ROBOTICA I

UNIDAD III: Cinemática

Cinemática Inversa

Prof: Carolina Díaz

JTP: Eric Sanchez

Contenido UNIDAD 3

- Introducción repaso fundamentos matemáticos.
- Modelo cinemático directo Denavit Hartenberg .
- Modelo cinamático inverso.
- Cinemática del movimiento. Jacobiano. Singularidades.

Cinemática inversa

Cinemática estudia la posición del robot sin tener en cuenta las fuerzas y pares que causan el movimiento.

Encontrar la localización del extremo del robot teniendo en cuenta en la posición de las articulaciones

ESPACIO ARTICULAR

Coordenada Articulares

$$\boldsymbol{q = (q_1, q_2, \ldots q_n)}$$

$$p = F(q)$$

CINEMATICA DIRECTA

CINEMATICA INVERSA

$$q = F^{-1}(p)$$

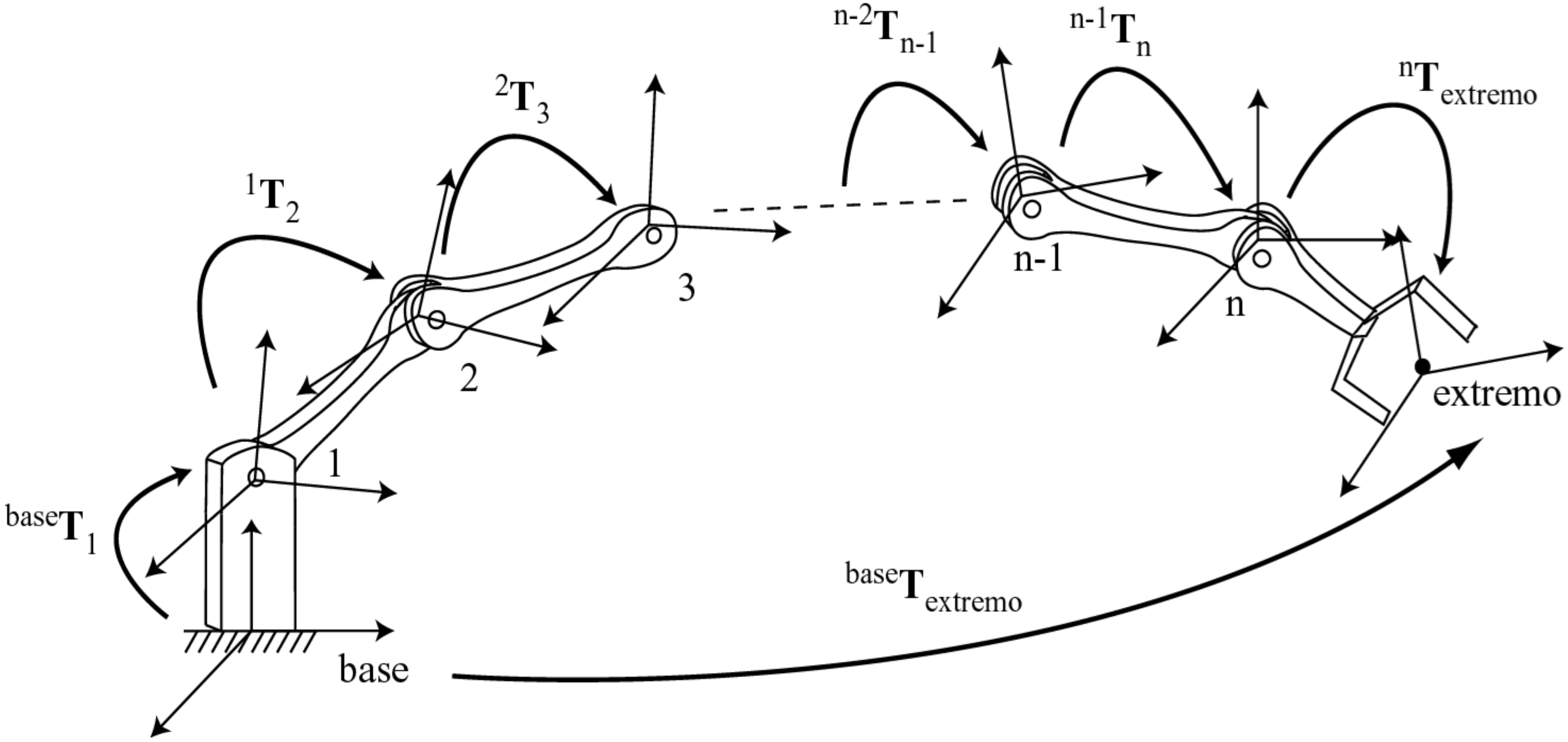
ESPACIO CARTESIANO

Coordenadas del extremo operativo

$$\boldsymbol{p = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)}$$

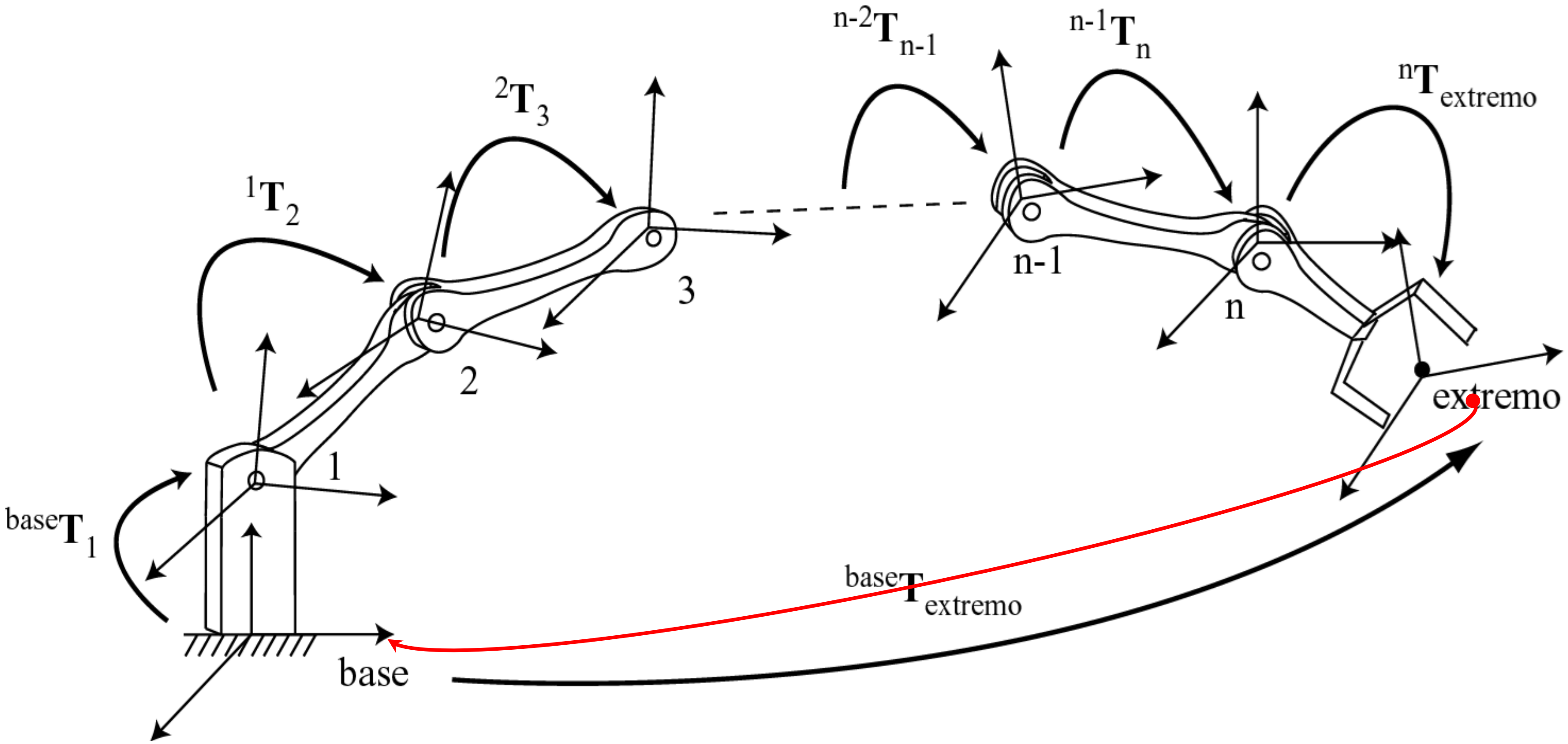
Encontrar la posición de las articulaciones del robot teniendo en cuenta la localización del extremo

Mediante transformaciones homogéneas y usando DH resolvemos CD



$$^{base}T_{extremo} = {}^{base}T_1 \cdot {}^{1}T_2 \cdot {}^{2}T_3 \ldots\ldots {}^{n-1}T_n \, {}^{n}T_{extremo}$$

Matriz de transformación homogénea.



$$q_k = f\left({}^{base}T_{extremo}\right) \;, \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

Cinemática inversa

- Conociendo la posición y orientación del extremo operativo se busca obtener el valor de cada una de variables articulares, que llevaron al extremo a esa posición final.

- Este problema como es de esperar puede tener una única solución, más de una o no estar garantizada la solución.

- Problemas del planteo del problema de la cinemática inversa:

  - Multiplicidad de Soluciones:

    Una, ninguna, múltiples, infinitas

  - Multiplicidad de Formulaciones:

    Según el método planteado

Multiplicidad de formulaciones:

- Soluciones cerradas:
  - Solución Algebraica.
  - Solución Geométrica.
  - Solución mediante método de Pieper.

- Soluciones abiertas:
  - Soluciones Numéricas.

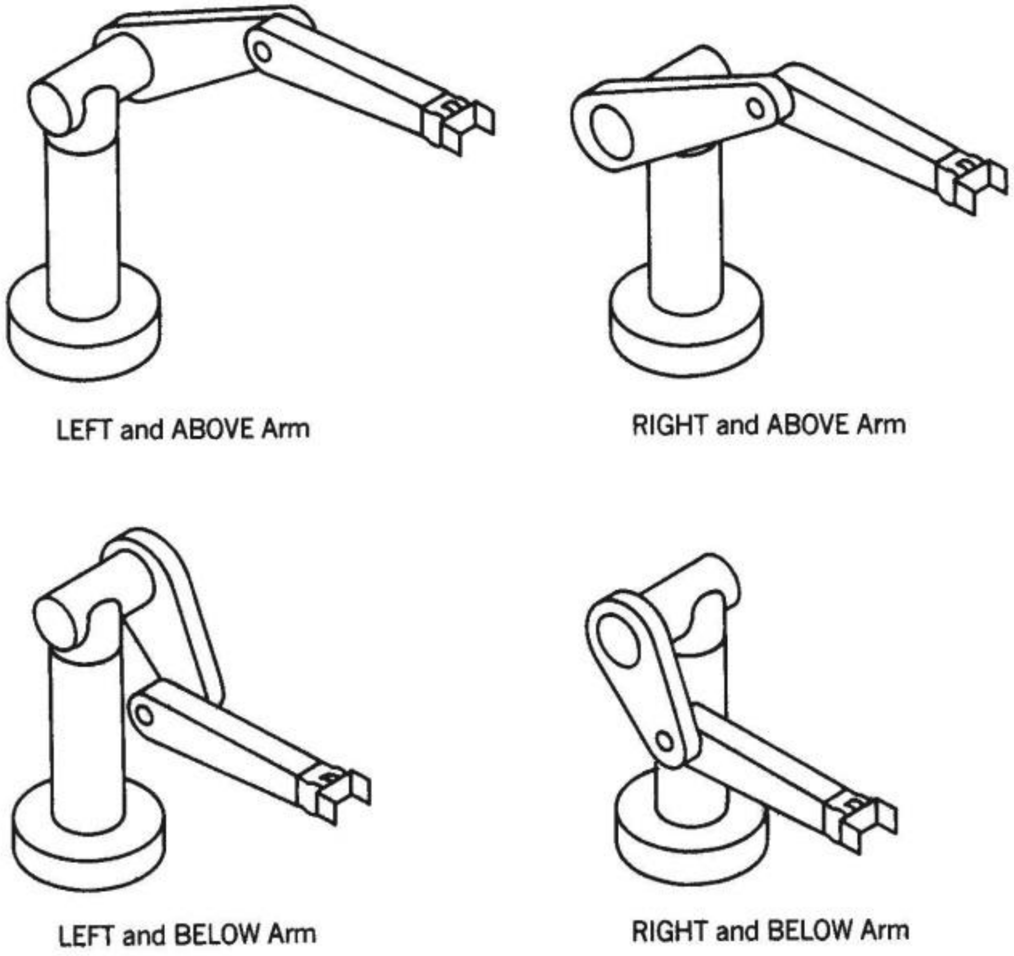
Multiplicidad de soluciones:

- Depende de:
  - Estructura del robot.
  - Formulación adoptada.
  - Espacio de trabajo
  - Límites articulares.

- Posibilidades:
  - Ninguna (fuera del espacio de trabajo, orientación imposible, etc.).
  - Única (normalmente el caso buscado).
  - Múltiple (el caso más común).
  - Infinitas (siempre en robots redundantes).

Multiplicidad de soluciones:

- Estructura o configuración del robot, ejemplo:



©(Spong 2005)

Cinemática inversa: Métodos de solución

- No hay un método sistemático para encontrar las soluciones en robots tipo serie, por lo tanto depende de cada caso y tipo de robot.
- Soluciones numéricas iterativas (normalmente dan una única solución a partir de una estimación inicial).

Cinemática inversa: **Solución Algebraica**

Partiendo de la matriz de transformación homogénea:

Matriz de Rot. Vector Pos.

$$ {}^{0}T_{extremo} = \begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} & x^0_{extremo} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} & y^0_{extremo} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} & z^0_{extremo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Vector de Perspectiva Escalado

$$ \boldsymbol{q_k = f\left({}^{0}T_{extremo} \right)\ ,} $$
$$ \boldsymbol{k = 1, 2, \dots, n} $$

Cinemática inversa: **Solución Algebraica**

$$q_k = f\left({}^0T_{extremo}\right)\ , \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

$$q_6 = f\left({}^0T_6\right) \ \rightarrow 12\ ec.\ y\ 6\ incognitas$$

$$\rightarrow 3\ ec.\ son\ independientes\ de\ la\ matriz\ de\ Rot.$$

$$+\,3\ ec.\ del\ vector\ de\ posición \ \Rightarrow \boxed{6\ ec.\ con\ 6\ incognitas}$$

NO LINEALES y TRASCENDENTALES

Una igualdad entre dos expresiones matemáticas en las que aparecen una o más incógnitas relacionadas mediante operaciones matemáticas, que no son únicamente algebraicas y cuya solución no puede obtenerse empleando solo las herramientas propias del algebra.

Cinemática inversa: **Solución Algebraica**

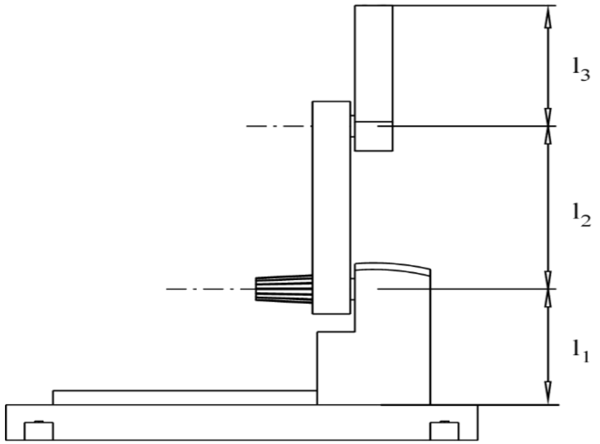
- Obtener **n** ecuaciones cerradas a partir del conocimiento del modelo cinemático directo:

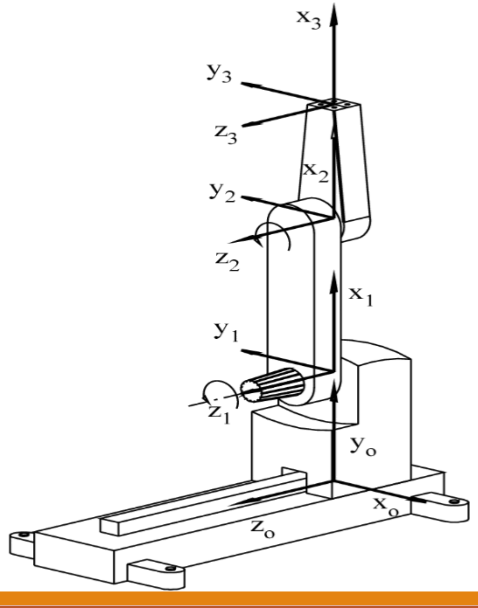
$$ {}^{0}T_{n} = {}^{0}T_{1}\ {}^{1}T_{2} \ldots {}^{n-1}T_{n}\ , \qquad con:\ {}^{i-1}T_{i} = f(q_{i}) $$

$$ \underbrace{\left({}^{0}T_{1}\right)^{-1} . \ {}^{0}T_{n}}_{Igualar\ al\ elemento\ buscado} = \underbrace{{}^{1}T_{2} \ldots {}^{n-1}T_{n}}_{Buscar\ 1\ elemento\ constante} $$

- Ejemplo:

	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
1	90º	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0





Cinemática inversa: **Solución Algebraica**

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_{3} = {}^{0}\boldsymbol{T}_{1}\ {}^{1}\boldsymbol{T}_{2}\ {}^{2}\boldsymbol{T}_{3} $$

	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
1	*90º*	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

$$ {}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} c(q_2) & -s(q_2) & 0 & l_2 c(q_2) \\ s(q_2) & c(q_2) & 0 & l_2 s(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} c(q_3) & -s(q_3) & 0 & l_3 c(q_3) \\ s(q_3) & c(q_3) & 0 & l_3 s(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \left({}^{0}\boldsymbol{T}_{1}\right)^{-1}\ {}^{0}\boldsymbol{T}_{3} = {}^{1}\boldsymbol{T}_{2}\ {}^{2}\boldsymbol{T}_{3} $$

- Se deben realizar los productos y obtener 12 ecuaciones.
- El lado izquierdo solo depende de q_1.
- De las 12 ecuaciones posibles resulta que solo una depende de q_1:

$$ q_1 = z^{0}_{extremo} $$

Cinemática inversa: **Solución Algebraica**

$$\left({}^{1}\boldsymbol{T}_{2} \right)^{-1} \left({}^{0}\boldsymbol{T}_{1} \right)^{-1} \, {}^{0}\boldsymbol{T}_{3} = \, {}^{2}\boldsymbol{T}_{3}$$

- Se deben realizar los productos y obtener 12 ecuaciones.
- Se conoce q_1, el lado izquierdo solo depende de q_2.
- De las 12 ecuaciones posibles no se puede despejar ni q_2 ni q_3, pero con las ecuaciones resultantes se puede obtener un sistema de 2 ecuaciones trigonométricas que al elevarlas al cuadrado y sumarlas permiten despejar q_3:

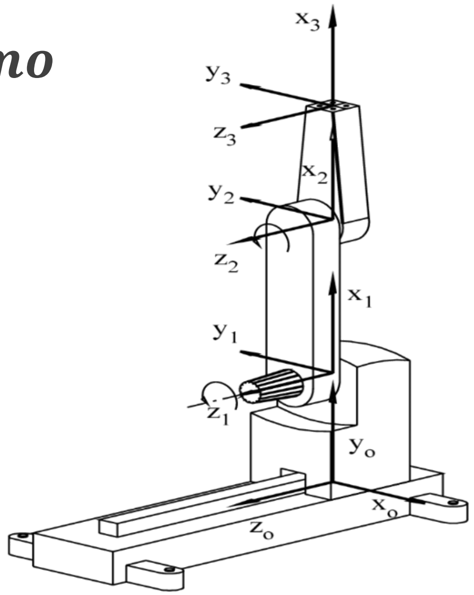
$$q_3 = \operatorname{acos}\left(\frac{{x_{extremo}^{0}}^{2} + (y_{extremo}^{0} - l_1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3} \right)$$

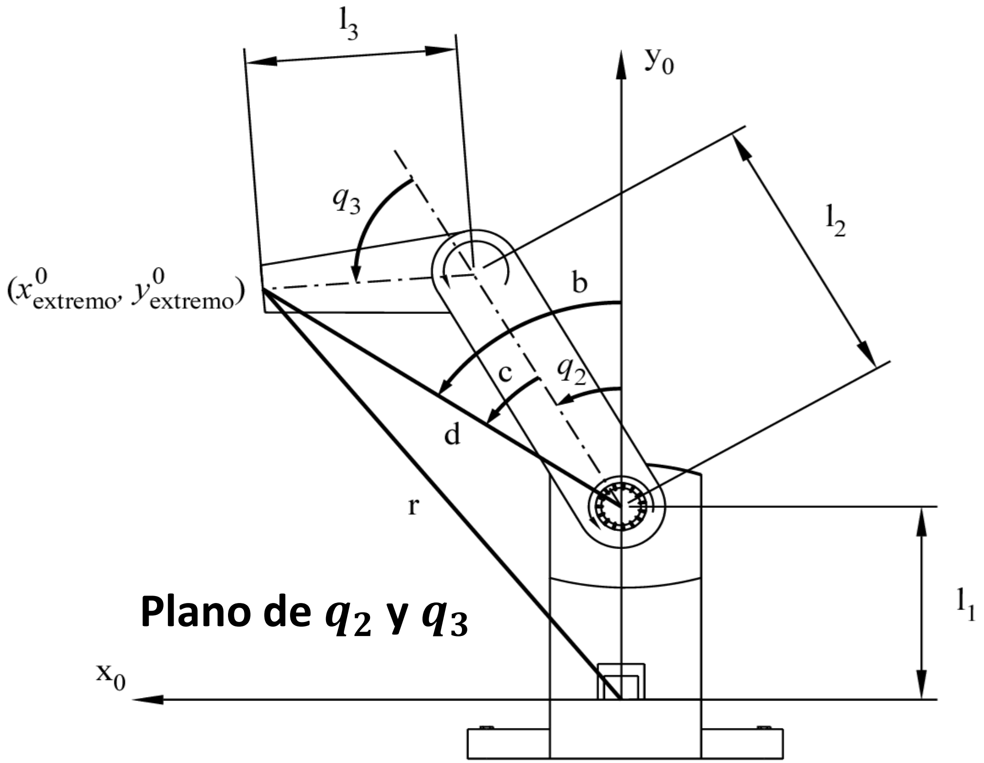
- Conocida q_3 se puede despejar q_2 del mismo sistema:

$$q_2 = \operatorname{acos}\left(\frac{(l_2 + l_3 \cos(q_3))(y_{extremo}^{0} - l_1) - x_{extremo}^{0} l_3 \sin(q_3)}{{x_{extremo}^{0}}^{2} + (y_{extremo}^{0} - l_1)^2} \right)$$

Cinemática inversa: **Solución Geométrica**

$$\boldsymbol{q_1 = z^0_{extremo}}$$

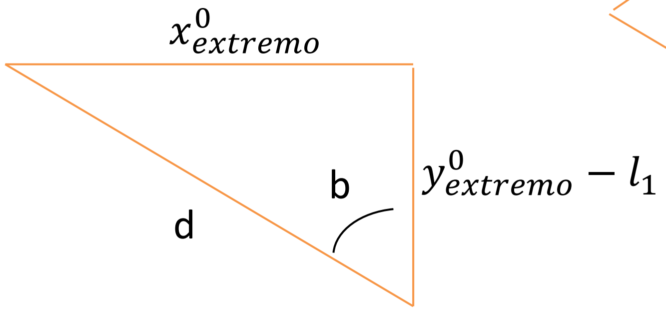


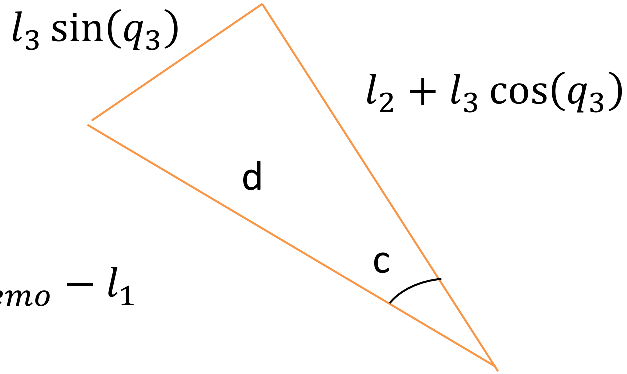


$$\boldsymbol{q_2 = b - c}$$

$$b = \operatorname{atan}\left(\frac{x^0_{extremo}}{y^0_{extremo} - l_1}\right)$$

$$c = \operatorname{atan}\left(\frac{l_3 \sin(q_3)}{l_2 + l_3 \cos(q_3)}\right)$$

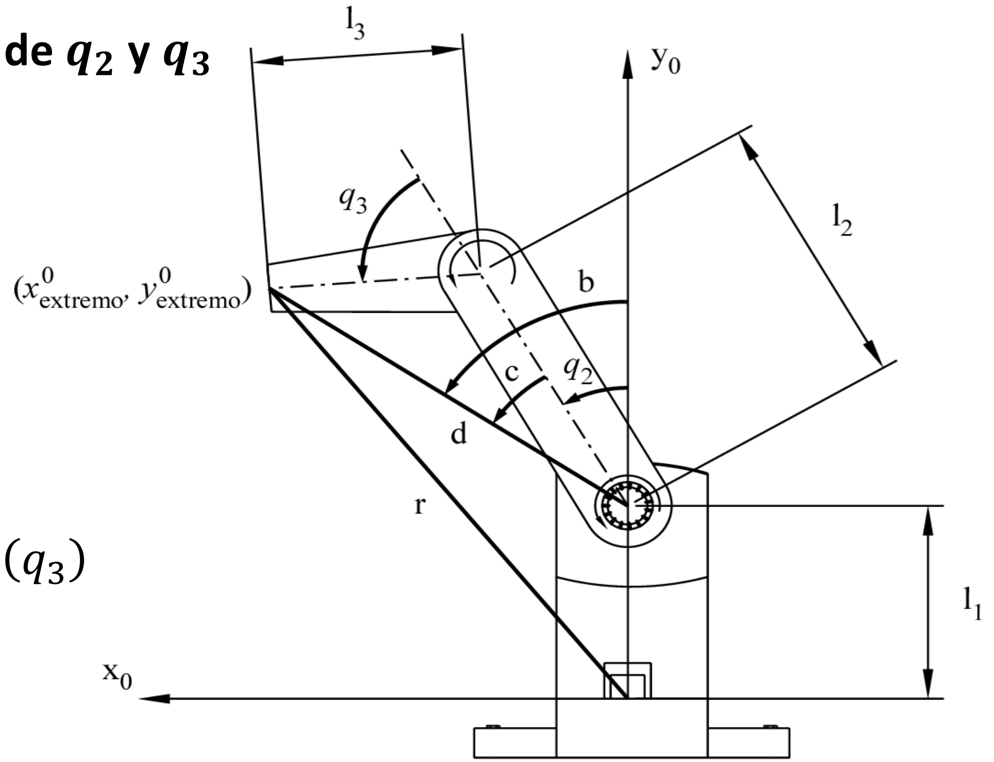




Cinemática inversa: **Solución Geométrica**

- $\boldsymbol{q_3}$:

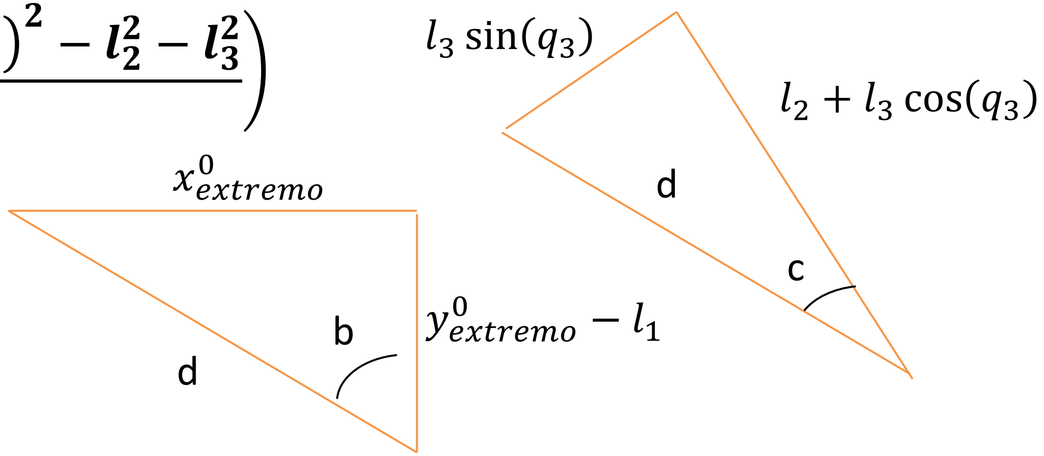
Plano de $\boldsymbol{q_2}$ y $\boldsymbol{q_3}$



$$d^2 = {x^0_{extremo}}^2 + (y^0_{extremo} - l_1)^2$$
$$d^2 = (l_2 + l_3\cos(q_3))^2 + (l_3\sin(q_3))^2$$

$$d^2 = d^2$$
$$
\begin{aligned}
{x^0_{extremo}}^2 + (y^0_{extremo} - l_1)^2 &= \\
l_2^2 + l_3^2\cos^2(q_3) + 2l_2l_3\cos(q_3) + l_3^2\sin^2(q_3) \\
&= l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3\cos(q_3)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{q_3 = \mathrm{acos}\left(\frac{{x^0_{extremo}}^2 + \left(y^0_{extremo} - l_1\right)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right)}$$



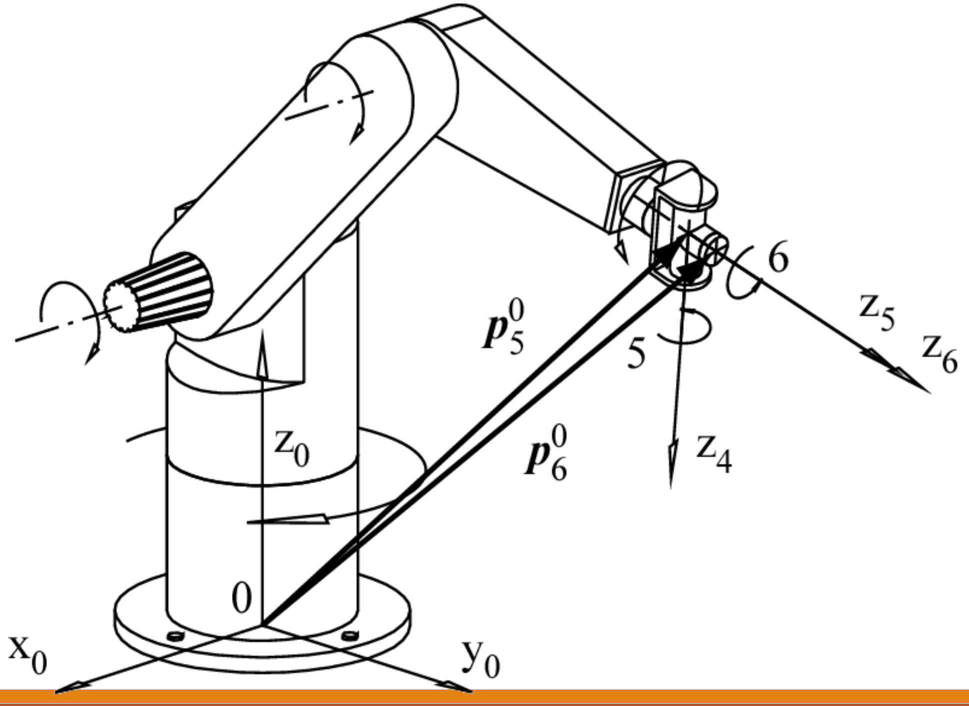
Cinemática inversa: **Solución mediante Pieper**

Método aplicable en robots con “muñeca” (cruce de 3 ejes de rotación), de 6gdl.

Se realiza un desacople cinemático entre el brazo y la muñeca para resolver por separado ambos problemas.

Posición extremo: $\bar{p}_6^0$

Posición muñeca: $\bar{p}_5^0 = \bar{p}_6^0 - d_6 \hat{z}_6$



Problema 1:

- $(q_1, q_2, q_3) = f\left(x_5^0, y_5^0, z_5^0\right)$

Problema 2 (Pieper):

- ${}^0Rot_6 = {}^0Rot_3\ {}^3Rot_6$
- ${}^3Rot_6 = \left({}^0Rot_3\right)^T .\ {}^0Rot_6$

Cinemática inversa: **Solución Numérica Matlab**

Propuesta por Corke:

Método “**ikine**” de la clase “**SerialLink**”

- Formulación: $\bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{T})$
- Uso básico: `q = robot.ikine(T)`
- Parámetros opcionales:
  - q0: vector inicial (nulo por defecto). Define la convergencia y el resultado
  - m: máscara (1x6 de 0 y 1, ignora el gdl en 0)
  - ilimit: iteraciones límite (1000 por defecto)
  - tol: tolerancia (1e-6 por defecto)
  - alpha: ganancia (1 por defecto)
- Sensible a parámetros, no asegura convergencia.

Cinemática inversa: Resumen

Soluciones Cerradas o Analíticas:

- Geométrica.
- Algebraica (Ec.).
- Pieper (6DOF).

Soluciones Numéricas:

La CD siempre tiene solución se parte de una posición final del extremo conocida (EF).

Si conocemos la posición deseada del extremo del robot (ED)

EF→ED

Problema de Optimización

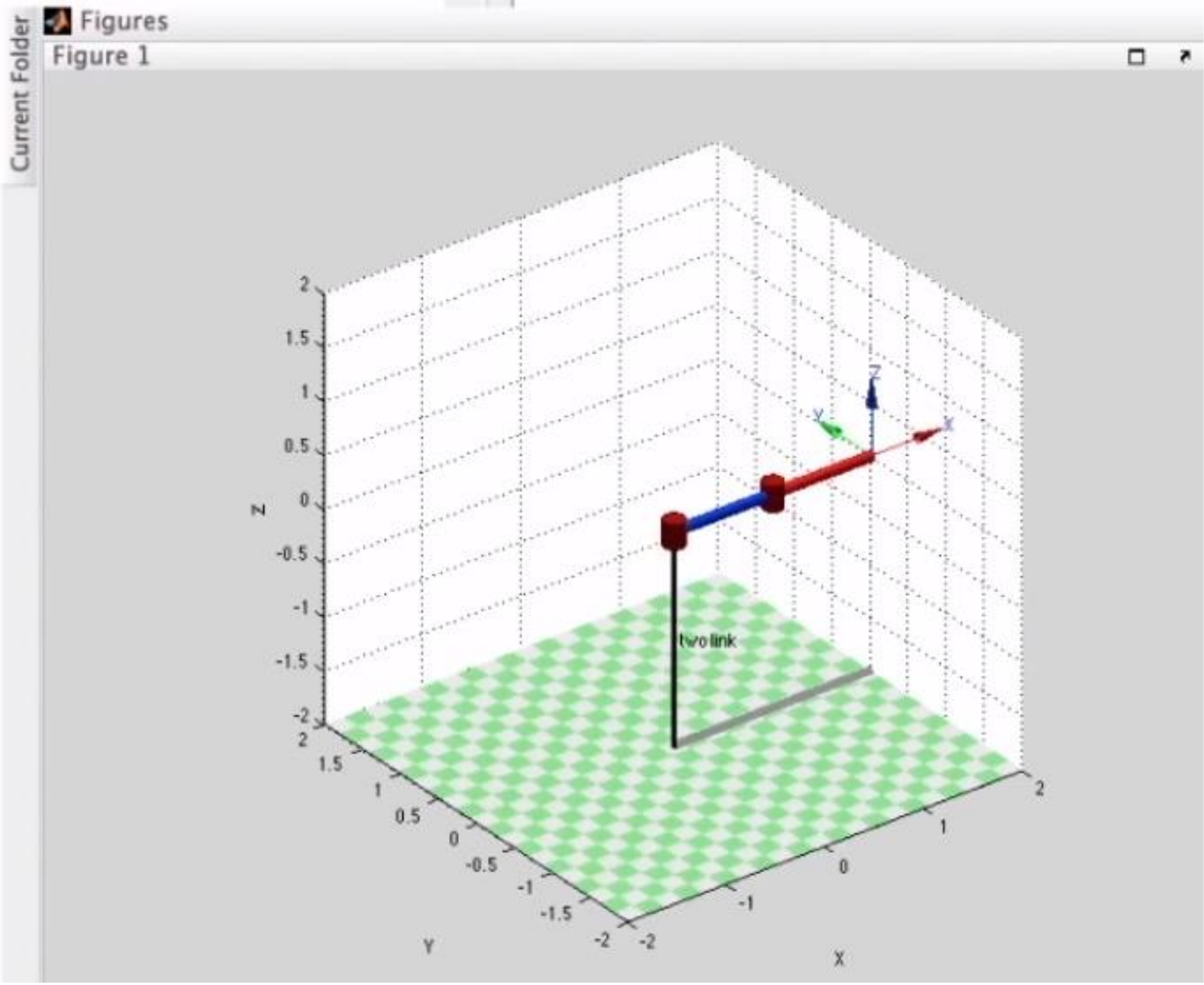
CI: **Solución Numérica Matlab – Ejemplo robot Planar RR**

Command Window

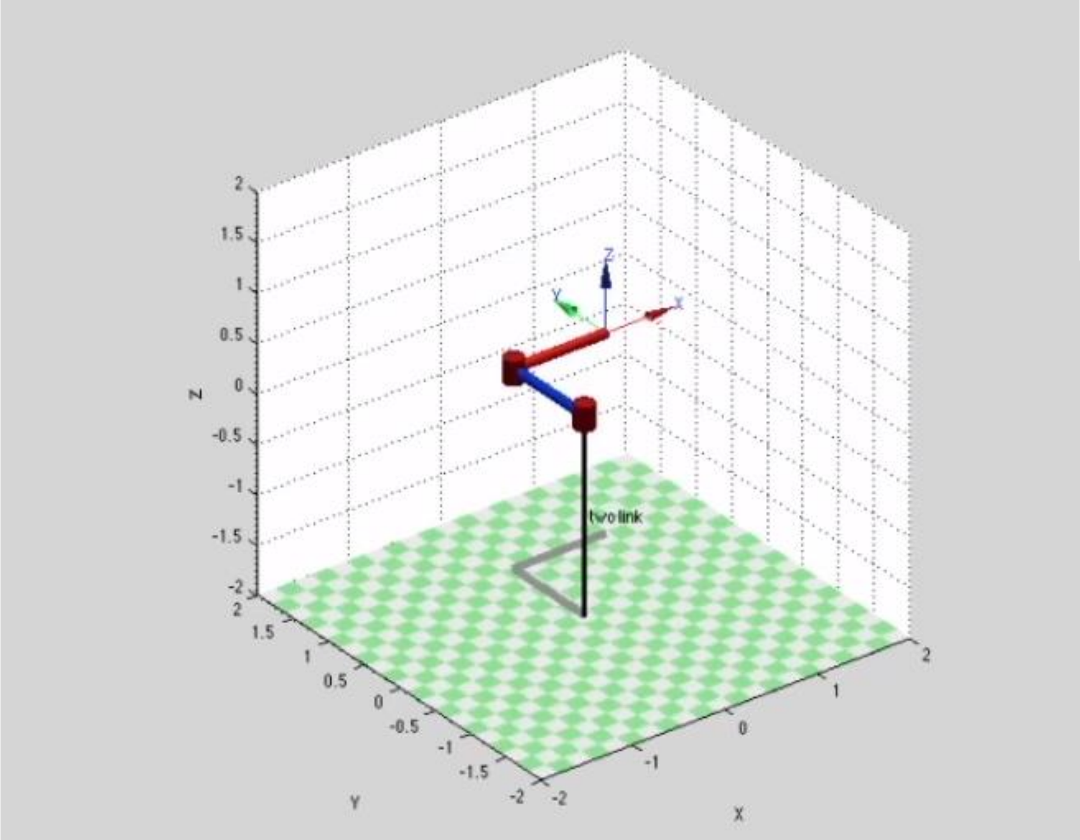
```
>> mdl_planar2
>> p2.plot(qz)
>> T = transl(1, 1, 0)

T =

     1     0     0     1
     0     1     0     1
     0     0     1     0
     0     0     0     1

>> q = p2.ikine(T, [0 0], [1 1 0 0 0 0])
```

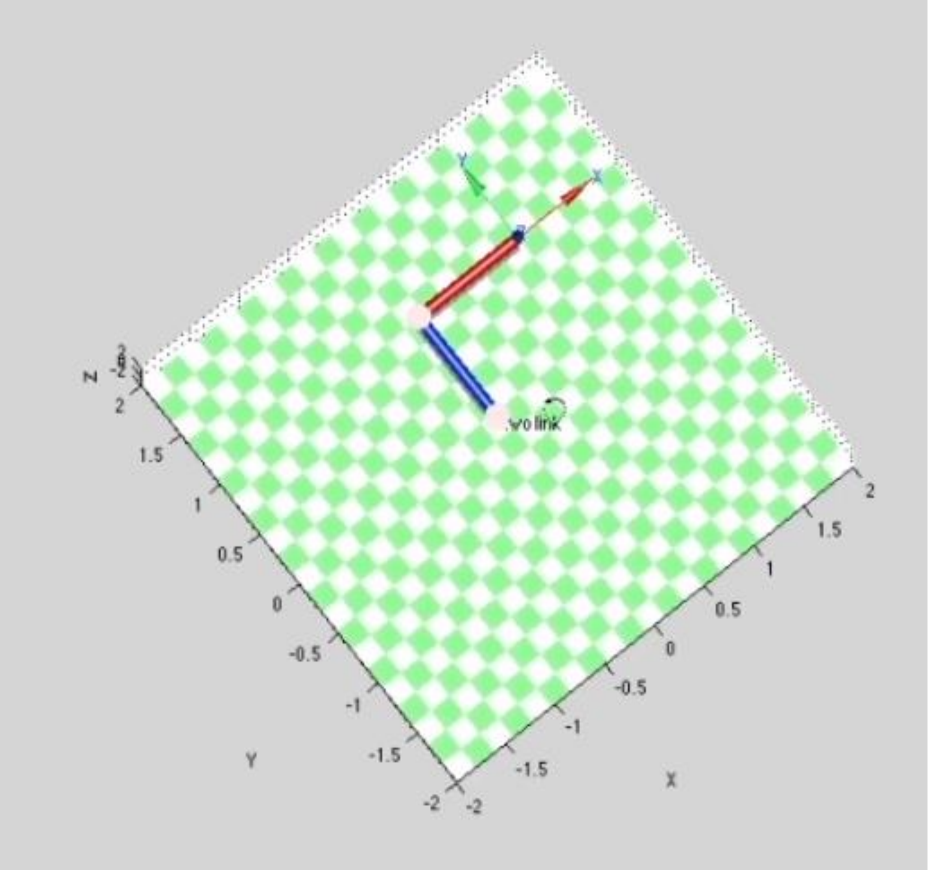
Workspace

Name ▲	Value	Class
T	<4x4 double>	double
a1	1	double
a2	1	double
p2	<1x1 SerialLink>	SerialLink
qz	[0,0]	double

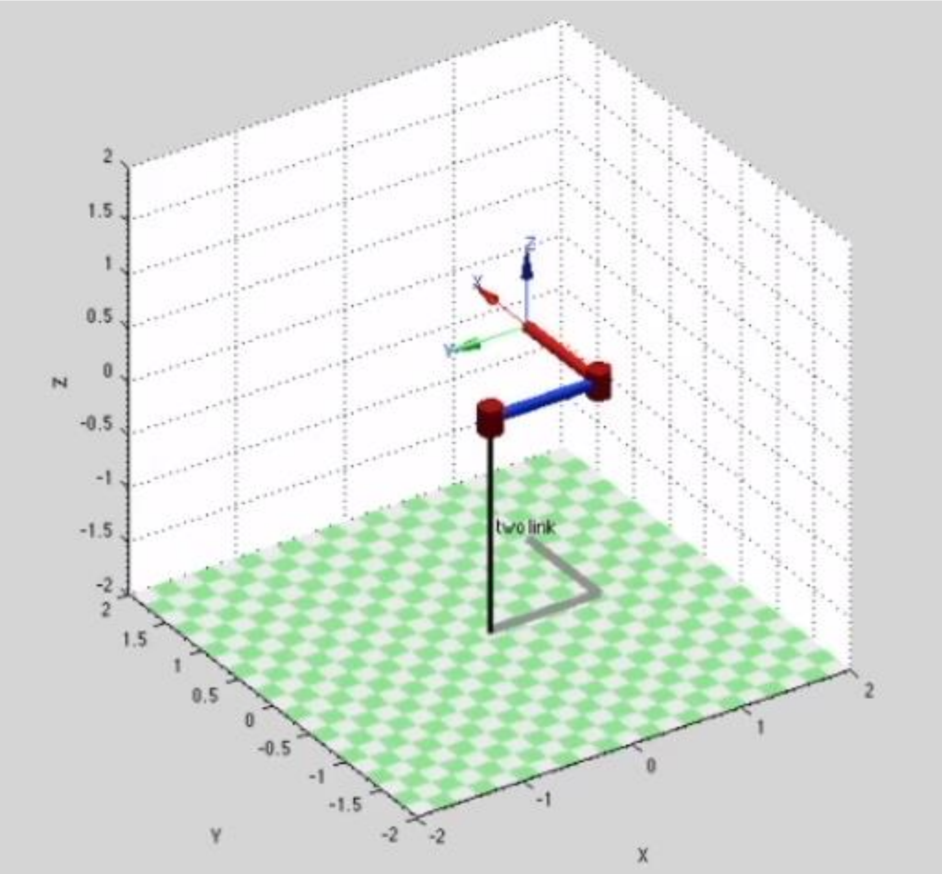

Figures
Figure 1
Current Folder
two link
X
Y
Z

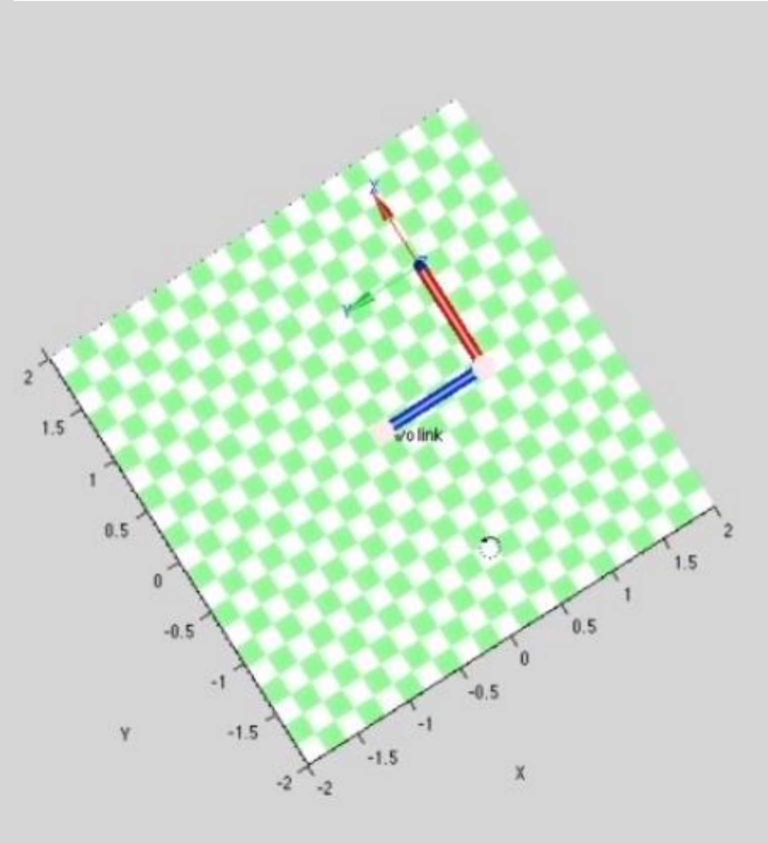
```
q =

    1.5708   -1.5708

>> p2.plot(q)
```





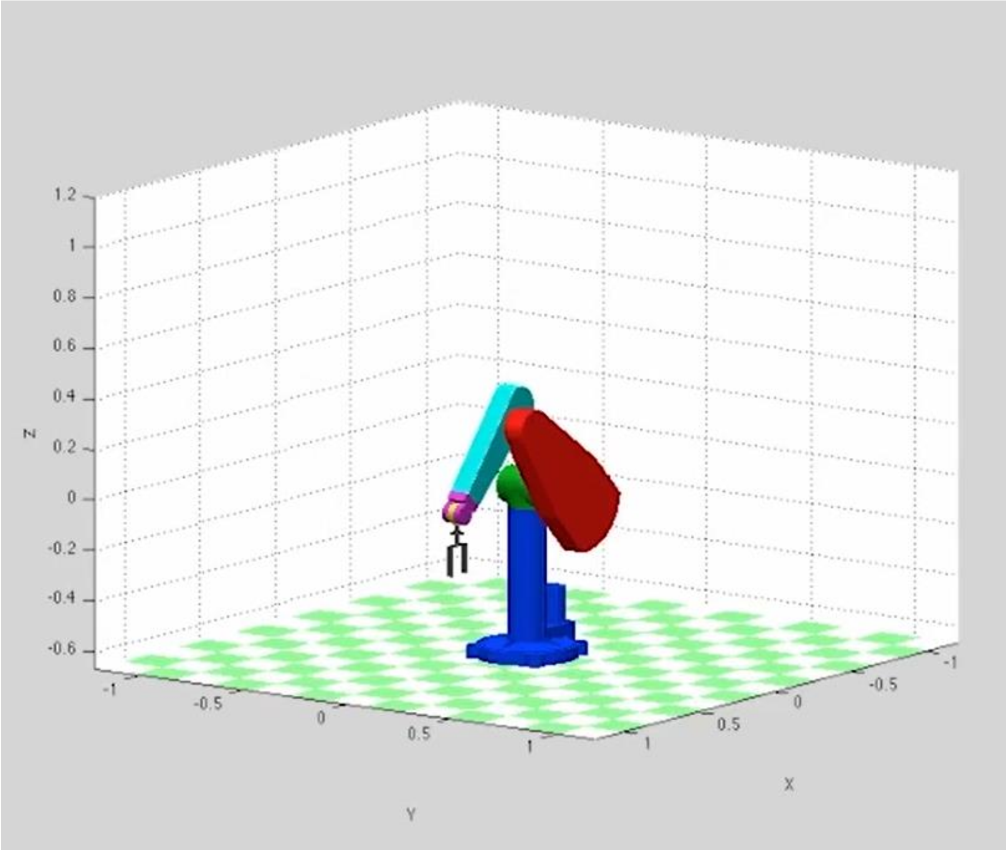
```
>> q = p2.ikine(T, [-1 -1], [1 1 0 0 0 0])

q =

   -0.0000    1.5708

>> p2.plot(q)
>> |
```



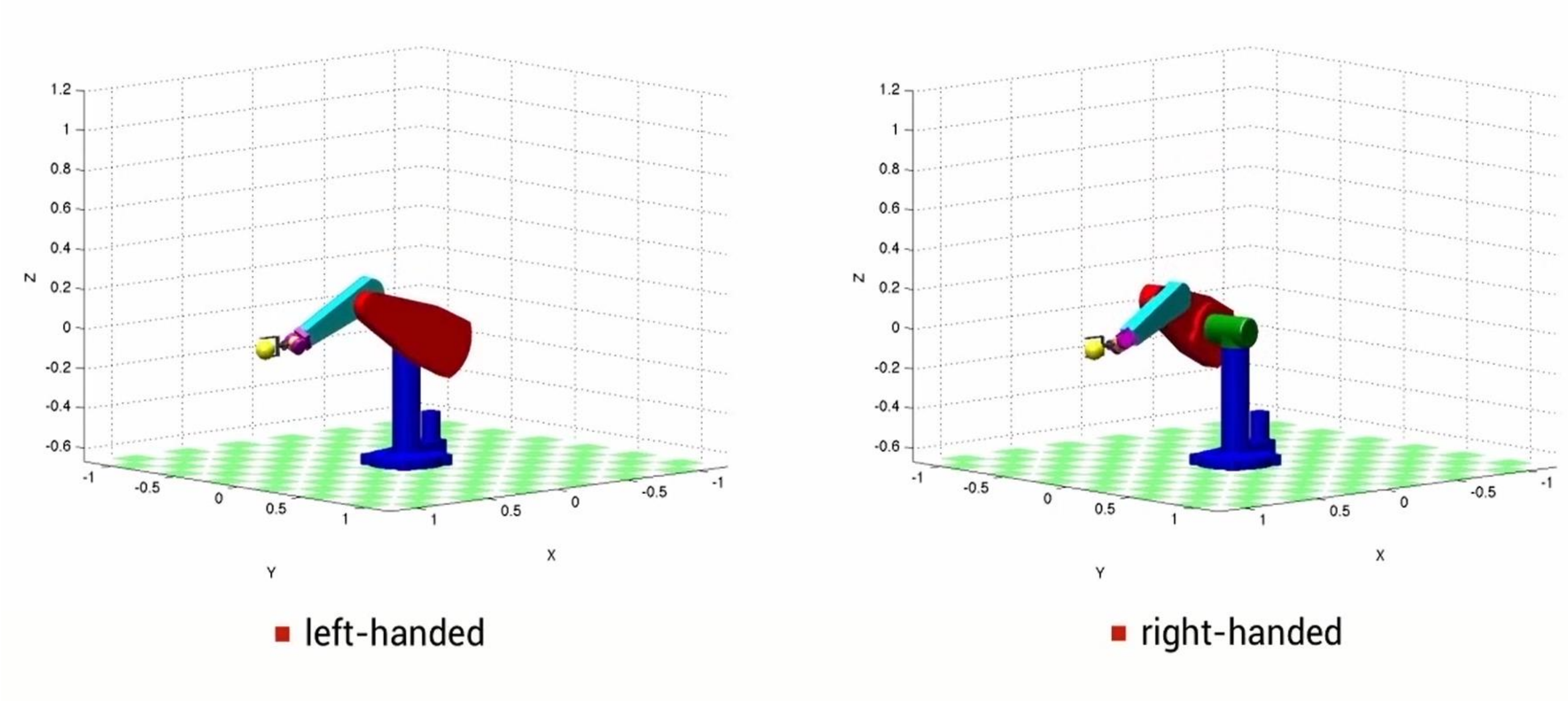


CI: **Solución Numérica Matlab – Ejemplo Puma 6R**

Unimate Puma 500
Oussama Khatib | Used with permission

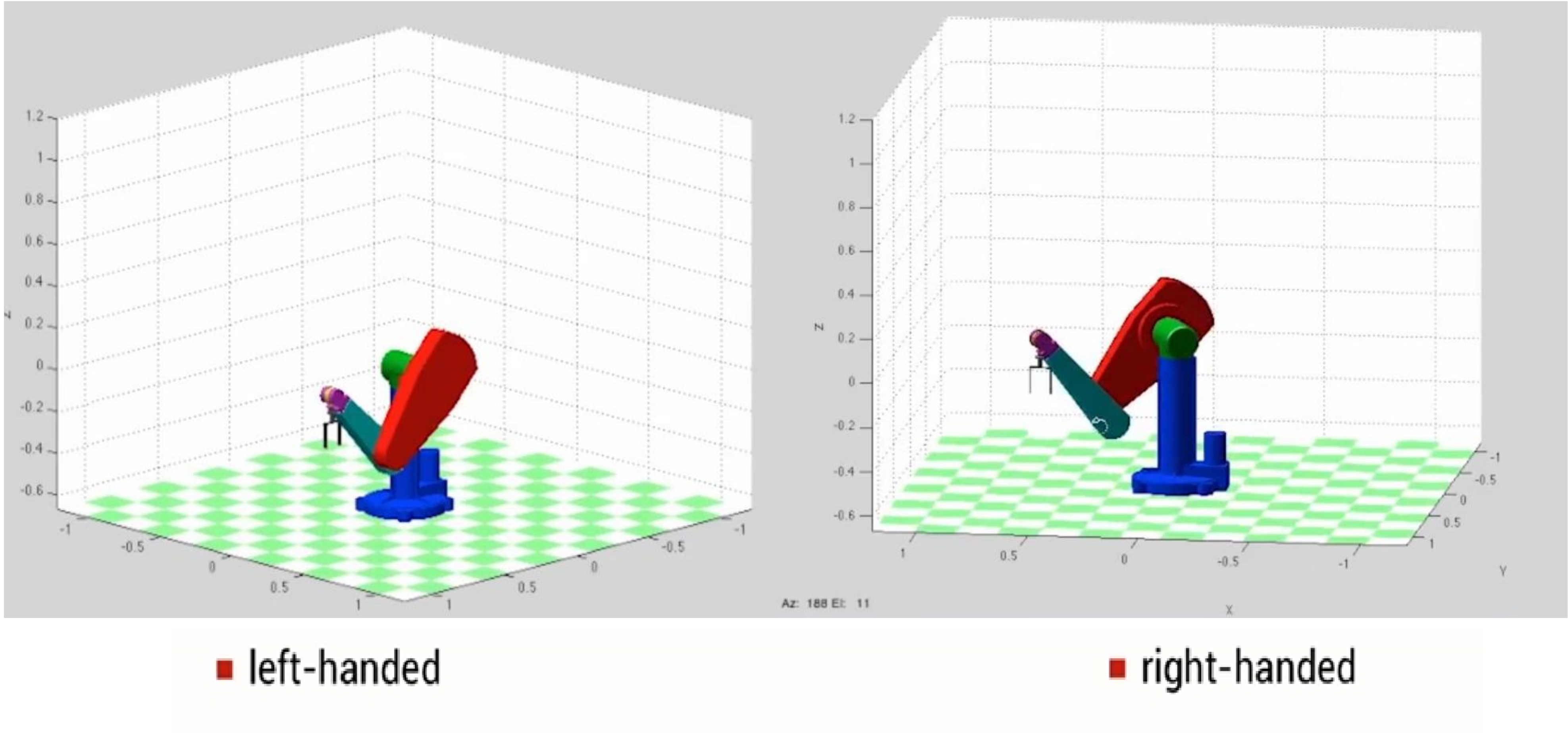


Soluciones codo arriba



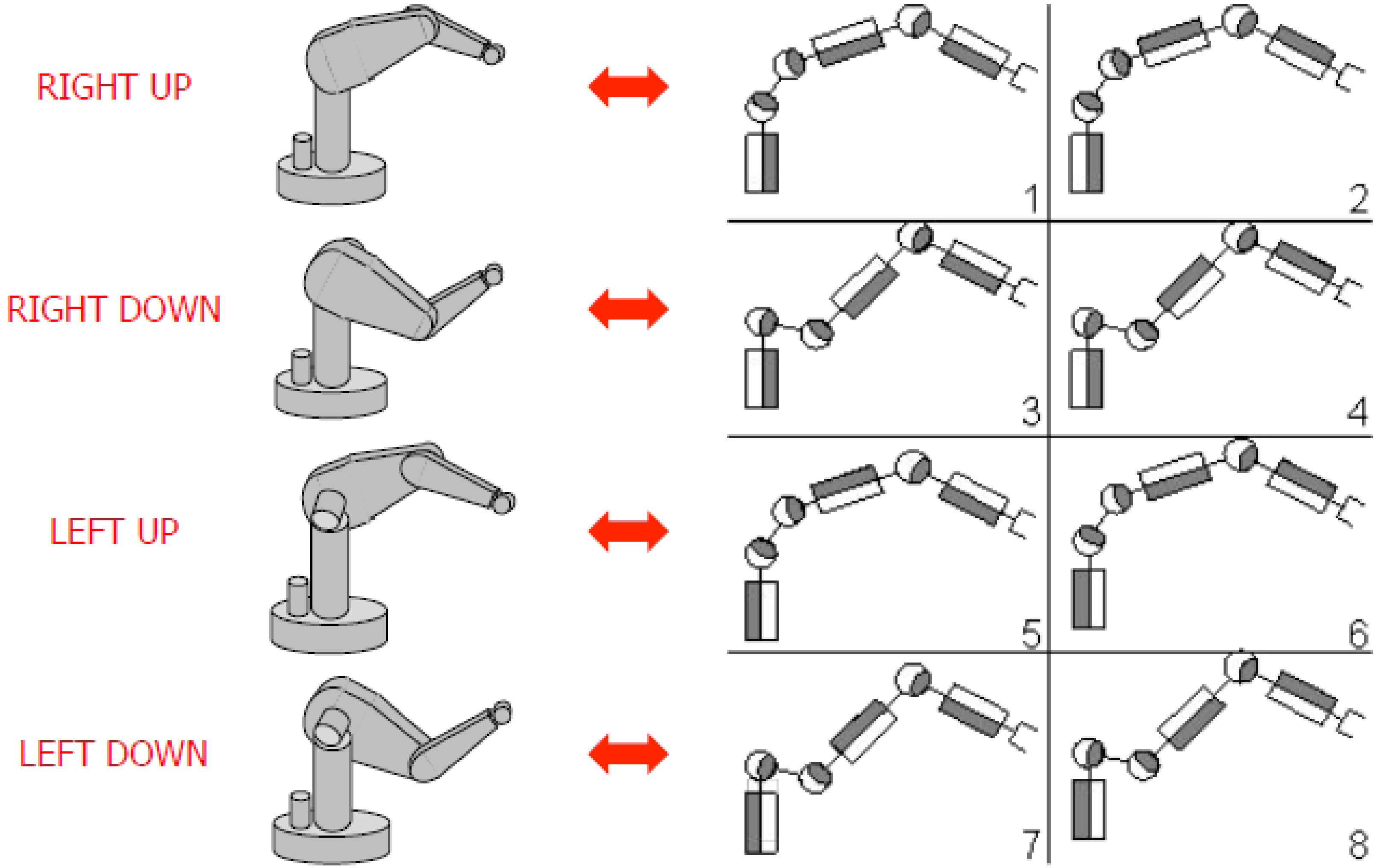
© Peter Corke

Soluciones codo abajo



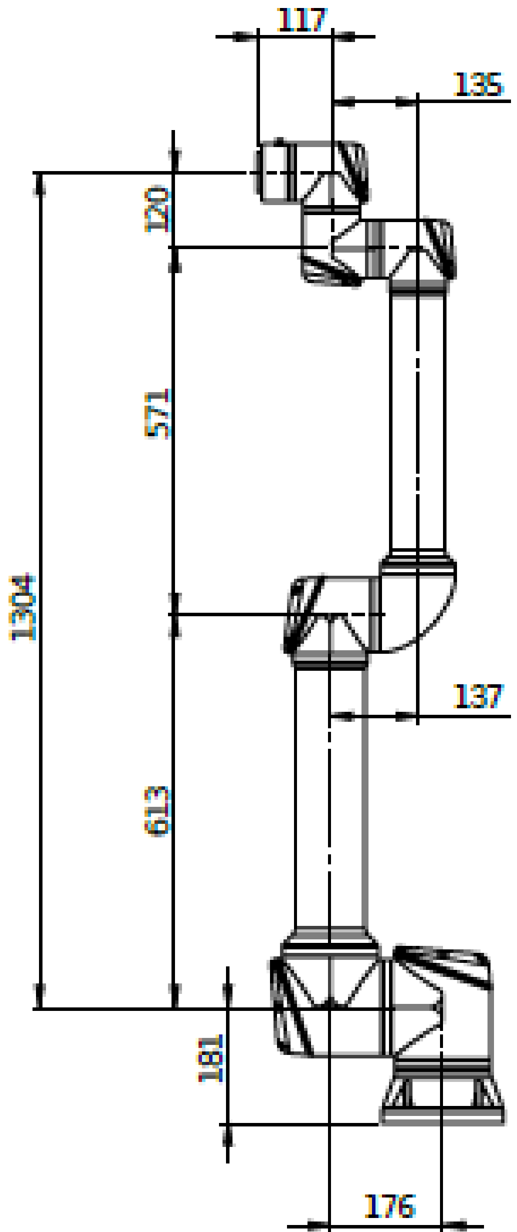
© Peter Corke

Análisis cinemática inversa PUMA 500 - Unimate



Análisis cinemática inversa UR5 – Universal Robots

Articulación	Límite articular	
	Posición	Velocidad
BASE	±360°	120°/s
HOMBRO	±360°	120°/s
CODO	±360°	180°/s
MUÑECA 1	±360°	180°/s
MUÑECA 2	±360°	180°/s
MUÑECA 3	±360°	180°/s



© Prof. Alessandro De Luca

shoulderRight
wristDown
elbowUp

$$q = \begin{pmatrix} 1.0472 \\ -1.2833 \\ -0.7376 \\ -2.6915 \\ -1.5708 \\ 3.1416 \end{pmatrix}$$

shoulderRight
wristDown
elbowDown

$$q = \begin{pmatrix} 1.0472 \\ -1.9941 \\ 0.7376 \\ 2.8273 \\ -1.5708 \\ 3.1416 \end{pmatrix}$$

shoulderRight
wristUp
elbowUp

$$q = \begin{pmatrix} 1.0472 \\ -1.5894 \\ -0.5236 \\ 0.5422 \\ 1.5708 \\ 0 \end{pmatrix}$$

shoulderRight
wristUp
elbowDown

$$q = \begin{pmatrix} 1.0472 \\ -2.0944 \\ 0.5236 \\ 0 \\ 1.5708 \\ 0 \end{pmatrix}$$

shoulderLeft
wristDown
elbowDown

$$q = \begin{pmatrix} 2.7686 \\ -1.0472 \\ -0.5236 \\ 3.1416 \\ -1.5708 \\ 1.4202 \end{pmatrix}$$

shoulderLeft
wristDown
elbowUp

$$q = \begin{pmatrix} 2.7686 \\ -1.5522 \\ 0.5236 \\ 2.5994 \\ -1.5708 \\ 1.4202 \end{pmatrix}$$

shoulderLeft
wristUp
elbowDown

$$q = \begin{pmatrix} 2.7686 \\ -1.1475 \\ -0.7376 \\ 0.3143 \\ 1.5708 \\ -1.7214 \end{pmatrix}$$

shoulderLeft
wristUp
elbowUp

$$q = \begin{pmatrix} 2.7686 \\ -1.8583 \\ 0.7376 \\ -0.4501 \\ 1.5708 \\ -1.7214 \end{pmatrix}$$

Cinemática inversa: Resumen

Soluciones Cerradas o Analíticas:

- Geométrica.
- Algebraica (Ec.).
- Pieper (6DOF).

Ventajas:

- muestra explícitamente las múltiples configuraciones.
- Soluciones compactas y rápidas de ejecutar.

Soluciones Numéricas:

$\boxed{EF \rightarrow ED}$

Ventajas:

- Siempre se puede plantear como un problema de optimización que busca minimizar el error entre la posición deseada y la posición donde se encuentra el EF resolviendo la CD

Soluciones Cerradas o Analíticas:

- Geométrica.
- Algebraica (Ecc.).
- Pieper (6DOF).

Desventajas:

- Complejas de plantear a medida que aumentan las articulaciones.

Soluciones Numéricas:

$\boxed{EF \rightarrow ED}$

Desventajas:

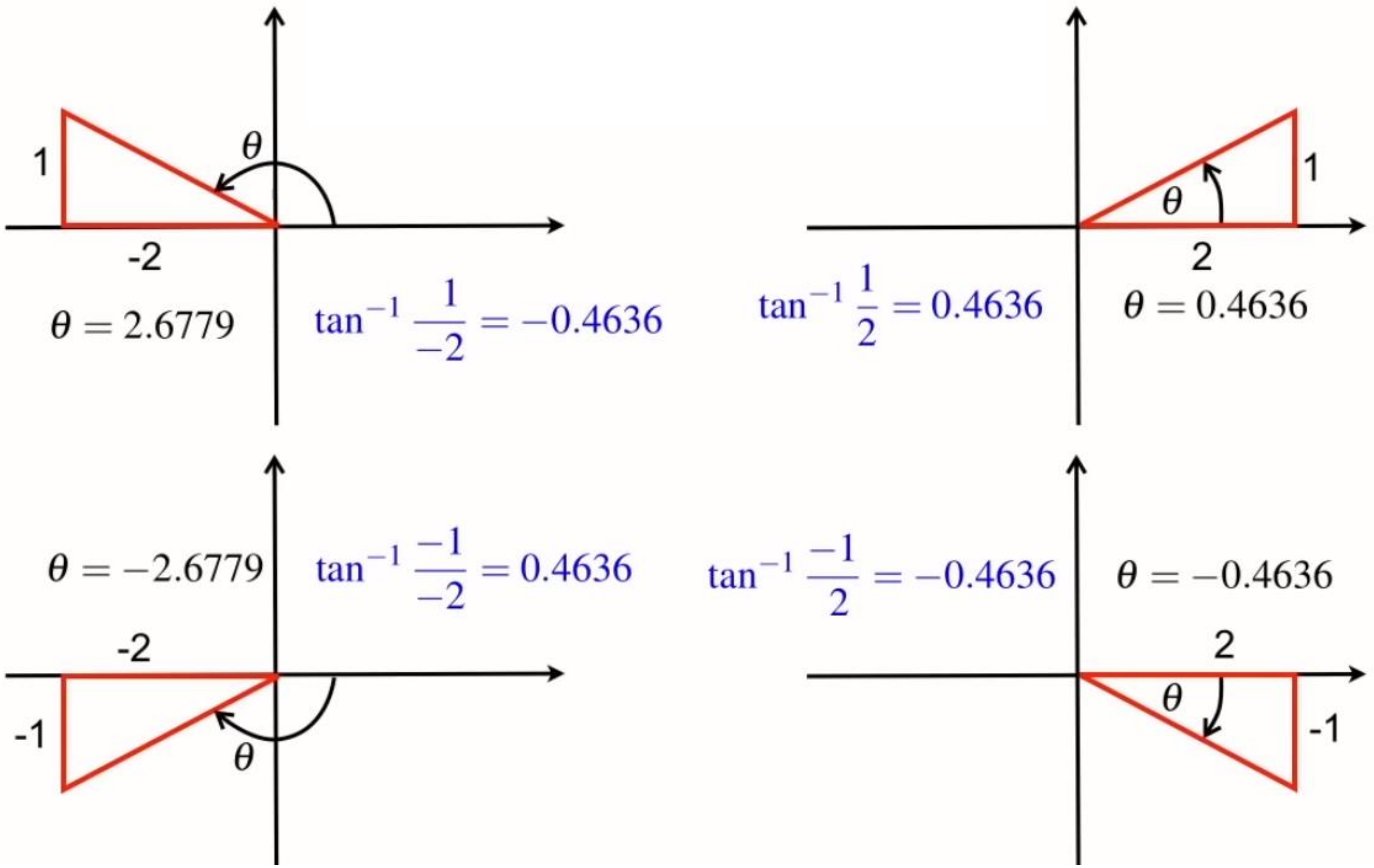
- No siempre convergen.
- No se puede garantizar una configuración específica.
- Tienen un costo computacional, se debe tener en cuenta al trabajar en tiempo real

Muchas gracias por su atención

Preguntas?

Cinemática inversa: **Solución Numérica Matlab**

Función atan2 $\left(\frac{a}{b}\right) \ \epsilon \ [-\pi, \pi]$



© Peter Corke