



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

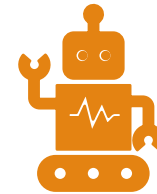


ROBOTICA I



UNIDAD III: Cinematica

Prof: Carolina Díaz



**Fundamentos
Matemáticos**

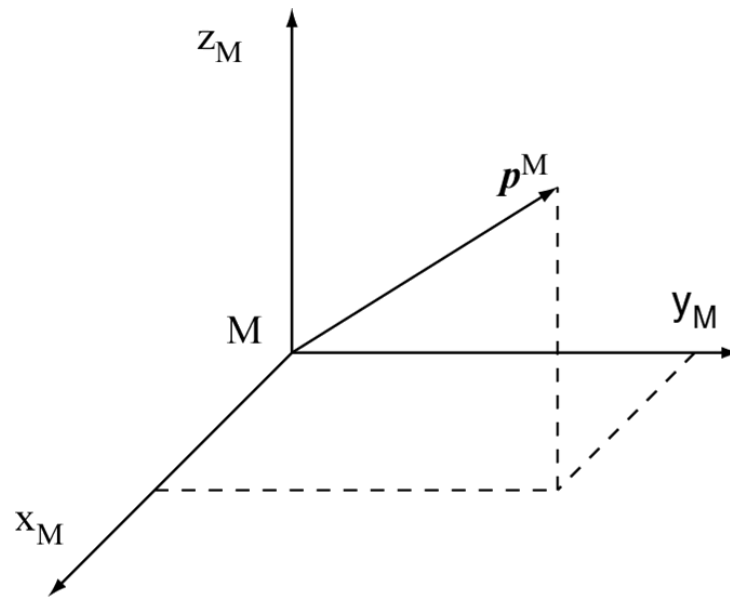
JTP: Eric Sanchez

Contenido UNIDAD 3

- Introducción repaso fundamentos matemáticos.
- Modelo cinemático directo Denavit Hartenberg .
- Modelo cinamático inverso.
- Cinemática del movimiento. Jacobiano. Singularidades.

- La manipulación de un objeto llevada a cabo por un robot implica un movimiento espacial de su extremo operativo.
- Para que el robot pueda acceder a un objeto es necesario saber la posición y orientación de la herramienta utilizada respecto del robot .
- Para esto se requieren de herramientas matemáticas que permiten especificar estas coordenadas, consideraremos que las piezas se pueden modelar como cuerpos rígidos, a los que se les puede asociar un sistema de referencia para conocer su posición y orientación.

Posición y Orientación en el espacio: cómo se define un punto en el espacio cartesiano 3D

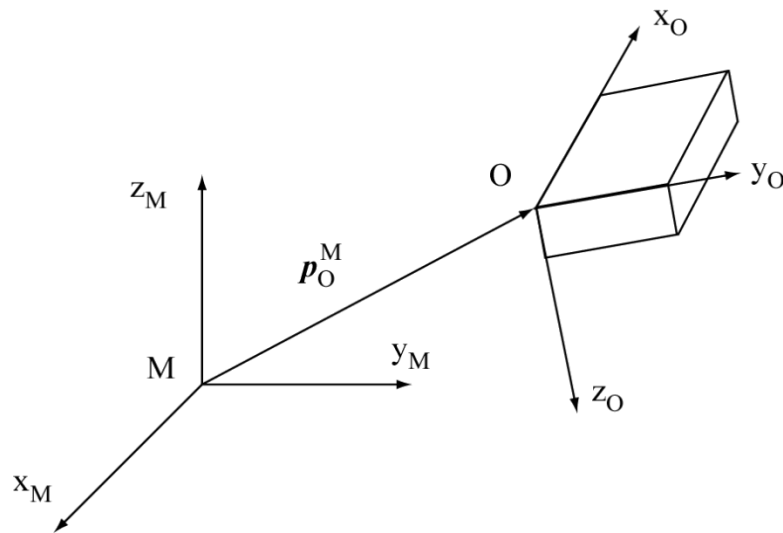


Vector p componentes

Punto P diferencias

Generalmente cuando hablamos del espacio tridimensional un punto P define una posición, mientras un vector p indica un desplazamiento

Posición y Orientación en el espacio: definir un objeto en el espacio 3D, posición y orientación del objeto

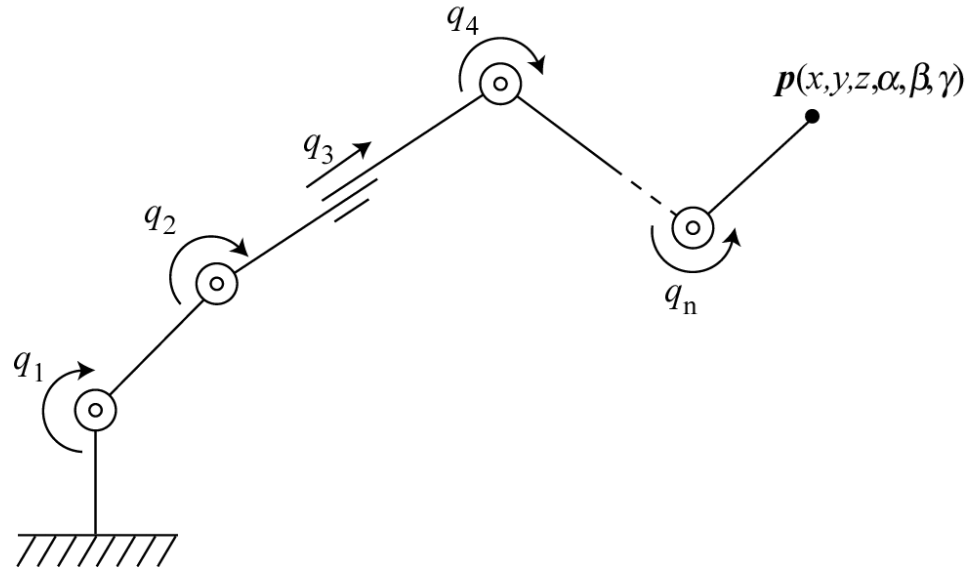


Traslación X, Y y Z {M}

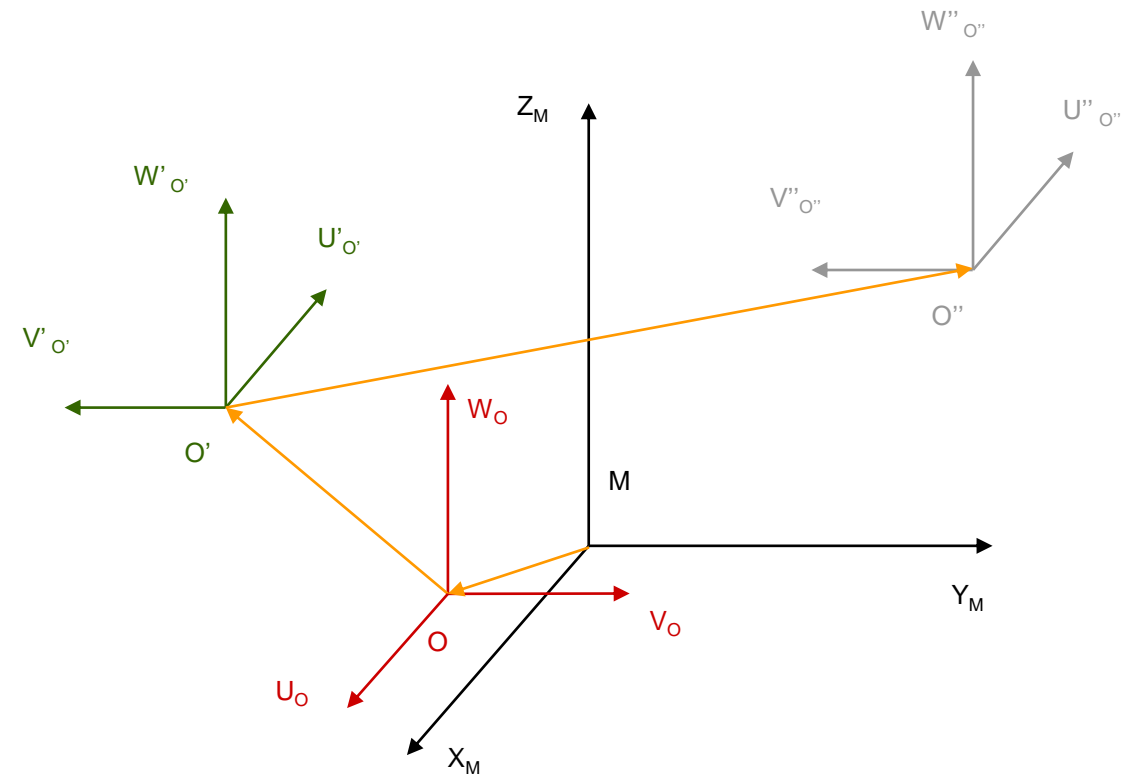
Rotación X, Y y Z {M}

Traslación X, Y y Z {M} indica la posición del objeto respecto de el sistema de coordenadas M, y la orientación se indica mediante el sistema de coordenadas propio de objeto y como este se encuentra rotado respecto en este caso al sistema {M}

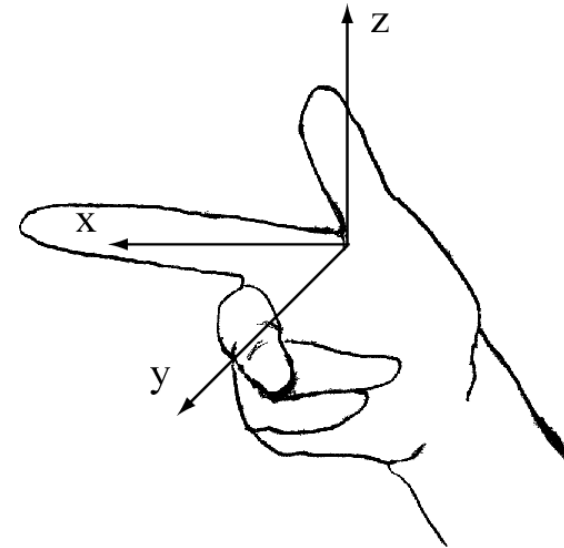
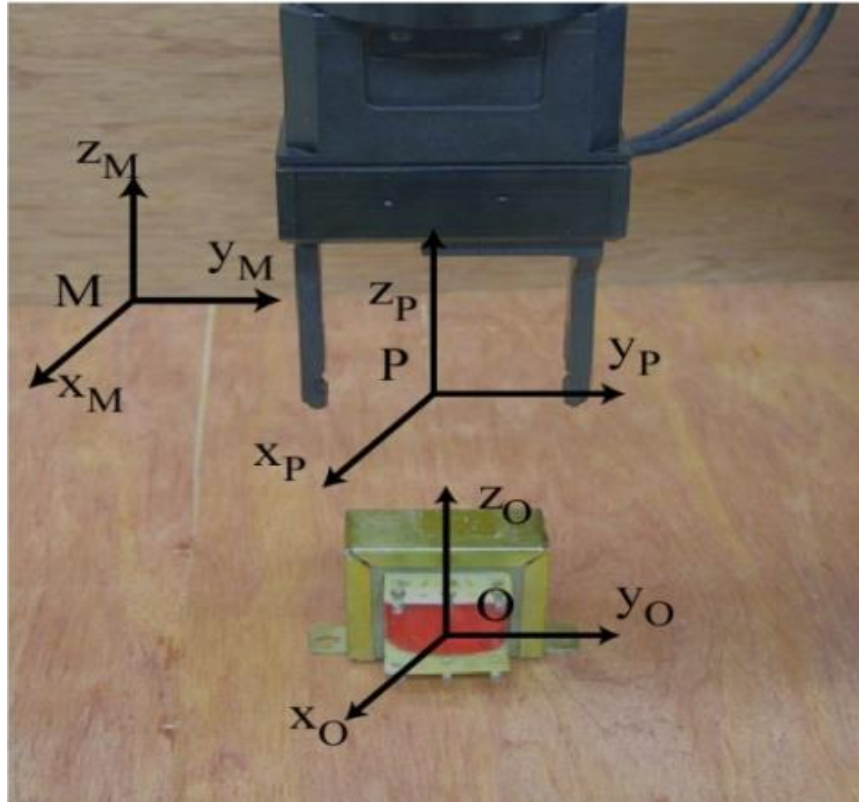
Posición y Orientación en el espacio: extremo operativo en el espacio tridimensional respecto base del robot



Posiciones en 3D y posiciones relativas



- Entonces consideraremos que las piezas se pueden modelar como cuerpos rígidos, con lo que se les puede asociar un sistema de referencia para conocer su posición y orientación.
- Se utilizarán sistemas de referencia dextrógiros asociados a cada cuerpo rígido.
- Regla de la mano derecha.



Fundamentos matemáticos: descripción de la orientación

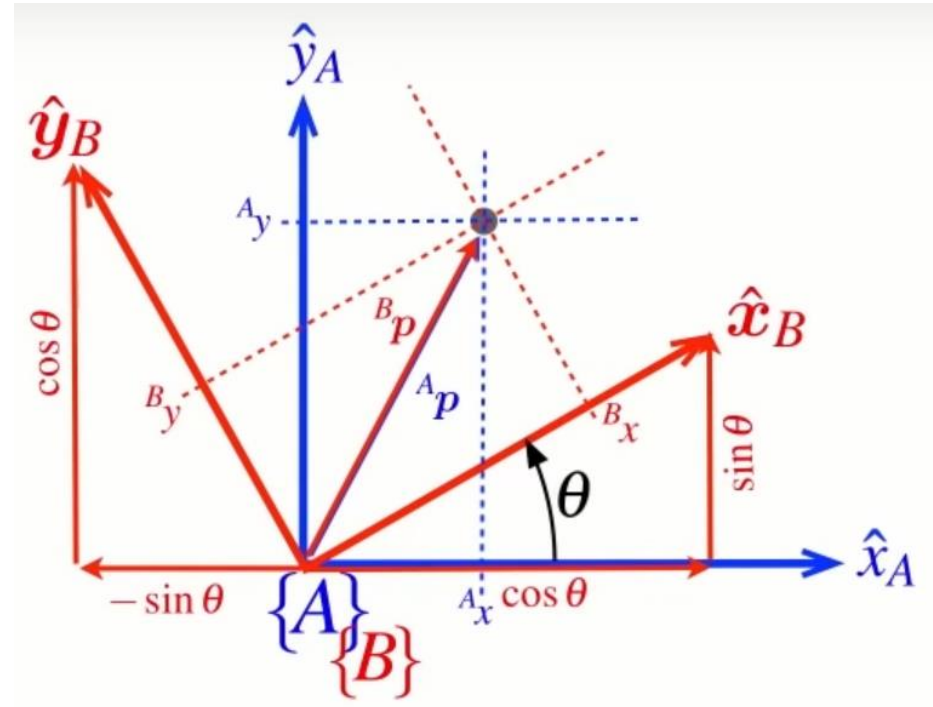
Matrices de rotación.

$${}^A\mathbf{p} = A_x \hat{\mathbf{x}}_A + A_y \hat{\mathbf{y}}_A$$

$${}^B\mathbf{p} = B_x \hat{\mathbf{x}}_B + B_y \hat{\mathbf{y}}_B$$

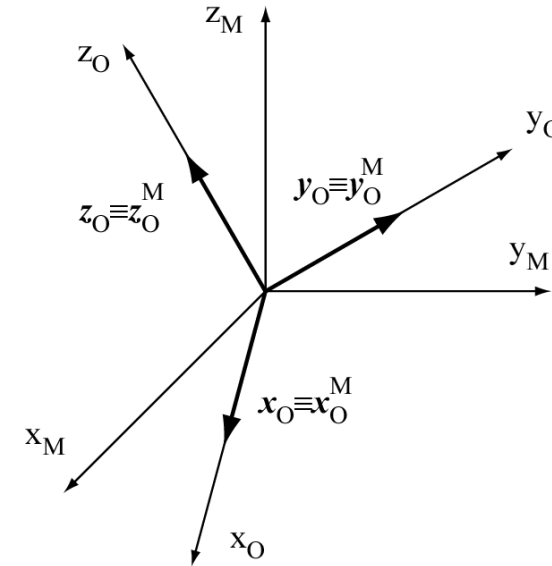
$$\hat{\mathbf{x}}_B = \cos \theta \hat{\mathbf{x}}_A + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}_A$$

$$\hat{\mathbf{y}}_B = -\sin \theta \hat{\mathbf{x}}_A + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}_A$$



Matriz de rotación: los 9 elementos representan las proyecciones de los vectores unitarios $\mathbf{x}_O, \mathbf{y}_O, \mathbf{z}_O$ sobre los ejes del sistema M, pudiéndose expresar por lo tanto como el producto escalar entre ellos y los vectores unitarios $\mathbf{x}_M, \mathbf{y}_M, \mathbf{z}_M$

$${}^M \mathbf{Rot}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_O^M & \mathbf{y}_O^M & \mathbf{z}_O^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{x_O^M} & \mathbf{X}_{y_O^M} & \mathbf{X}_{z_O^M} \\ \mathbf{y}_{x_O^M} & \mathbf{y}_{y_O^M} & \mathbf{y}_{z_O^M} \\ \mathbf{z}_{x_O^M} & \mathbf{z}_{y_O^M} & \mathbf{z}_{z_O^M} \end{bmatrix}$$

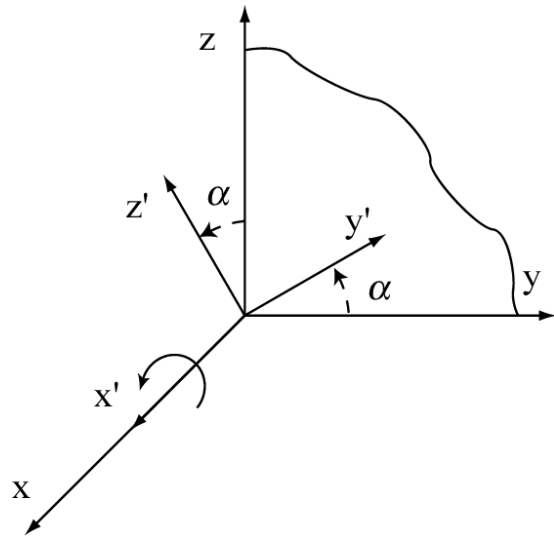


Propiedades

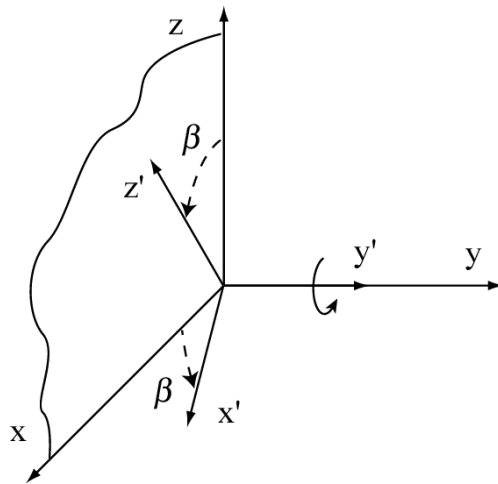
$$\left({}^M \mathbf{Rot}_O\right)^T = \left({}^M \mathbf{Rot}_O\right)^{-1} = \left({}^O \mathbf{Rot}_M\right)$$

$${}^M \mathbf{Rot}_O \times {}^O \mathbf{Rot}_M = I$$

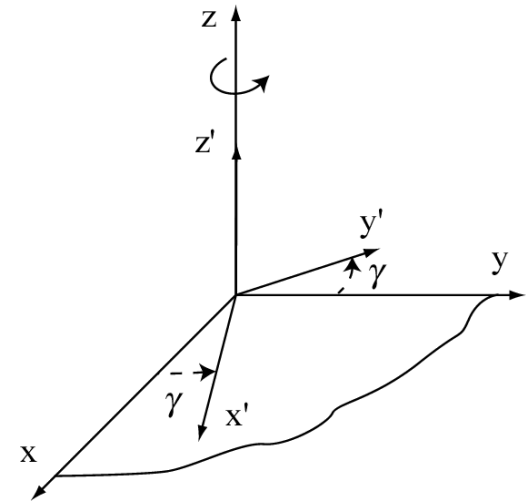
$$\det(\mathbf{Rot}) = \pm 1$$



$$\mathbf{Rot}(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

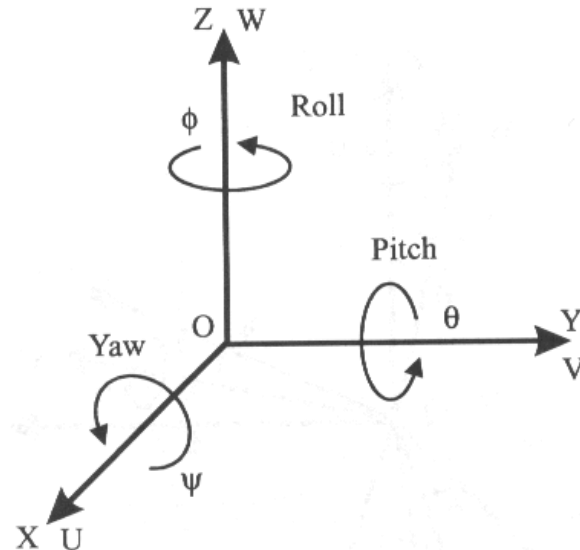
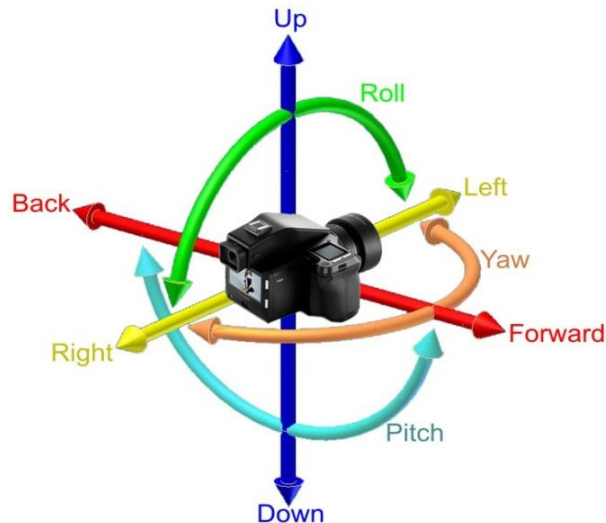


$$\mathbf{Rot}(y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

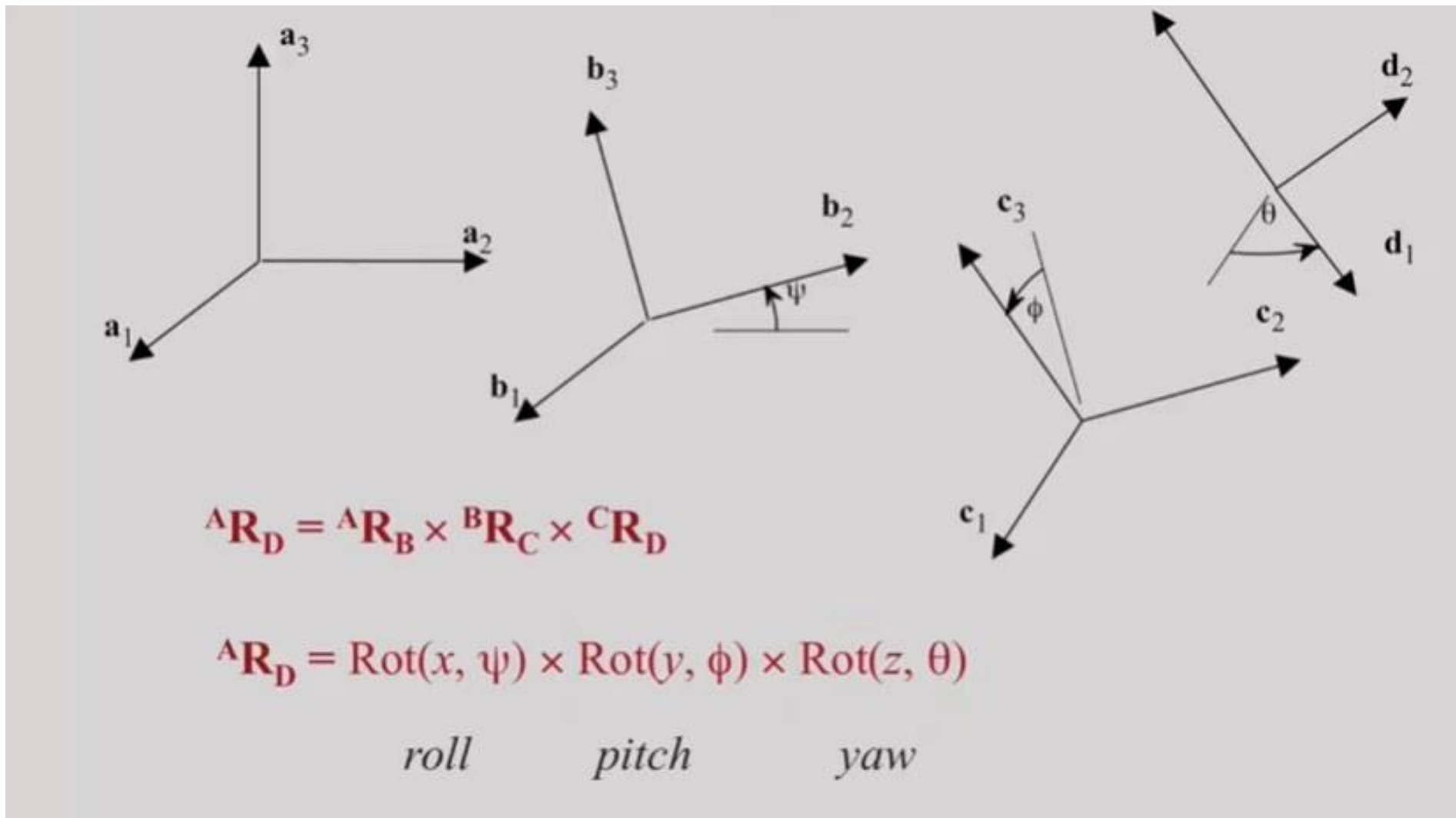


$$\mathbf{Rot}(z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Roll, pitch, yaw: ángulos respecto del sistema fijo XYZ. Estando OXYZ y OUVW inicialmente coincidentes se puede colocar OUVW en cualquier orientación siguiendo:
 - Girar el sistema OUVW un ángulo Ψ con respecto al eje OX. Es el denominado Yaw o guiñada
 - Girar el sistema OUVW un ángulo θ con respecto al eje OY. Es el denominado Pitch o cabeceo.
 - . Girar el sistema OUVW un ángulo Φ con respecto al eje OZ. Es el denominado Roll o alabeo.



Fundamentos matemáticos: descripción de la orientación



Fundamentos matemáticos: posición y orientación

Matrices y coordenadas homogéneas:

- Matriz de transformación homogénea. Representación de la posición y orientación de forma conjunta de un sistema de coordenadas.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{x_O^M} & x_{y_O^M} & x_{z_O^M} & x_O^M \\ y_{x_O^M} & y_{y_O^M} & y_{z_O^M} & y_O^M \\ z_{x_O^M} & z_{y_O^M} & z_{z_O^M} & z_O^M \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Propiedades:

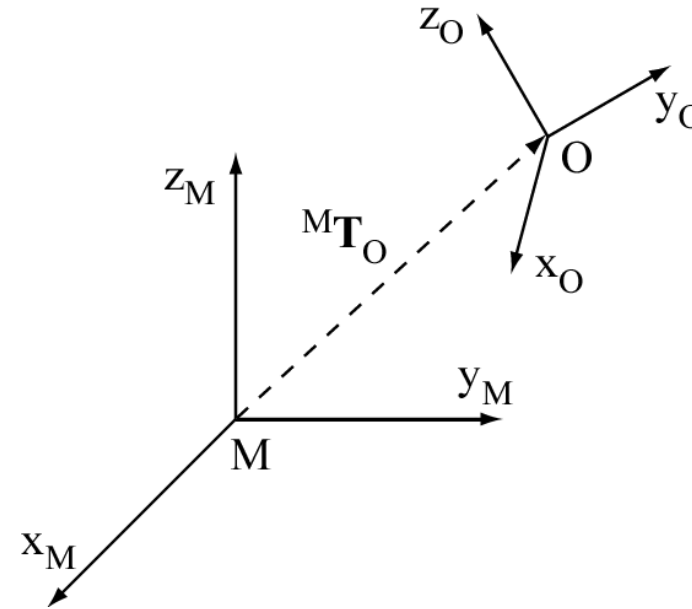
$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{Rotación}^T & -\text{Rotación}^T \cdot \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentos matemáticos: descripción de la orientación

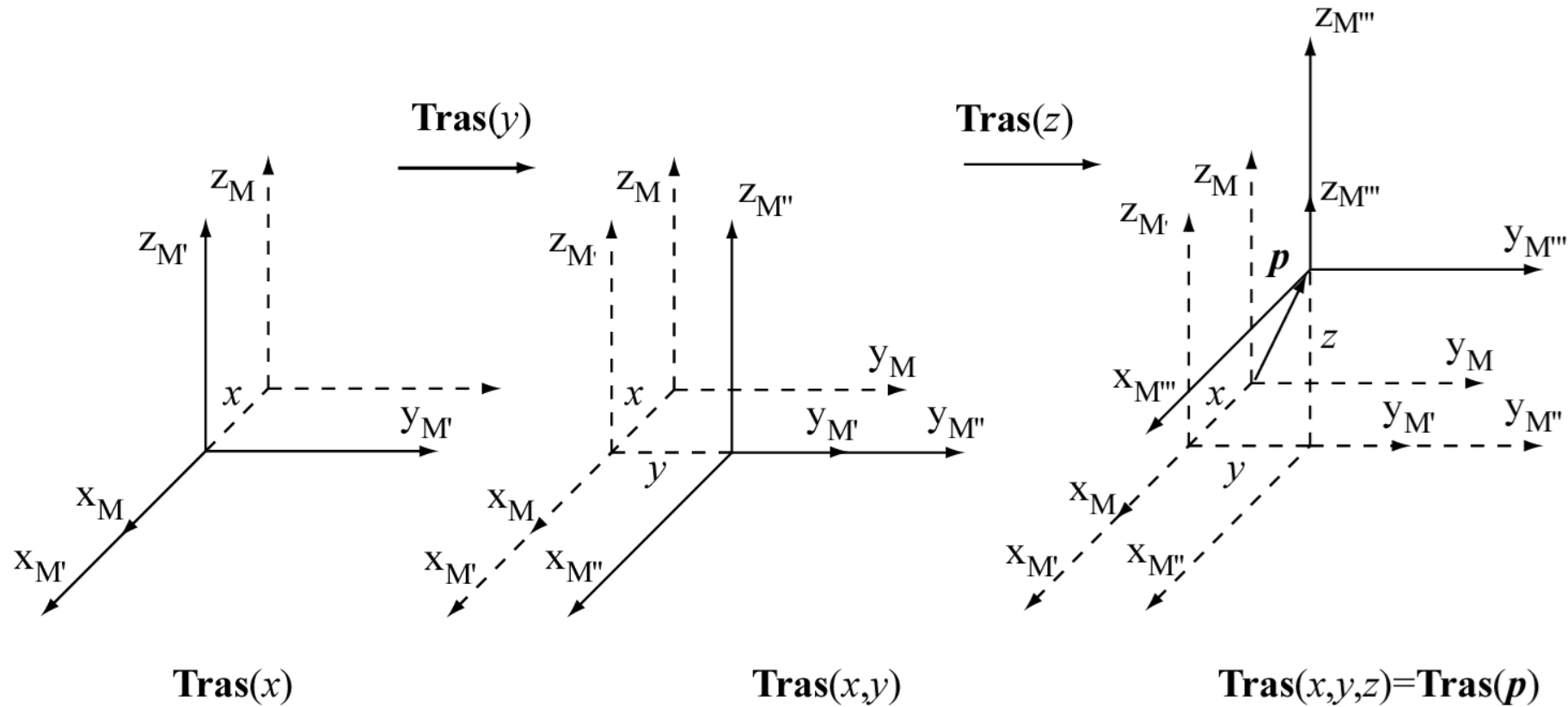
Las matrices homogéneas pueden emplearse para:

- Para representar la posición y orientación de un sistema $O'UVW$ resultado de rotar y trasladar el sistema $OXYZ$ según una matriz de traslación y rotación dadas.

$${}^M\mathbf{T}_O = \begin{bmatrix} {}^M\mathbf{Rot}_O & {}^M\mathbf{Tras}_O \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

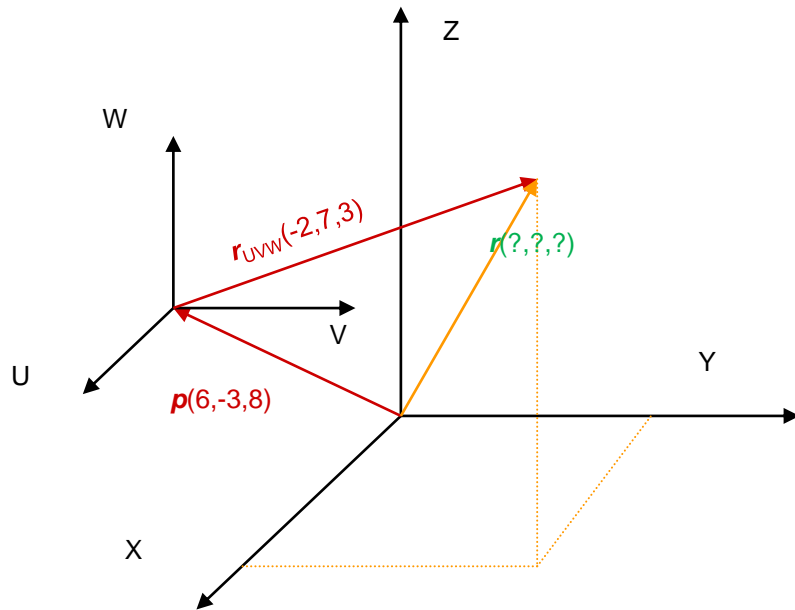


Fundamentos matemáticos: transformaciones básicas



$$\mathbf{Tras}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x'} \\ p_{y'} \\ p_{z'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x'} + x \\ p_{y'} + y \\ p_{z'} + z \\ 1 \end{bmatrix}$$

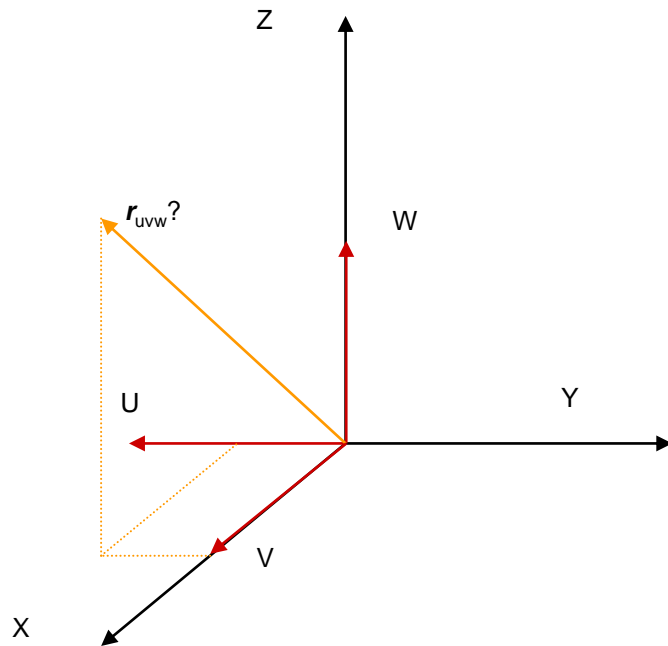
Ejemplo. El sistema $O'UVW$ se encuentra trasladado un vector $\mathbf{p}(6,-3,8)$ con respecto al sistema $OXYZ$. Calcular las coordenadas (r_x, r_y, r_z) del vector \mathbf{r} cuyas coordenadas con respecto al sistema $O'UVW$ son $\mathbf{r}_{UVW}(-2,7,3)$.



$$\mathbf{Tras}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo. El sistema OUVW se encuentra girado -90° alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector \mathbf{r}_{xyz} si sus coordenadas en el sistema OUVW son $\mathbf{r}_{uvw}=(4,8,12)$.



$$\mathbf{Rot}(z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\text{sen}\gamma & 0 & 0 \\ \text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_x \\ \mathbf{r}_y \\ \mathbf{r}_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentos matemáticos: descripción de la orientación

- Tener cuidado las operaciones matriciales no son conmutativas, no es lo mismo rotar y trasladar, que trasladar y luego rotar.
- Y siempre es importante tener en cuenta respecto de que sistemas me estoy moviendo, trasladando o girando.
- Generalmente en robótica referimos sistemas de coordenadas de referencias móviles a un sistema de referencia fijo.

Muchas Gracias por su atención.

¿Preguntas?