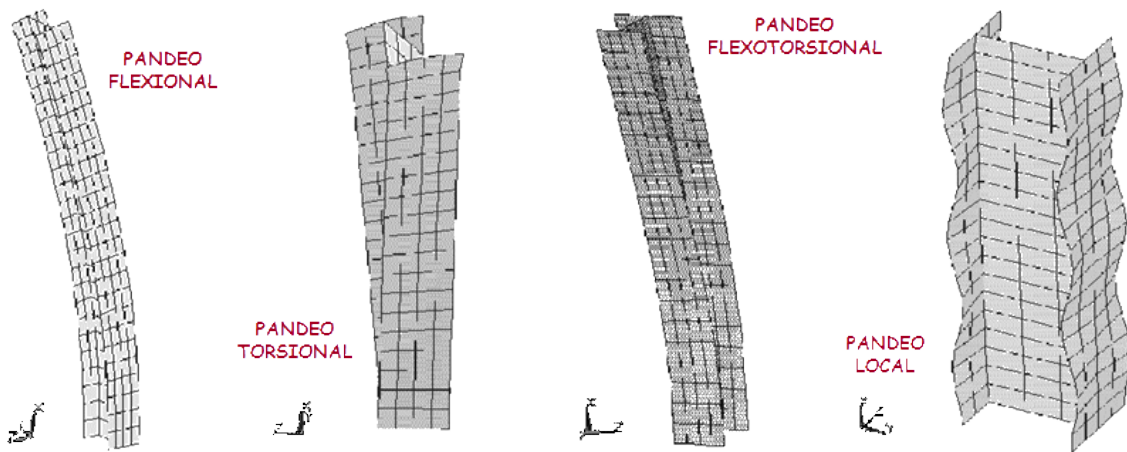


Figura 10: Pandeo en columnas metálicas

El dimensionamiento de componentes comprimidos se realiza para Estado Último (ELU) en el caso del acero y para Estado Límite de Servicio (ELS) cuando sean de madera. El fundamento teórico es similar ya que cuando la esbeltez del componente supera cierto valor, se presenta el pandeo y tiene validez la expresión de Euler [4] pues el material presenta comportamiento en el rango elástico y se caracteriza a través del valor del módulo de elasticidad longitudinal “E”. Pero para valores de esbeltez menores, el material empieza a abandonar el campo elástico más allá de la proporcionalidad. Las propiedades del material comienzan a cambiar y el módulo de elasticidad (tangente a la curva) disminuye lo que da lugar a considerar el módulo tangente E_T . La curva teórica de Euler da valores de tensión infinitos cuando la esbeltez tiende a cero

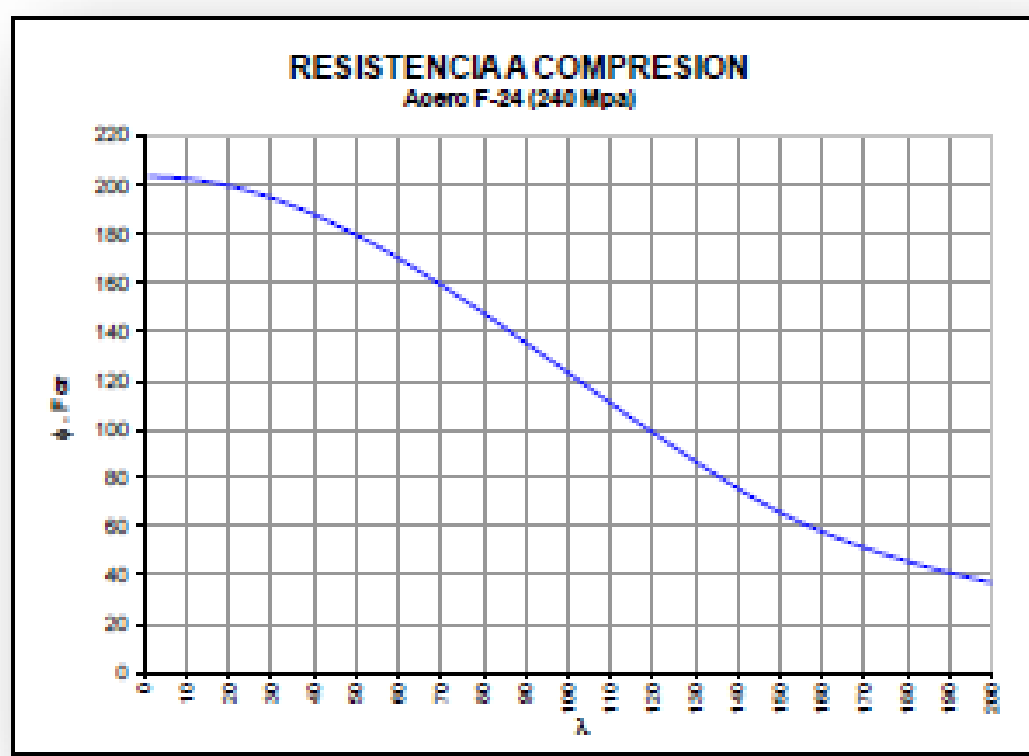


Figura 11: Efecto de la esbeltez en la tensión crítica.

El factor de esbeltez, λ_c , se define como:

$$\lambda_c = \frac{kL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad (5)$$

Y la tensión crítica es:

$$F_{cr} = 0.658^{\lambda_c^2} F_y \quad \lambda_c \leq 1.5 \quad (6)$$

$$F_{cr} = \frac{0.877}{\lambda_c^2} F_y \quad \lambda_c > 1.5 \quad (7)$$

El dimensionamiento de secciones de acero, excepto tubos, se realiza según el reglamento CIRSOC 301. Para las secciones tubulares se aplica el reglamento CIRSOC 302. Ambos adoptan una curva para determinar la tensión crítica (F_{cr}) con dos regiones una elástica (esbeltez reducida $\lambda_c > 1,50$) y otra inelástica ($\lambda_c \leq 1,50$). Cabe mencionar que para esbeltez nula, la tensión máxima que puede alcanzar el material es la tensión de fluencia f_y del mismo.

En el caso de los tubos se debe considerar la esbeltez local de alas y almas para que no se produzca pandeo y de ese modo son aplicables las expresiones dadas an.

Para obtener la resistencia nominal (P_n) y la de diseño (P_d) a compresión se utilizan las expresiones que siguen con el factor $\phi_c = 0.85$:

$$P_n = A_g F_{cr} \quad (8)$$

$$P_d = \phi_c P_n = \phi_c F_{cr} A_g \quad (9)$$

La expresión de la tensión crítica F_{cr} se obtiene de tablas o gráficos y, al multiplicar por el área del componente, se obtiene la resistencia buscada de manera que se cumpla la ecuación del estado límite:

$$P_u \leq P_d \quad (10)$$

Para el dimensionamiento de columnas de madera en compresión se deben emplear combinaciones en estado de servicio y con ellas se utiliza el método omega (ω). Los fundamentos teóricos del método omega pueden ubicarse en la bibliografía recomendada. Si bien el método plantea la verificación en términos de tensión ($f = \text{carga}/\text{área}$), se presenta una variante para expresarla en términos de cargas. Partiendo de la fórmula del método omega:

$$f = \frac{\omega P}{A} = \frac{\text{coef. omega} \times \text{Carga}}{\text{Área de la sección}} \leq f_{\text{admisible del material}} \quad (11)$$

$$P_{adm} = \frac{f_{adm} A}{\omega} = \frac{\text{Tensión adm.} \times \text{Área}}{\text{coef. omega}} \quad (12)$$

$$P \leq P_{adm} \quad (13)$$

Tanto para acero como para madera se presentan al final diagramas de procedimiento, tablas y ejemplos resueltos.

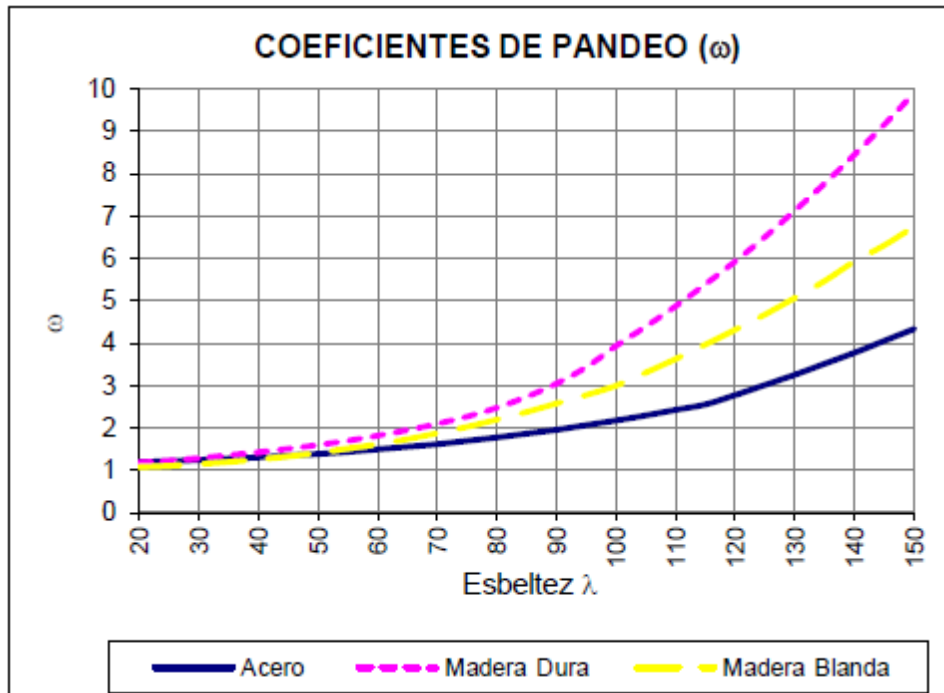


Figura 12: Coeficientes de pandeo “ w ”

3- Comportamiento y dimensionamiento en hormigón armado

En columnas con carga centrada el hormigón trabaja a compresión simple axial. La armadura consta de barras de acero redondos verticales llamada armadura “vertical o longitudinal” vinculada transversalmente por otras barras de acero denominada “estribos”. Los estribos pueden estar separados unos de otros o bien formar espirales continuos atados a la armadura longitudinal.



Figura 13: Columnas de hormigón armado

Los estribos cumplen tres funciones fundamentales:

- a. Resistir los esfuerzos de tracción derivados de los esfuerzos de compresión del hormigón. Recordemos que cuando una barra se comprime, tiende a ensancharse lateralmente (efecto Poisson). Este ensanchamiento lateral provoca tracción que será resistida por los estribos
- b. Limitar la longitud de pandeo: Las barras longitudinales sometidas a compresión pueden pandear hacia afuera haciendo saltar el recubrimiento de hormigón, siendo los estribos los encargados de “acortar” la longitud de pandeo, lo que se logra mientras menos separados se encuentren entre sí.
- c. Confinar el hormigón: al disminuir la separación mejora el comportamiento del hormigón permitiendo mayor capacidad de carga y, fundamentalmente, dotándolo de mayor ductilidad (capacidad para deformarse plásticamente). Esta última condición muy requerida en estructuras sismorresistentes. La separación de estribos condiciona la resistencia final de la columna. Por ejemplo tres columnas de igual sección de hormigón

pero con estribos separados 25 cm, 12,5 cm y 6 cm dieron diferente resultado durante el ensayo de compresión. Refiriendo a la tercera, los resultados fueron: 82%, 87 % y 100% respectivamente. Esto indica que la resistencia del hormigón aumenta cuando disminuye la separación de estribos.

A la relación entre la sección total de hormigón y la sección total de armadura longitudinal se la denomina cuantía geométrica y se la designa con la letra griega ρ (se pronuncia ró) y varía desde 1 % hasta 4 % y se expresa como 0.01 ó 0.04.

$$\rho = \frac{A_s}{A_H} \quad (14)$$

donde:

ρ = cuantía geométrica

A_H = Sección total de hormigón

A_s = Sección total de acero longitudinal

Para la determinación de la sección de hormigón se deben tener en cuenta que todas las barras tengan recubrimiento suficiente (Tabla 4 anexo). Para ello se debe considerar el recubrimiento desde el estribo, que será la barra más expuesta y, como vimos, muy importante en la resistencia final de la columna.

Al tratarse de columnas con cargas centradas se supone que las acciones horizontales que pudieran solicitar a la construcción deberán ser tomadas y transmitidas por otro sistema resistente. Por ello en este caso se considera que la columna se comporta como un sistema indesplazable.

Para el dimensionamiento de columnas de hormigón armado intervienen los siguientes factores:

1. Dimensiones generales
2. Sistema de arriostramiento lateral
3. Altura de la columna en estudio

4. Tipo de acero y hormigón

5. Cuantía adoptada

La altura de la columna y su sección transversal tienen gran importancia en el diseño de la misma pues son las variables que controlarán el pandeo. Si la relación entre la altura de la columna y el lado menor (relación de esbeltez) supera los mínimos (ver consideraciones geométricas), se deberán tomar precauciones contra el pandeo.

Entonces la sección necesaria debe ser mayor y se determina a partir de la relación de esbeltez con el coeficiente de pandeo ω .

Las columnas se clasifican en simples y zunchadas. Las primeras presentan los estribos separados y son en general de sección cuadrangular. Las segundas tienen los estribos en forma de espiral continuo y son de sección circular o poligonal de más de seis lados. Este sistema de confinamiento lateral proporciona una mayor capacidad de carga por presentar mejor comportamiento a compresión.

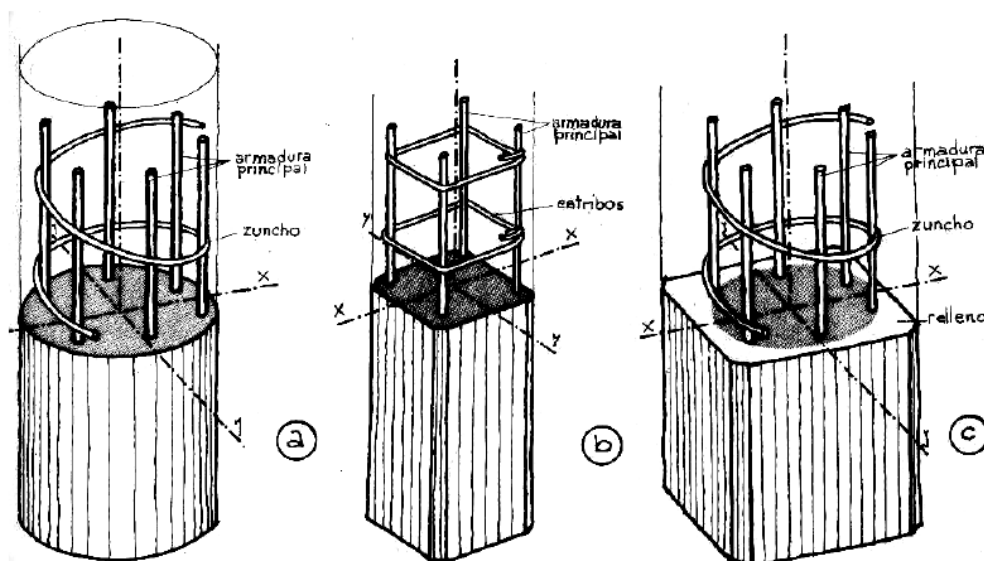


Figura 14: Tipos de columnas de hormigón armado: a)Circular zunchada, b)Cuadrada, c)Cuadrada zunchada

Las columnas cortas (sin pandeo) deben verificar la condición resistente:

$$P_D \geq P_U \quad (15)$$

$$P_D = \phi_c P_n \quad \text{y} \quad P_U = 1,2 P_D + 1,6 P_L \quad \text{ó} \quad P_U = 1,4 P_D$$

ϕ_c = Factor de reducción de resistencia a compresión

La resistencia nominal de una columna de hormigón armado se debe a la contribución del hormigón y del acero, lo que se ve en los dos términos de la ecuación siguiente. El factor 0.80 tiene en cuenta excentricidades accidentales. El factor 0.85 multiplica a la tensión especificada del hormigón (f'_c) para considerar un diagrama de compresión rectangular. Considerando que $(1 - \rho) \approx 1.0$:

Realizando el equilibrio de fuerzas verticales queda:

$$P_N = 0.80 [0,85 f'_c (A_H - A_s) + f_y A_s] = 0,80 A_H [0,85 f'_c (1 - \rho) + \rho f_y] \quad (16)$$

$$P_N = 0.80 A_H (0.85 f'_c + \rho f_y) \quad (17)$$

$$P_U = P_D = \phi_c P_n = \phi_c [0.80 A_H (0.85 f'_c + \rho f_y)] \quad (18)$$

3.1 Expresiones de dimensionamiento para columnas

$$A_H = \frac{P_u}{\phi_c 0.80 [0.85 f'_c + \rho f_y]} \quad (19)$$

$$A_s = \rho A_s$$

para columnas simples

$$A_H = \frac{P_u}{0.52 [0.85 f'_c + \rho f_y]} \quad (18)$$

para columnas zunchadas

$$A_H = \frac{P_u}{0.56 [0.85 f'_c + \rho f_y]} \quad (20)$$

donde:

A_H = Sección de hormigón

A_s = Sección total de acero

P_U = Resistencia Requerida de compresión

f'_c = Resistencia especificada o característica del hormigón

f_y = Tensión de fluencia del acero ADN-420. 420 MPa o 4200 kg/cm²

ρ = Cuantía geométrica

ϕ_c = Factor de Resistencia de compresión (0.65)

Tabla 2: Tensión especificada para el hormigón

Tensión Especificada o Característica					
Hormigón tipo	H-20	H-25	H-30	H-38	H-45
Resistencia característica (f'_c [kg/cm ²])	200	250	300	350	450
Módulo de Elasticidad E_b [kg/cm ²]	210190	235000	257430	278056	315286

Tabla 3: Resistencias del hormigón

Clases de Resistencia del Hormigón y Aplicaciones									
Grupo	Identificación	Resistencia Característica (f'_c) a 28 días			Resistencia media mínima sobre 3 ensayos consecutivos			Aplicaciones	
		[MN/m ²]	[Mpa]	[kg/cm ²]	[MN/m ²]	[Mpa]	[kg/cm ²]		
H - I	H - 4	4,0	4,0	40	7,0	7,0	70	Hormigón Simple únicamente	H° S°
	H - 8	8,0	8,0	80	12,0	12,0	120		
	H - 13	13,0	13,0	130	17,5	17,5	175	Hormigón Simple y	H° S° H° A°
H - II	H - 20	21,0	21,0	210	26,5	26,5	265	Hormigón Simple, Armado y Pretensado	H° S° H° A° H° P°
	H - 25	25,0	25,0	250	31,0	31,0	310		
	H - 30	30,0	30,0	300	35,0	35,0	350		
	H - 38	38,0	38,0	380	43,0	43,0	430		
	H - 47	47,0	47,0	470	52,0	52,0	520		

Tabla 3: Secciones de acero para vigas y columnas

Secciones de armadura para vigas y columnas [cm ²]														
Diámetro	Peso	Cantidad de Barras												
[mm]	[kg/m]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20
4	0,099	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,13	1,26	1,51	2,01	2,51
6	0,222	0,28	0,57	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	2,83	3,39	4,52	5,65
8	0,394	0,50	1,00	1,51	2,01	2,51	3,01	3,52	4,02	4,52	5,02	6,03	8,04	10,05
10	0,616	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,85	9,42	12,56	15,70
12	0,887	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,78	7,91	9,04	10,17	11,30	13,56	18,09	22,61
16	1,578	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,09	20,10	24,12	32,15	40,19
20	2,465	3,14	6,28	9,42	12,56	15,70	18,84	21,98	25,12	28,26	31,40	37,68	50,24	62,80
25	3,851	4,91	9,81	14,72	19,63	24,53	29,44	34,34	39,25	44,16	49,06	58,88	78,50	98,13
32	6,310	8,04	16,08	24,12	32,15	40,19	48,23	56,27	64,31	72,35	80,38	96,46	128,61	160,77

Se indican sólo los diámetros disponibles comercialmente. Las barras de 32 mm son a pedido y por toneladas.

3.b Consideraciones geométricas y de armado

Columnas Simples

- $b_{\text{mínimo}} = 20 \text{ cm}$
- Cantidad de barras mínimas = 4
- Diámetro longitudinal mínimo = 12 mm
- Diámetro estribos p/barra longitudinal $\leq \phi 16 \text{ mm}$ $\phi_{\text{estribo}} = 6 \text{ mm}$

$$p/\text{barra longitudinal} \leq \phi 25 \text{ mm } \phi_{\text{estribo}} = 8 \text{ mm}$$

$$p/\text{barra longitudinal} > \phi 25 \text{ mm } \phi_{\text{estribo}} = 10 \text{ mm}$$

- Esbeltez máxima ≤ 15 (sin pandeo)
- Separación estribos $\leq 12 \cdot \phi$ barra longitudinal (6 ϕ barra, para pórticos sismorresistente)
- Separación estribos $\leq b_{\text{mínimo}}$
- $\phi_c = 0.65$

Se debe tratar que la esbeltez sea menor a 15, calculada como la altura sobre la dimensión mínima de la sección.

Además, si las columnas forman parte de un pórtico, la dimensión mínima de la columna en dirección del pórtico debe ser

$$b = \frac{HL}{40} \quad (21)$$

Siendo “H” la altura entre los puntos de apoyos superior e inferior, “L” la longitud de la viga que llega a la columna medida en la dirección de “b”.

Así por ejemplo, para una columna de 3m de altura con una viga de 5m que llega a ella, la dimensión de la columna en dirección de la viga sería de:

$b=3 \times 5 / 40 = 0.375$ m, o sea 37.5 cm, lo que se podría redondear a 40cm. La dimensión perpendicular de la sección dependerá de la longitud de la viga en la dirección perpendicular.

Columnas Zunchadas

- Diámetro mínimo = 30 cm
- Cantidad de barras mínimas = 6
- Diámetro longitudinal mínimo = 12 mm
- Diámetro estribos p/barra longitudinal $\leq \phi$ 16 mm $\phi_{\text{estribo}} = 6$ mm

$$p/\text{barra longitudinal} \leq \phi 25 \text{ mm } \phi_{\text{estribo}} = 8 \text{ mm}$$

$$p/\text{barra longitudinal} > \phi 25 \text{ mm } \phi_{\text{estribo}} = 10 \text{ mm}$$

- Esbeltez máxima ≤ 13 (sin pandeo)
- Separación estribos $\leq 1/5$ diámetro del núcleo.
- Separación estribos ≤ 8 cm
- $\phi_c = 0.70$

4- EJEMPLOS:

4.1-Ejemplo de cálculo de columna de acero.

Se desea diseñar una columna de acero de 3.00 m de altura y articulada en ambos extremos para soportar las siguientes cargas:

$$P_D=9000 \text{ kg}$$

$$P_L=5000 \text{ kg}$$

En primer lugar calculamos la carga última que debe soportar la columna.

$$P_u=1.2P_D+1.6P_L$$

$$P_u=18800 \text{ kg}$$

El material a utilizar es $F_y=240 \text{ MPa}=2400 \text{ kg/cm}^2$

a) Utilizando las tablas de tensiones críticas

La longitud de pandeo efectiva es $L_p=kL=1.0 \times 300 \text{ cm}=300 \text{ cm}$

El proceso de diseño es iterativo pues al comenzar no se conocen las características geométricas de la sección. Por ello se debe proponer una sección y luego verificar. Para acortar el número de iteraciones se establecen los límites de las áreas: mínima y máxima.

El valor de área mínima corresponde a la compresión sin pandeo ($\lambda = 0$;

$F_{cr} \cdot \phi_c = 2400 \times 0,85 = 2040 \text{ kg/cm}^2$) y el valor de área máxima a la máxima esbeltez posible en las columnas $\lambda = 200$ ($\lambda_c = 2.19$; $\phi_c F_{cr} = 0.85 \times 430 \text{ kg/cm}^2 = 365.5 \text{ kg/cm}^2$).

Área mín. (para $\lambda = 0$) $\rightarrow A_{\text{mín}} = P_u / F_{cr} \phi_c = P_u / 2040 \text{ kg/cm}^2$

Área máx. (para $\lambda = 200$; $\lambda_c = 2.19$) $\Rightarrow A_{\text{máx}} = P_u / F_{cr} \phi_c = P_u / 365,5 \text{ kg/cm}^2$

Consideramos entonces un promedio entre las áreas máximas y mínimas.

$$A_1 = (A_{\text{mín}} + A_{\text{máx}}) / 2$$

$$A_{\text{mín}} = 18800 \text{ kg} / 2040 \text{ kg/cm}^2 = 9.22 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{máx}} = 18800 \text{ kg} / 365,5 \text{ kg/cm}^2 = 51.43 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = 30.32 \text{ cm}^2$$

De la tabla de perfiles se elige **caño estructural rectangular 80 x 100 x 6,02** (medidas en mm)

Área = $A_g = 19,29 \text{ cm}^2$ (un poco menor a la necesaria)

Peso = $g = 16,09 \text{ kg/m}$

Momento de Inercia respecto del eje x-x = $I_x = 257,96 \text{ cm}^4$

Momento de Inercia respecto del eje y-y = $I_y = 186,37 \text{ cm}^4$

Radio de giro respecto del eje x-x = $r_x = 3,66 \text{ cm}$

Radio de giro respecto del eje y-y = $r_y = 3,11 \text{ cm}$

Momento de Inercia (mínimo) = $I_y = 186,37 \text{ cm}^4 \rightarrow$ Se toma el menor

Radio de giro (mínimo) = $r_y = 3,11 \text{ cm} \rightarrow$ Se toma el menor

$\lambda = k \cdot H / r_{\min} = 1.0 \times 300 \text{ cm} / 3,11 \text{ cm} = 96,4 \approx 96 \rightarrow$ de tabla para la esbeltez de 96, $\phi_c \cdot F_{cr} = 0.85 \times 150 \text{ MPa} = 127.5 \text{ MPa} = 1275 \text{ kg/cm}^2$

Como $A = P_u / F_{cr} \phi_c \rightarrow$ podemos calcular la carga de diseño como

$$P_d = \phi_c \cdot P_n = \phi_c \cdot F_{cr} \cdot A_g = 0.85 \times 1500 \text{ kg/cm}^2 \cdot 19,29 \text{ cm}^2 = 24595 \text{ kg}$$

La carga de diseño P_d es la carga máxima admisible que resiste la columna, la que debe ser mayor a la carga última P_u

$$P_d = 24595 \text{ kg} > P_u = 18800 \text{ kg} \quad \text{OK}$$

Se calcula ahora la eficiencia de la sección como:

$Ef = P_u / P_d = 18800 \text{ kg} / 24733 \text{ kg} = 0.76$ lo que es un poco bajo, ya que debería ser mayor a 0.85

Alternativamente se puede comenzar el diseño eligiendo la esbeltez límite, de esta forma se puede calcular cuál es el radio de giro mínimo y área necesaria. Posteriormente se elige el perfil que posea las propiedades aproximadas antes calculadas y se calcula la esbeltez real y por tanto la tensión crítica real y con esos datos la carga de diseño que soporta el elemento.

Aplicando este procedimiento al caso anterior:

Adopto esbeltez $\lambda = 100$

Para este valor, la tensión crítica es: $F_{cr} = 144 \text{ MPa}$

Esto genera un área necesaria de $A = P_u / F_{cr} \phi_c = 18800 \text{ kg} / (0.85 \times 1440 \text{ kg/cm}^2) = 15.36 \text{ cm}^2$

El radio de giro necesario sería $r = kH / \lambda = 1.00 \times 300 \text{ cm} / 100 = 3 \text{ cm}$

Se busca un perfil que cumpla estas características:

De la tabla de perfiles se elige **caño estructural rectangular 80 x 100 x 6,02** (medidas en mm)

Área = $A_g = 19,29 \text{ cm}^2$ (un poco menor a la necesaria)

Peso = $g = 16,09 \text{ kg/m}$

Momento de Inercia respecto del eje x-x = $I_x = 257,96 \text{ cm}^4$

Momento de Inercia respecto del eje y-y = $I_y = 186,37 \text{ cm}^4$

Radio de giro respecto del eje x-x = $r_x = 3,66 \text{ cm}$

Radio de giro respecto del eje y-y = $r_y = 3,11 \text{ cm}$

Momento de Inercia (mínimo) = $I_y = 186,37 \text{ cm}^4 \rightarrow$ Se toma el menor

Radio de giro (mínimo) = $r_y = 3,11 \text{ cm} \rightarrow$ Se toma el menor

Y se procede a verificar el perfil de forma similar a la anterior realizada ya que es el mismo perfil.

4.2-Ejemplo de cálculo de columna de madera.

Se desea diseñar una columna de acero de 3.00 m de altura y articulada en ambos extremos para soportar las siguientes cargas:

$$P_D=9000 \text{ kg}$$

$$P_L=5000 \text{ kg}$$

En primer lugar calculamos la carga de servicio que debe soportar la columna.

$$P=P_D+P_L$$

$$P=14000 \text{ kg}$$

El material a utilizar es $F_{adm}=80 \text{ kg/cm}^2$

Las medidas se expresan comercialmente en pulgadas (2,54 mm), pero para construirse un elemento deben cepillarse (desbastarse) las caras hasta obtener una superficie susceptible de ser encolada, en el caso de la madera laminada. En esta operación se disminuye la sección, quedando reducida cada pulgada de 25,4 mm a 21 mm aproximadamente.

$$A_{min}= 14000 \text{ kg} / 80 \text{ kg/cm}^2= 175 \text{ cm}^2$$

Para $\lambda = 150$ corresponde $\omega = 6,75 \rightarrow$ (para maderas duras 9,91)

$$A_{m\acute{a}x} = 14000 \times 6,75 / 80 \text{ kg/cm}^2= 1181.25 \text{ cm}^2$$

$$A1 = (175 + 1181.25)/2 = 678 \text{ cm}^2$$

Se elige una sección de madera laminada 8" x 8" (pulgadas). 18,9 x 16,8 cm.

$$\text{Área} = A = 317,5 \text{ cm}^2 \text{ (poco menor a la necesaria)}$$

Volumen = 8 x 8 x 1,00 m = 64 pulg² x m. lineal (Nota = pg².m es la unidad de volumen comercial)

(En el ancho se cepilla solo una vez, pero en la altura, se cepilla cada madera antes de ser encolada. Esto explica la diferencia en las dimensiones, a pesar de ser ambas 8 pulgadas.)

$$\text{Momento de Inercia respecto del eje x-x} = I_x = 7468,1 \text{ cm}^4$$

$$\text{Momento de Inercia respecto del eje y-y} = I_y = 9451,8 \text{ cm}^4$$

$$\text{Radio de giro respecto del eje x-x} = r_x = 4,90 \text{ cm}$$

$$\text{Radio de giro respecto del eje y-y} = r_y = 5,50 \text{ cm}$$

$$\text{Momento de Inercia (mínimo)} = I_x = 7468,1 \text{ cm}^4 \rightarrow \text{Se toma el menor}$$

$$\text{Radio de giro (mínimo)} = r_x = 4,90 \text{ cm} \rightarrow \text{Se toma el menor}$$

Esbeltez mecánica (λ) = Longitud de pandeo /Radio de giro mínimo.

$$\lambda = L_p / r_{\min}$$

$$\lambda = 300 \text{ cm} \times 1,00 / 4,90 \text{ cm} = 61,2 \rightarrow \omega = 1,62$$

$$\text{Como } f = w \cdot P / A \rightarrow P_d = f \cdot A / \omega = 80 \text{ kg/cm}^2 \times 317,5 \text{ cm}^2 / 1,62 = 15679 \text{ kg}$$

$P_d > P$, verifica.

Eficiencia $P / P_d = 0,89$ Ok!

4.3-Ejemplo de cálculo de columna de Hormigón armado.

Se desea diseñar una columna de acero de 3.00 m de altura y articulada en ambos extremos para soportar las siguientes cargas:

$$P_D = 55000 \text{ kg}$$

$$P_L = 25000 \text{ kg}$$

En primer lugar calculamos la carga última que debe soportar la columna.

$$P_u = 1,2P_D + 1,6P_L$$

$$P_u = 106000 \text{ kg} = 106 \text{ ton}$$

Consideramos como material un hormigón H21 ($f_c = 21 \text{ MPa} = 210 \text{ kg/cm}^2$) y acero ADN-420 ($f_y = 420 \text{ MPa} = 4200 \text{ kg/cm}^2$).

Como la cuantía ρ varía entre 0.01 y 0.04, comenzamos adoptando un valor intermedio:

$$\rho = 0,015$$

$$A_H = \frac{106000}{0,52[0,85 \times 210 + 0,015 \times 4200]} = 844,08 \text{ cm}^2$$

Si tomamos sección cuadrada, la dimensión de la columna vale:

$$b = d = \sqrt{A_H} = (844,08)^{0,5} = 29,05 \text{ cm}$$

Adopto $b = d = 30 \text{ cm}$

$$A_H = 30 \times 30 = 900 \text{ cm}^2$$

$$\text{Cantidad de acero: } A_s = \rho A_H = 0,015 \times 900 = 13,5 \text{ cm}^2$$

Adopto $8\phi 16 \text{ mm}$ ($16,08 \text{ cm}^2$)

Cabe aclarar que la cantidad de acero depende de la sección real adoptada, o sea, es el valor de cuantía adoptado multiplicado por el área adoptada.

La carga máxima que soporta la columna es:

$$P_D = 0.65P_N = 0.65 \left[0.8 \left[0.85f'_c(A_H - A_S) + f_yA_S \right] \right]$$

$$= 0.52 \left[0.85f'_c(A_H - A_S) + f_yA_S \right]$$

$$P_D = 0.52(0.85 \times 210 \text{ kg/cm}^2 \times (900 \text{ cm}^2 - 16.08 \text{ cm}^2) + 4200 \text{ kg/cm}^2 \times 16.08 \text{ cm}^2) = 117164 \text{ kg}$$

$$P_D = 117.16 \text{ ton} > 106 \text{ ton}$$

Se puede hacer, alternativamente cuando la carga PD es mayor a Pu, el bajar un poco la cuantía manteniendo la sección de hormigón adoptada, siempre y cuando la cuantía sea mayor a la mínima reglamentaria de 0.01.

Los estribos deben cumplir que su diámetro sea mayor al diámetro longitudinal dividido 3 pero no menor a 6mm, o sea, $16/3=5.3\text{mm}$, adopto 6mm.

La separación debe ser menor a 12 veces el diámetro de la barra longitudinal, o sea, $16\text{mm} \times 12 = 192\text{mm} = 19.2\text{cm}$, adopto 15cm. De esta forma se deben colocar estribos de 6mm cada 15cm.

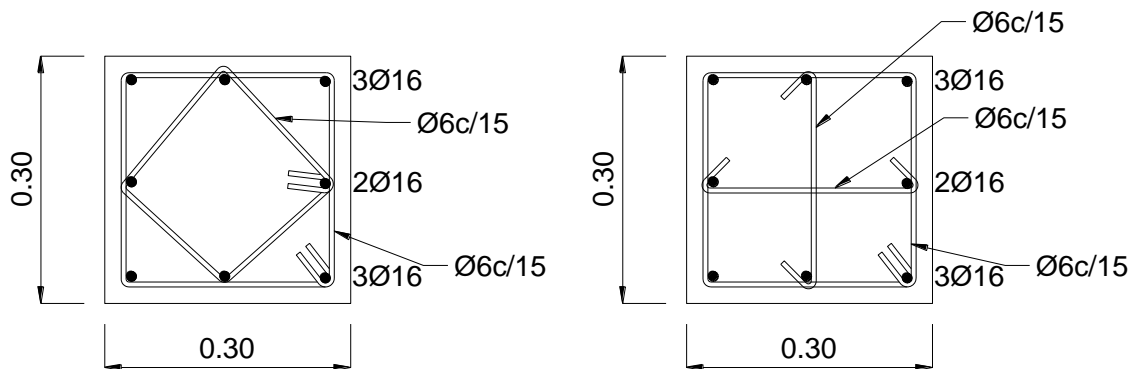


Figura 15: Opciones de armado de la columna

Se puede observar en la figura 15 distintas formas de armado de la columna. Está claro que la primer opción permite un llenado de la columna mucho más simple con menos disgregado del hormigón y facilidad de introducir un vibrador si es necesario.

5- CASO DE LONGITUDES DE PANDEO DISTINTAS EN UN MISMO ELEMENTO

Es normal en distintas estructuras que las condiciones de vínculo no sean similares respecto a sus ejes principales de la sección. Tal es el caso de cordones comprimidos de reticulados y columnas de naves industriales. La figura 16 muestra el caso de una nave industrial en la que se encuentra una cubierta conformada por estructuras reticuladas

paralelas y elementos verticales para tomar las acciones verticales y laterales que se originan. La cubierta se encuentra rigidizada en su plano para generar un sistema capaz de trasladar las fuerzas generadas a los elementos verticales resistentes. La figura 17 muestra distintas vistas de la estructura.

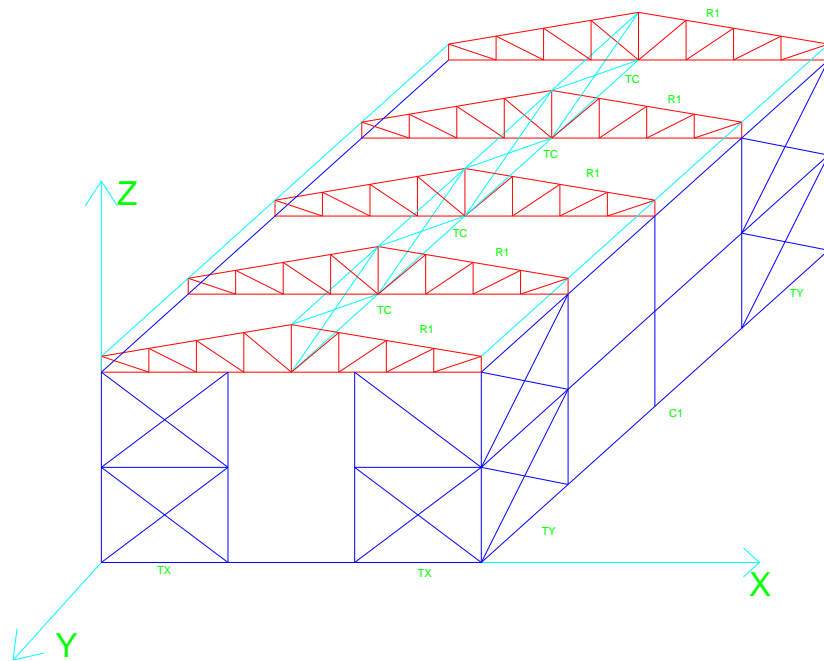
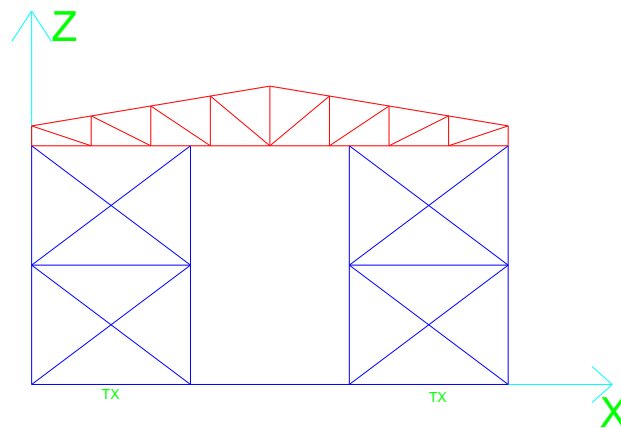
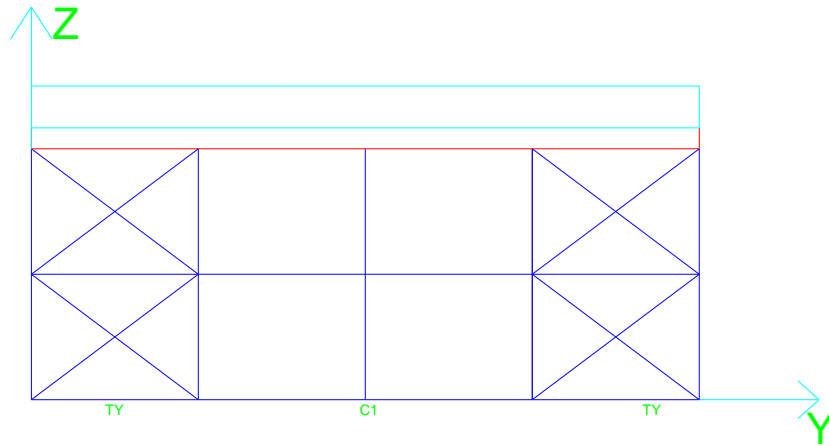


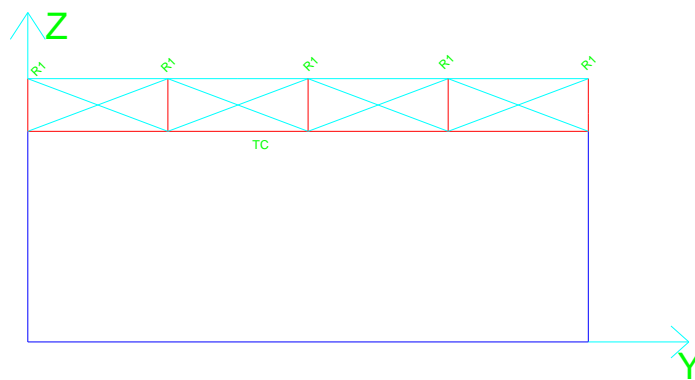
Figura 16: Vista axonometrica de la nave industrial



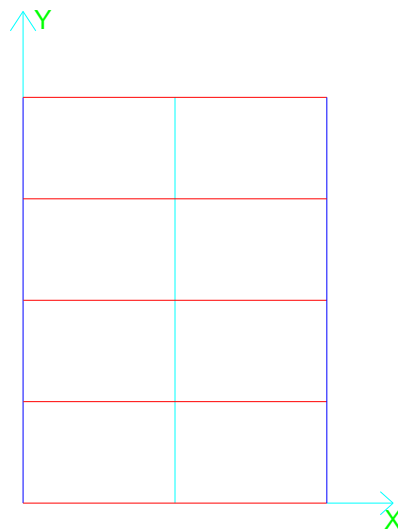
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 17: Vistas de la nave industrial. a) Plano XZ, b) Plano YZ, c) Plano YZ central, d) Planta

Se puede ver que la columna C1 está arriostrada a mitad de su altura en el plano YZ pero no posee ningún arriostramiento en el plano XZ, por tanto podríamos suponer que

la longitud de pandeo en el plano XZ es la altura total H y en el plano YZ es la mitad de la altura total, o sea, $H/2$, tal cual muestra la figura 18.

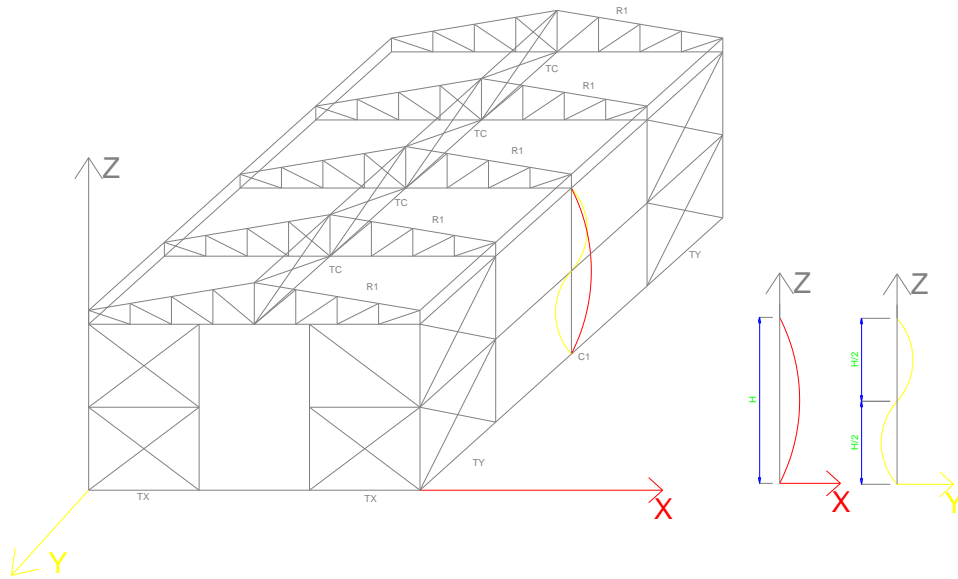


Figura 18: Longitudes de pandeo de la columna C1

Considerando esta situación, sería lógico considerar que hay dos esbelteces para la misma columna, una para cada plano, por lo tanto existirán dos tensiones críticas y dos cargas nominales. En forma simplificada y dado que es una única columna, se calculan ambas esbelteces, con los radios de giro correspondientes, y se toma la mayor de ellas. Con este valor se calcula la tensión crítica y por tanto la carga de diseño del elemento. La figura 19 muestra cómo debería colocarse el perfil, el cual debería ser asimétrico, o sea con r_x distinto de r_y y colocando el eje de mayor inercia perpendicular al plano de mayor longitud de pandeo.

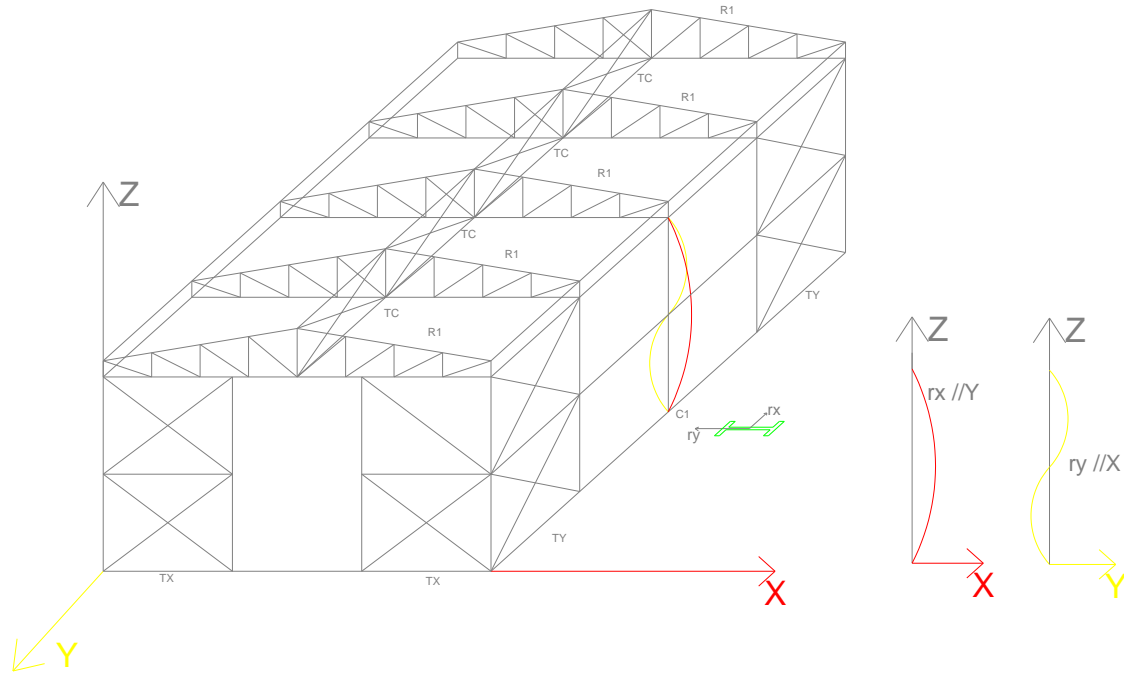


Figura 19: Posición del perfil para la columna C1

Esta misma situación ocurre con el reticulado R1, donde la longitud de pandeo del cordón superior en el plano XZ es la distancia entre montantes (elementos verticales del reticulado) y en el plano XY es la mitad de la longitud total, ya que la longitud está limitada por la rigidización central, como se puede ver en la figura 20.

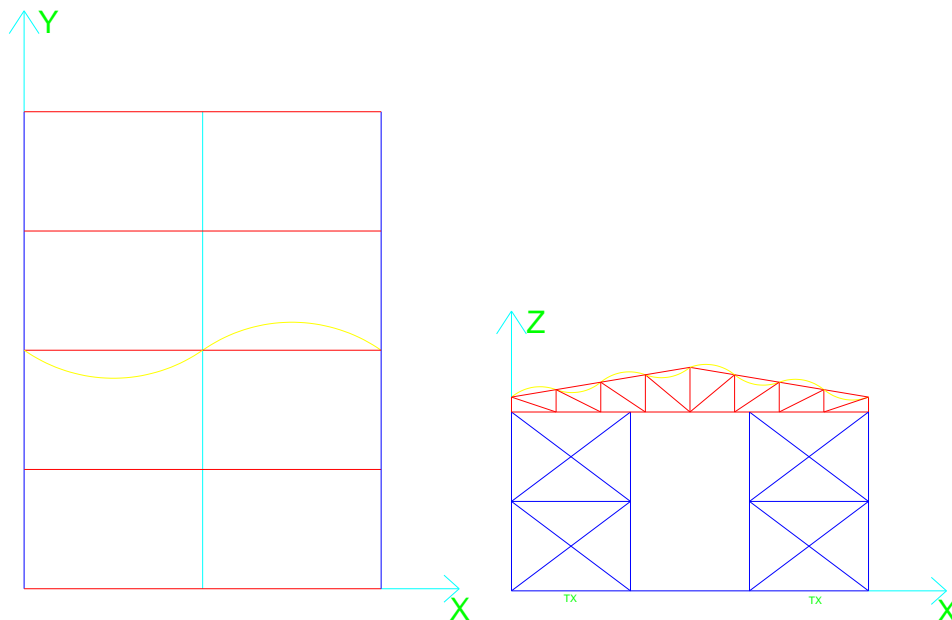


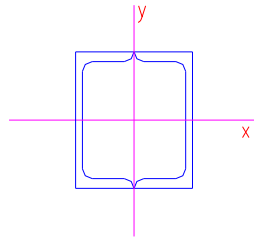
Figura 20: Longitudes de pandeo del cordón superior del reticulado R1 en el plano y fuera del plano del reticulado.

De esta forma, se procede igual que con la columna C1 y el perfil elegido debería colocarse en forma “horizontal”, es decir, con su eje de mayor inercia paralelo al eje Z.

En el caso de una columna armada, supongamos por 2 UPN120 formando un tubo, con longitud $L = 3\text{m}$ y biarticulada en sus extremos, lo que se debe hacer es encontrar los radios de giro del conjunto.

Para un perfil:

$A = 17\text{ cm}^2$
 $I_x = 364\text{ cm}^4$
 $I_y = 43.2\text{ cm}^4$
 $X_g = 1.6\text{ cm}$
 $H = 12\text{ cm}$
 $B = 5.5\text{ cm}$



El momento de inercia para el eje yy es

$$I_{yy} = \sum (I_y + A \cdot d^2) = 2 (43.2 + 17x(5.5 - 1.6)^2) = 603.54\text{ cm}^4$$

Y para el eje xx es

$$I_{xx} = \sum (I_x + A \cdot d^2) = 2x364 = 728\text{ cm}^4$$

Ya que los baricentros de los perfiles coinciden con el baricentro de la figura total.

Por tanto, los radios de giro son

$$r_x = \sqrt{\frac{I_{xx}}{2A}} = 4.63\text{ cm}$$

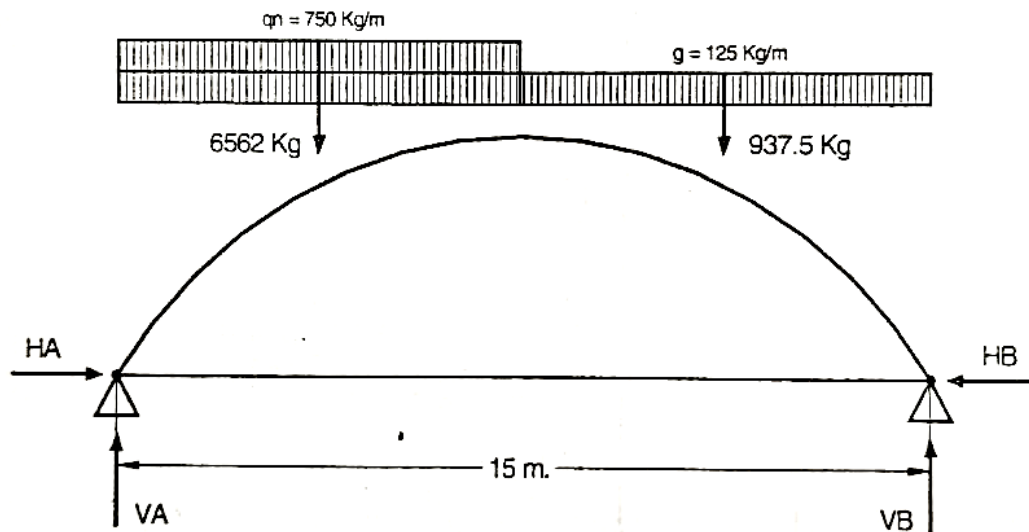
$$r_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{2A}} = 4.21\text{ cm}$$

Con estos valores se puede calcular la esbeltez y la tensión crítica, siendo $\lambda = 300\text{cm}/4.21\text{cm} = 71.26$

6- ARCOS

El comportamiento de los arcos es similar, pero opuesto, al de los cables. En el punto 9 del apunte de tracción se resuelve un cable. El mismo criterio se puede realizar para resolver un arco. Una vez obtenida la sollicitación máxima, se puede dimensionar como si fuese una columna comprimida.

Para el arco de la figura, considerando que la flecha puede ser $f = L/5 = 15\text{m}/5 = 3.00\text{m}$



Las reacciones se calculan como

$$\sum MB = 0$$

$$VA \times 15m - 6562 \text{ Kg} \times 11.25 - 937.5 \text{ Kg} \times 3.75m = 0 \Rightarrow$$

$$VA = \frac{6562 \text{ Kg} \times 11.25m + 937.5 \text{ Kg} \times 3.75m}{15m} \cong 5156 \text{ Kg}$$

$$\sum MA = 0$$

$$6562 \text{ Kg} \times 3.75m + 937.5 \text{ Kg} \times 11.25m - VB \times 15m = 0 \Rightarrow$$

$$VB = \frac{6562 \text{ Kg} \times 3.75m + 937.5 \text{ Kg} \times 11.25m}{15m} \cong 2343 \text{ Kg}$$

$$\sum MK = 0$$

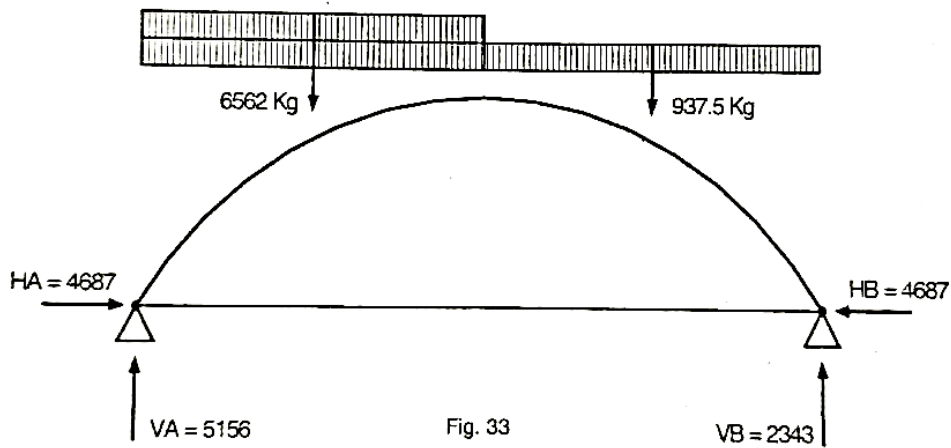
$$5156 \text{ Kg} \times 7.50m - HA \times 3m - 6562 \text{ Kg} \times 3.75m = 0 \Rightarrow$$

$$HA = \frac{5156 \text{ Kg} \times 7.50m - 6562 \text{ Kg} \times 3.75m}{3m} \cong 4687 \text{ Kg}$$

$$\sum MK = 0$$

$$937.5 \text{ Kg} \times 3.75m - 2343 \text{ Kg} \times 7.50m + HB \times 3m = 0 \Rightarrow$$

$$HB = \frac{-937.5 \text{ Kg} \times 3.75m + 2343 \text{ Kg} \times 7.50m}{3m} \cong 4687 \text{ Kg}$$

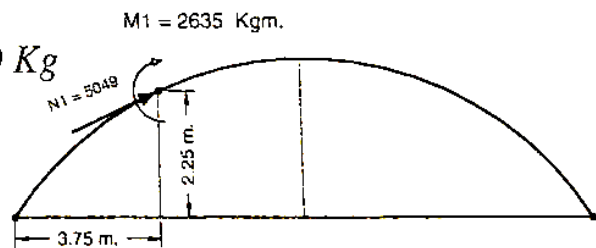


Y el esfuerzo máximo:

$$M1 = 5156 \text{ Kg} \times 3.75 \text{ m} - 4687 \text{ Kg} \times 2.25 \text{ m} - 875 \text{ Kg/m} \times \frac{(3.75)^2}{2} = 2635 \text{ Kgm}$$

$$Q1 = 5156 \text{ Kg} - 875 \text{ Kg/m} \times 3.75 \text{ m} = 1874 \text{ Kg}$$

$$N1 = \sqrt{(4687 \text{ Kg})^2 + (1874 \text{ Kg})^2} = 5049 \text{ Kg}$$



El esfuerzo máximo se puede obtener calculando el momento máximo en el arco y dividiendo por la flecha, $N=M_{\max}/f$.

ANEXO

COEFICIENTES DE PANDEO PARA MADERAS:

λ	Madera Dura	Madera Blanda
20	1.17	1.08
25	1.22	1.11
30	1.28	1.15
35	1.35	1.20
40	1.42	1.26
45	1.50	1.33
50	1.59	1.42
55	1.69	1.52
60	1.81	1.62
65	1.94	1.74
70	2.09	1.88
75	2.26	2.03
80	2.47	2.20
85	2.73	2.38
90	3.04	2.58
95	3.43	2.78
100	3.93	3.00
105	4.39	3.31
110	4.87	3.63
115	5.39	3.97
120	5.93	4.32
125	6.51	4.68
130	7.13	5.07
135	7.77	5.47
140	8.45	5.93
145	9.16	6.31
150	9.91	6.75

TENSIONES CRITICAS PARA ACERO F-24

λ	Fcr	λ	$\Phi \chi \rho$	λ	Fcr	λ	Fcr	λ	Fcr
1	240	41	220	81	172	121	114	161	67
2	240	42	219	82	170	122	113	162	66
3	240	43	218	83	169	123	111	163	65
4	240	44	217	84	168	124	110	164	64
5	240	45	216	85	166	125	108	165	64
6	240	46	215	86	165	126	107	166	63
7	239	47	214	87	163	127	106	167	62
8	239	48	213	88	162	128	104	168	61
9	239	49	212	89	160	129	103	169	61
10	239	50	211	90	159	130	102	170	60
11	239	51	210	91	157	131	100	171	59
12	238	52	209	92	156	132	99	172	59
13	238	53	208	93	155	133	98	173	58
14	238	54	207	94	153	134	96	174	57
15	237	55	206	95	152	135	95	175	57
16	237	56	205	96	150	136	94	176	56
17	236	57	203	97	149	137	92	177	55
18	236	58	202	98	147	138	91	178	55
19	236	59	201	99	146	139	90	179	54
20	235	60	200	100	144	140	88	180	53
21	235	61	199	101	143	141	87	181	53
22	234	62	197	102	141	142	86	182	52
23	234	63	196	103	140	143	85	183	52
24	233	64	195	104	138	144	83	184	51
25	232	65	194	105	137	145	82	185	51
26	232	66	192	106	135	146	81	186	50
27	231	67	191	107	134	147	80	187	50
28	231	68	190	108	133	148	79	188	49
29	230	69	188	109	131	149	78	189	48
30	229	70	187	110	130	150	77	190	48
31	229	71	186	111	128	151	76	191	47
32	228	72	184	112	127	152	75	192	47
33	227	73	183	113	125	153	74	193	46
34	226	74	182	114	124	154	73	194	46
35	225	75	180	115	122	155	72	195	46
36	225	76	179	116	121	156	71	196	45
37	224	77	177	117	120	157	70	197	45
38	223	78	176	118	118	158	69	198	44
39	222	79	175	119	117	159	68	199	44
40	221	80	173	120	115	160	68	200	43

TENSIONES CRITICAS PARA ACERO F-36

λ	Fcr	λ	Fcr	λ	Fcr	λ	Fcr	λ	Fcr
1	360	41	317	81	218	121	118	161	67
2	360	42	315	82	215	122	116	162	66
3	360	43	313	83	213	123	114	163	65
4	360	44	311	84	210	124	113	164	64
5	359	45	308	85	207	125	111	165	64
6	359	46	306	86	205	126	109	166	63
7	359	47	304	87	202	127	107	167	62
8	358	48	302	88	199	128	106	168	61
9	358	49	300	89	197	129	104	169	61
10	357	50	297	90	194	130	102	170	60
11	357	51	295	91	191	131	101	171	59
12	356	52	293	92	189	132	99	172	59
13	355	53	291	93	186	133	98	173	58
14	355	54	288	94	183	134	96	174	57
15	354	55	286	95	181	135	95	175	57
16	353	56	283	96	178	136	94	176	56
17	352	57	281	97	176	137	92	177	55
18	351	58	278	98	173	138	91	178	55
19	350	59	276	99	170	139	90	179	54
20	349	60	273	100	168	140	88	180	53
21	348	61	271	101	165	141	87	181	53
22	347	62	268	102	163	142	86	182	52
23	346	63	266	103	160	143	85	183	52
24	345	64	263	104	158	144	83	184	51
25	343	65	261	105	155	145	82	185	51
26	342	66	258	106	153	146	81	186	50
27	341	67	256	107	150	147	80	187	50
28	339	68	253	108	148	148	79	188	49
29	338	69	250	109	145	149	78	189	48
30	336	70	248	110	143	150	77	190	48
31	335	71	245	111	141	151	76	191	47
32	333	72	242	112	138	152	75	192	47
33	331	73	240	113	136	153	74	193	46
34	330	74	237	114	133	154	73	194	46
35	328	75	234	115	131	155	72	195	46
36	326	76	232	116	129	156	71	196	45
37	324	77	229	117	126	157	70	197	45
38	322	78	226	118	124	158	69	198	44
39	321	79	224	119	122	159	68	199	44
40	319	80	221	120	120	160	68	200	43

