



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD DE
INGENIERÍA**

ROBOTICA I



UNIDAD III:

Jacobiano

Prof: Carolina Díaz



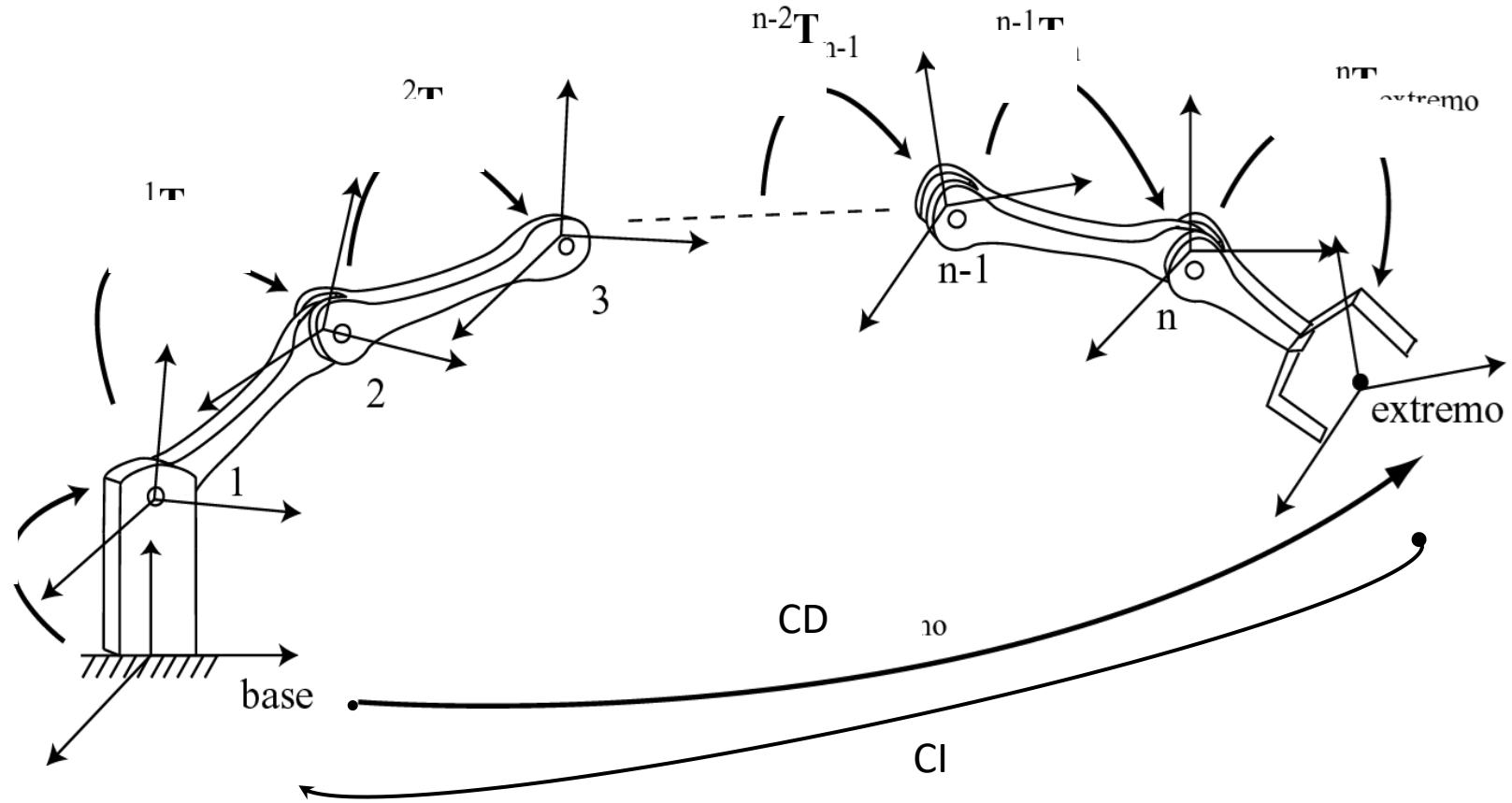
Cinemática Inversa

JTP: Eric Sanchez

Contenido UNIDAD 3

- Introducción repaso fundamentos matemáticos.
- Modelo cinemático directo Denavit Hartenberg .
- Modelo cinamático inverso.
- Cinemática del movimiento. Jacobiano. Singularidades.

Cinemática



CD: $q \rightarrow EF??$

CI: $EF \rightarrow q??$

CM: $\dot{q} \leftrightarrow \dot{EF}??$

Cinemática, velocidades

Cinemática estudia la posición del robot sin tener en cuenta las fuerzas y pares que causan el movimiento.

Conocer las velocidades cartesianas del extremo a partir de las velocidades de cada articulación

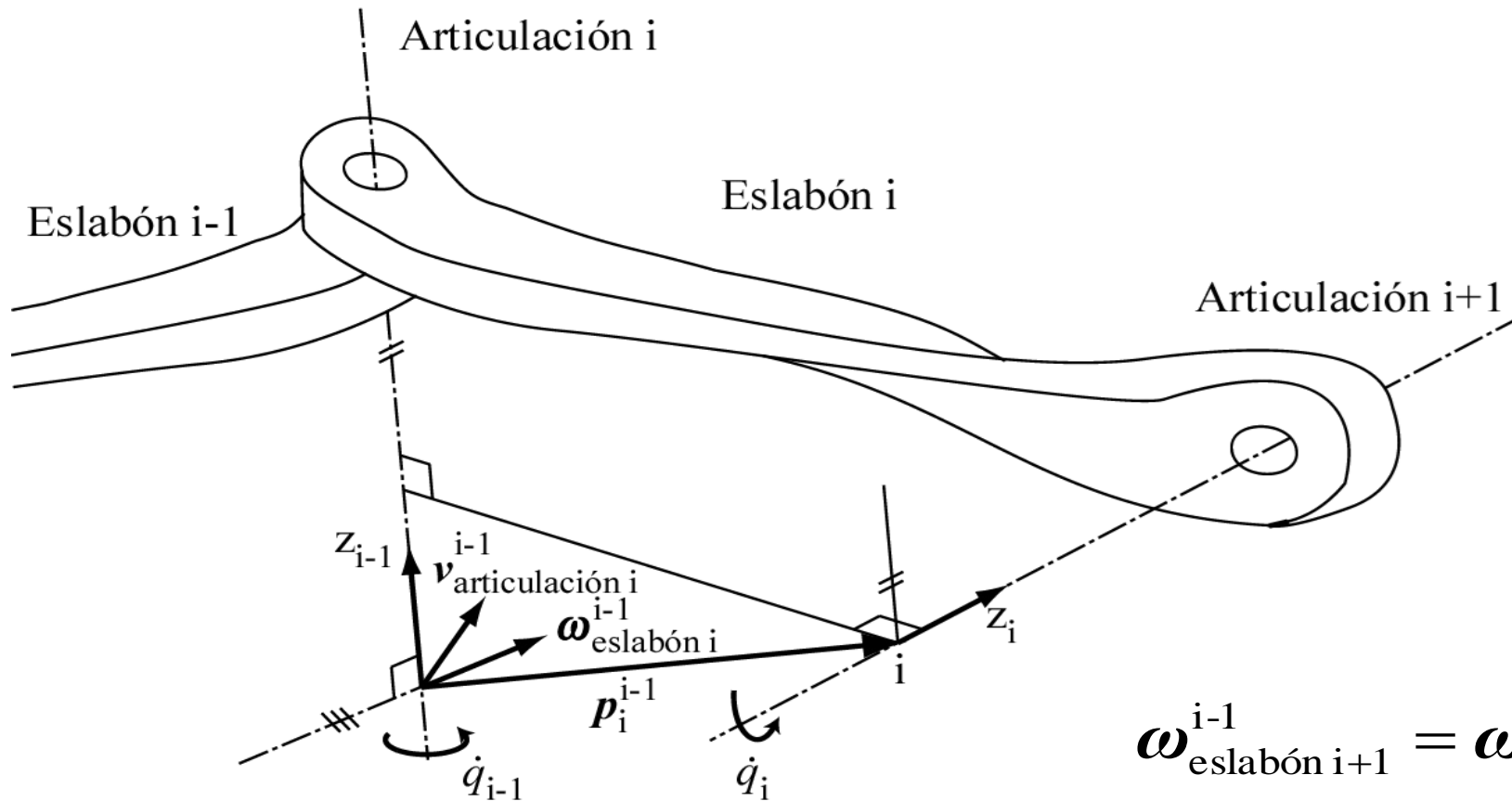


Conocer qué velocidades deben tener las articulaciones para lograr una determinada velocidad en el extremo

Cadena Serie



Propagación de velocidades
(lineales y angulares)



$$\omega_{\text{eslabón } i+1}^{i-1} = \omega_{\text{eslabón } i}^{i-1} + {}^{i-1}\mathbf{Rot}_i \cdot \dot{q}_i \cdot \mathbf{z}_i$$

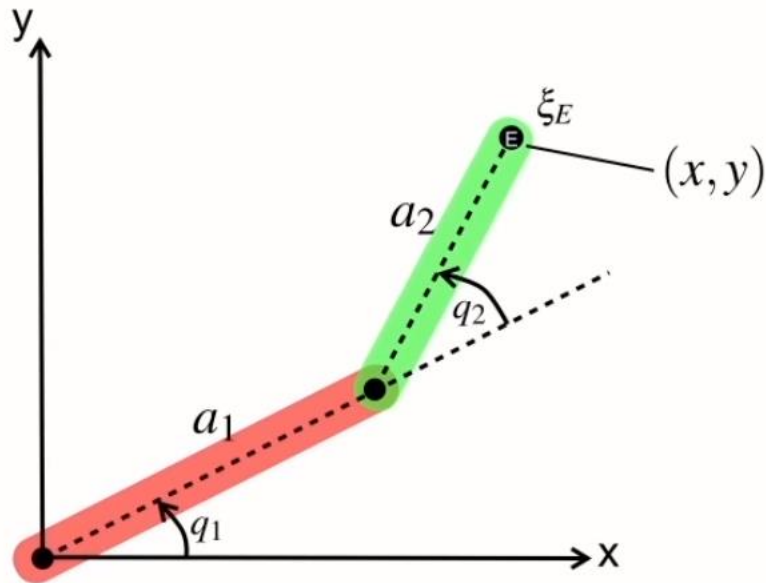
$$\mathbf{v}_{\text{articulación } i+1}^{i-1} = \mathbf{v}_{\text{articulación } i}^{i-1} + \omega_{\text{eslabón } i}^{i-1} \times \mathbf{p}_i^{i-1}$$

Ejemplo de robot planar 2 articulaciones RR

Cadena Serie



Propagación de velocidades



$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_1 \cos q_1 \\ a_2 \sin(q_1 + q_2) + a_1 \sin q_1 \end{pmatrix}$$

- Las variables articulares están en función del tiempo

$$q_1 = q_1(t) \quad q_2 = q_2(t)$$

- Aplicando derivadas usando regla de la cadena

$$\dot{x} = -a_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2)$$

$$\dot{y} = a_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2)$$

$$\dot{x} = -a_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2)$$

$$\dot{y} = a_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2)$$

- Put into matrix form

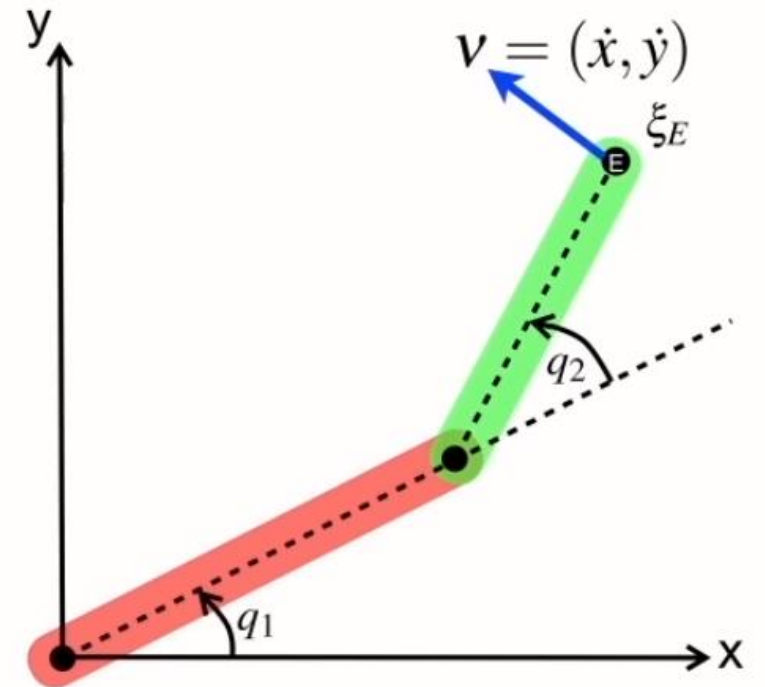
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1 + q_2) & -a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) & a_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

tip
velocity

- and write it succinctly as $\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$

Jacobian
matrix

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1 + q_2) & -a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) & a_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$



Carl Gustav Jakob Jacobi



La **matriz jacobiana** es una matriz de derivadas, formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Supongamos una función F que va del espacio euclídeo n -dimensional a otro espacio euclídeo m -dimensional. Esta función está determinada por m funciones escalares reales:

Cuando la función anterior es diferenciable, entonces las derivadas parciales de estas m funciones pueden ser organizadas en una matriz m por n , la matriz jacobian:

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \frac{df}{dx} &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Matriz Jacobiana

Expresa la relación entre las velocidades articulares y las velocidades del extremo operativo, cuyos componentes se obtienen mediante las derivaciones parciales :

$$x = f_x(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$y = f_y(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$z = f_z(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\beta = f_\beta(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\gamma = f_\gamma(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

- Expresando las derivadas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

- Esta matriz se denomina “Jacobiano”.
- Es de **6** filas y **n** columnas (no siempre cuadrada).
- Se puede obtener derivando relaciones entre ambos espacios.
(Ej.: ecuaciones cerradas de cinemática inversa)
- Se puede obtener por otros métodos (ej.: vectoriales) pero sus elementos representan lo mismo.
- La matriz no es constante, depende de los q_i

Dimensiones de la matriz Jacobiana - Ejemplos



$$J(q)$$

- Fully actuated (6×6)
 - ➔ full access to $SE(3)$
 - ➔ Jacobian is square



$$J(q)$$

- Under actuated ($6 \times N$), $N < 6$
 - ➔ limited access to $SE(3)$
 - ➔ remove some spatial degrees of freedom



$$J(q)$$

- Over actuated ($6 \times N$), $N > 6$
 - ➔ full access to $SE(3)$
 - ➔ use pseudo inverse
 - ➔ has **spare** joints
 - ➔ can do null-space motion

Matriz Jacobiana – Ejemplo robot TRR

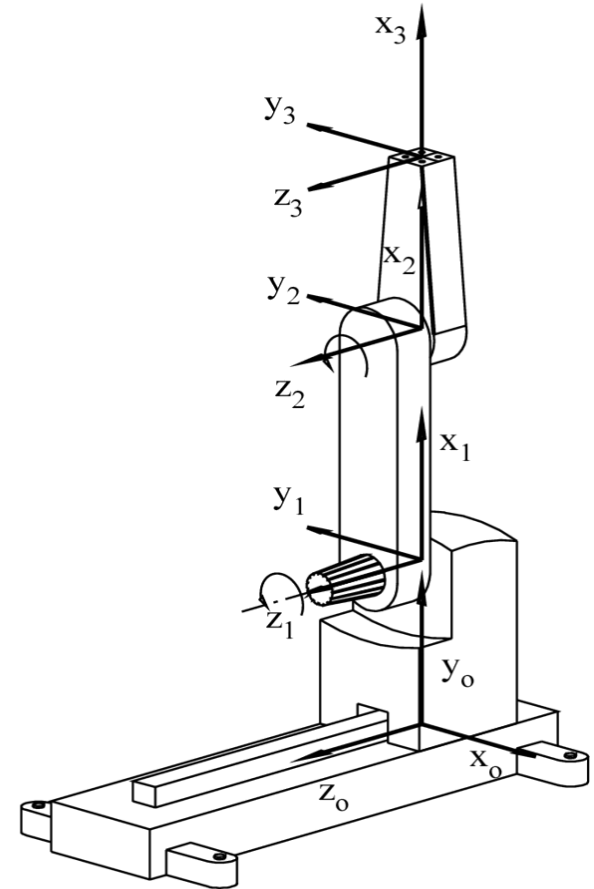
$$\begin{cases} x_{extremo}^0 = l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \\ y_{extremo}^0 = l_1 + l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3) \\ z_{extremo}^0 = q_1 \end{cases}$$

Derivada respecto al tiempo por regla de la cadena:

$$\begin{cases} \frac{dx_{extremo}^0}{dt} = \sum \frac{\partial x_{extremo}^0}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} \\ \frac{dy_{extremo}^0}{dt} = \sum \frac{\partial y_{extremo}^0}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} \\ \frac{dz_{extremo}^0}{dt} = \sum \frac{\partial z_{extremo}^0}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} \end{cases}$$

Matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{extremo}^0 \\ \dot{y}_{extremo}^0 \\ \dot{z}_{extremo}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3) & l_3 \cos(q_2 + q_3) \\ 0 & -l_2 \sin(q_2) - l_3 \sin(q_2 + q_3) & -l_3 \sin(q_2 + q_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$



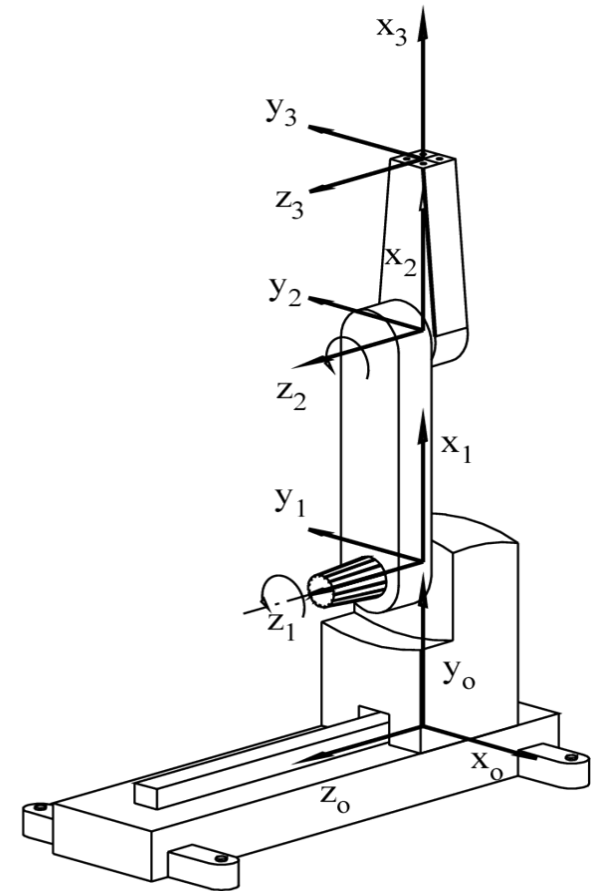
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{extremo}^0 \\ \dot{y}_{extremo}^0 \\ \dot{z}_{extremo}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3) & l_3 \cos(q_2 + q_3) \\ 0 & -l_2 \sin(q_2) - l_3 \sin(q_2 + q_3) & -l_3 \sin(q_2 + q_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de cálculo:

- $q = [5m \quad 60^\circ \quad -15^\circ]$
- $\dot{q} = [0,5m/s \quad 90^\circ/s \quad 45^\circ/s]$
- $l_1 = 10m, l_2 = 5m, l_3 = 8m$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{extremo}^0 \\ \dot{y}_{extremo}^0 \\ \dot{z}_{extremo}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8,157 & 5,657 \\ 0 & -9,987 & -5,657 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,256 \\ -20,13 \\ 0,500 \end{bmatrix} m/s$$

- $q = [15m \quad 30^\circ \quad -30^\circ] \text{ ?????}$



Cinemática, velocidades

Cinemática estudia la posición del robot sin tener en cuenta las fuerzas y pares que causan el movimiento.

Conocer las velocidades cartesianas del extremo a partir de las velocidades de cada articulación



Conocer qué velocidades deben tener las articulaciones para lograr una determinada velocidad en el extremo

Matriz Jacobiana Inversa

- El problema inverso está dado por:

$$\dot{\vec{q}} = J^{-1} \begin{bmatrix} v_{extremo}^0 \\ \omega_{extremo}^0 \end{bmatrix}$$

- Permite saber qué velocidades articulares se deben imponer para lograr una determinada velocidad en extremo operativo.
- La J^{-1} no es exactamente la inversa algebraica de J , ya que esta última podría no ser cuadrada (**6** filas y **n** columnas).
- Se puede obtener por métodos analíticos (similar al de J) y numéricos (inversa cuando es posible, pseudoinversa, otros).
- De mucha utilidad en estrategias avanzadas de control dinámico.

Matriz Jacobiana Inversa – Singularidades

- La J depende de las variables articulares.
- Hay configuraciones de \bar{q} que hacen imposible el cálculo de J^{-1} (o de su pseudo-inversa).
- A estas posturas del robot se las denomina **configuraciones singulares o singularidades** y son de especial importancia:
 - El movimiento en ciertas direcciones es imposible.
 - Para velocidades finitas del extremo pueden necesitarse velocidades articulares infinitas.
 - Para fuerzas y pares finitos en el extremo pueden corresponderles fuerzas y pares infinitos en articulaciones.
 - Se pierde al menos 1 gdl.
- **Todo robot presenta singularidades en el límite del Espacio de Trabajo?**

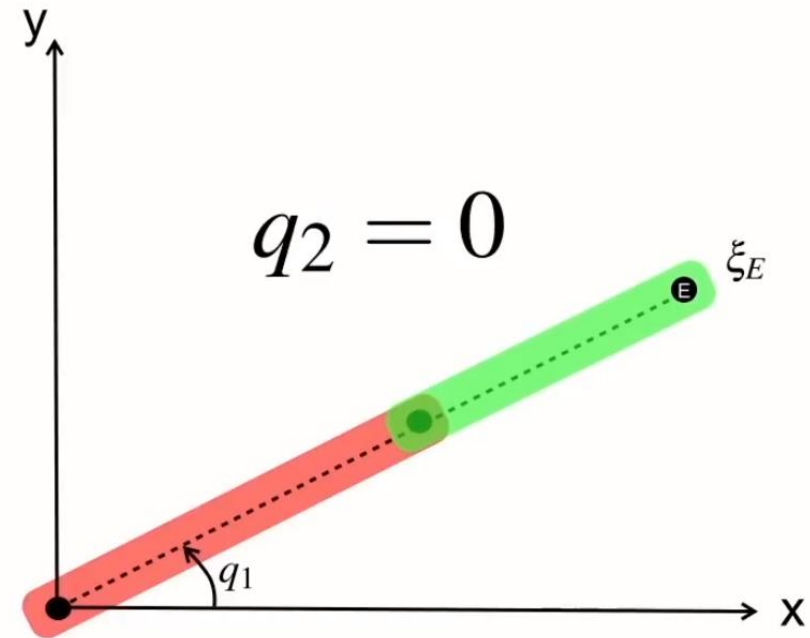
Singularidades - Ejemplo robot planar

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1 + q_2) & -a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) & a_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} = \frac{1}{a_1 a_2 \sin q_2} \begin{pmatrix} a_2 \cos(q_1 + q_2) & a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -a_1 \cos q_1 - a_2 \cos(q_1 + q_2) & -a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$



© Peter Corke

- Cuando $q_2 = 0 \rightarrow \text{Det}(\mathbf{J}) = 0 \rightarrow$ Singularidad \Rightarrow Pierdo 1GDL
- ¿Que pasa en los casos donde q_2 tiene un valor cercano a 0?

Matriz Jacobiana Inversa – Singularidades

- $\text{Det}(\mathbf{J}) = 0$, ó cercano a cero implica \Rightarrow Singularidad
 - Movimiento imposible difícil de realizar.
 - Velocidades infinitas en las articulaciones para velocidades finitas en el extremo.
- ¿Puedo tener casos donde el $\text{Det}(\mathbf{J}) \neq 0$ y estar en un punto singular ?
- Analizar el cond (\mathbf{J})
 - $\rightarrow \text{Cond}(\mathbf{J}) = 1$
 - $\rightarrow \text{Cond}(\mathbf{J})$ significativamente mayor. Cerca de una singularidad
- Elipse de “manipulabilidad”

Matriz Jacobiana Inversa – Ejemplo robot TRR

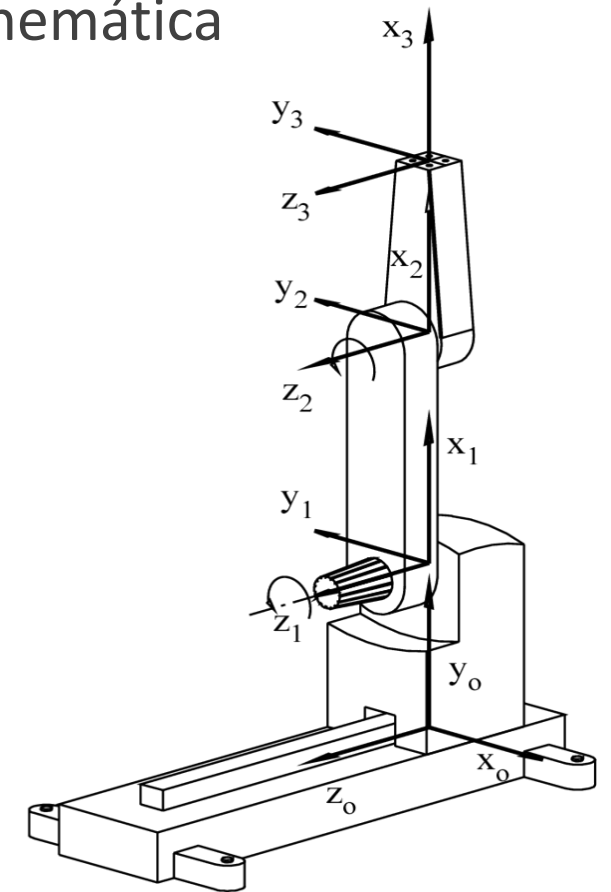
1. Calcular $J(q)$ a partir de un q dato, y luego su inversa algebraica.
2. Hallar el $J^{-1}(q)$ a partir de $J(q)$ de forma general, y calcularlo para cada q dato.
3. Hallar el $J^{-1}(q)$ a partir de las ecuaciones cerradas de cinemática inversa, y calcularlo para cada q dato.

Ejemplo de cálculo:

◦ $q = [5m \quad 60^\circ \quad -15^\circ]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 8,157 & 5,657 \\ 0 & -9,987 & -5,657 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,256 \\ -20,13 \\ 0,500 \end{bmatrix} m/s$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0,5464 & -0,5464 & 0 \\ 0,9647 & 0,7879 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17,256 \\ -20,13 \\ 0,500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} rad/s$$



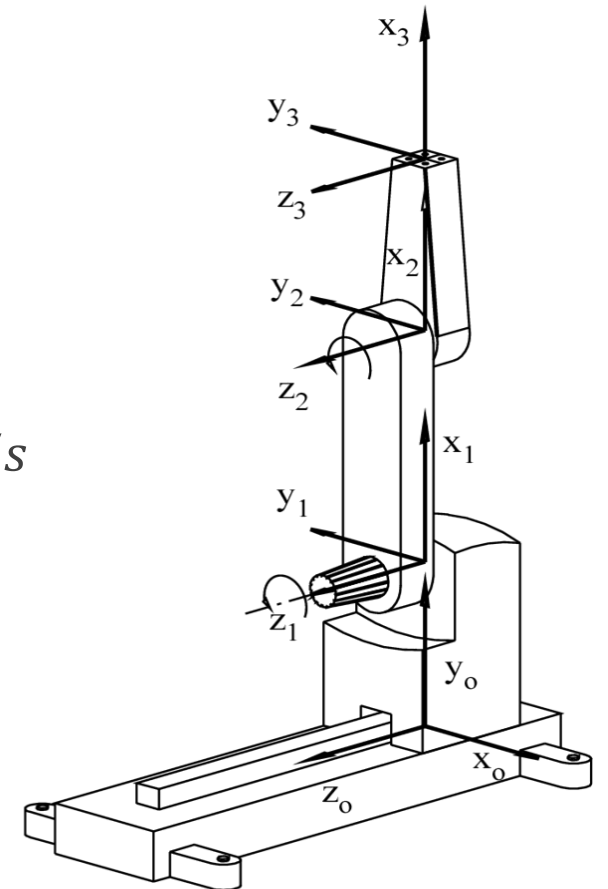
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{extremo}^0 \\ \dot{y}_{extremo}^0 \\ \dot{z}_{extremo}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3) & l_3 \cos(q_2 + q_3) \\ 0 & -l_2 \sin(q_2) - l_3 \sin(q_2 + q_3) & -l_3 \sin(q_2 + q_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de cálculo:

- $q = [5m \quad 60^\circ \quad -15^\circ]$
- $\dot{q} = [0,5m/s \quad 90^\circ/s \quad 45^\circ/s]$
- $l_1 = 10m, l_2 = 5m, l_3 = 8m$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{extremo}^0 \\ \dot{y}_{extremo}^0 \\ \dot{z}_{extremo}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8,157 & 5,657 \\ 0 & -9,987 & -5,657 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,256 \\ -20,13 \\ 0,500 \end{bmatrix} m/s$$

- $q = [15m \quad 30^\circ \quad -30^\circ] \text{ ?????}$



Matriz Jacobiana – Resumen y aclaraciones

- Para el cursado se adopta lo siguiente:
 - “**Matriz Jacobiana**” y “**Jacobiano**” se entienden como el mismo objeto, la matriz ya presentada.
 - Al determinante de dicha matriz no se le asigna nombres particulares, simplemente es el “**determinante del jacobiano**” o “determinante de la matriz jacobiana”.
 - En gran parte de la bibliografía, un **punto singular** es aquel en el que el Jacobiano no presenta inversa ($\det [J] = 0$).
 - En este cursado consideraremos a los puntos singulares como un subconjunto de los **puntos críticos**, siendo estos últimos “todos los puntos de espacio articular donde se pierde al menos 1 GDL”, que serían los singulares y también los que se encuentran en el límite del espacio de trabajo debido a los límites articulares.

Muchas gracias

Preguntas

Matriz Jacobiana Inversa – Control de Movimiento

- Consider discrete time steps numbered 0, 1, 2, ...
 - ➔ update the computation every Δ_t seconds
- At each time step:
 - ➔ Compute joint velocity $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}_k)^{-1} \mathbf{v}$
 - ➔ Compute next joint configuration $\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta_t \dot{\mathbf{q}}$
 - ➔ Move joint to next configuration \mathbf{q}_{k+1}

