

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El sistema está en reposo, así que usamos otra vez las condiciones de equilibrio. Como se muestra en la figura 11.9b, representamos la fuerza del tendón en términos de sus componentes T_x y T_y , usando el ángulo dado θ y la magnitud desconocida T :

$$T_x = T \cos \theta \quad T_y = T \sin \theta$$

También representamos la fuerza en el codo en términos de sus componentes E_x y E_y ; supondremos que sus direcciones son las indicadas en la figura 11.9b; no necesitamos ser exactos porque los resultados de E_x y E_y nos indicarán las direcciones reales. Las incógnitas son: la magnitud T de la tensión en el tendón y las componentes E_x y E_y de la fuerza en el codo.

EJECUTAR: La forma más sencilla de obtener la tensión T es tomando momentos de torsión respecto al codo. La ecuación resultante no contiene E_x , E_y , ni T_x porque las líneas de acción de todas estas fuerzas pasan por ese punto. La ecuación de momento de torsión se reduce entonces a

$$\sum \tau_E = Lw - DT_y = 0$$

De esto obtenemos

$$T_y = \frac{Lw}{D} \quad \text{y} \quad T = \frac{Lw}{D \sin \theta}$$

Para calcular E_x y E_y , usamos la primera condición de equilibrio, $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$:

$$\sum F_x = T_x + (-E_x) = 0$$

$$E_x = T_x = T \cos \theta = \frac{Lw}{D \sin \theta} \cos \theta = \frac{Lw}{D} \cot \theta$$

$$= \frac{Lw D}{D h} = \frac{Lw}{h}$$

$$\sum F_y = T_y + E_y + (-w) = 0$$

$$E_y = w - \frac{Lw}{D} = -\frac{(L-D)w}{D}$$

El signo negativo indica que nuestra estimación de la dirección de E_y (Fig. 11.9b) está mal; en realidad es vertical *hacia abajo*.

EVALUAR: Podemos comprobar nuestros resultados obteniendo E_x y E_y de una manera distinta que usa otras dos ecuaciones de momento de torsión. Tomamos momentos respecto al punto de sujeción del tendón, A :

$$\sum \tau_A = (L-D)w + DE_y = 0 \quad \text{y} \quad E_y = -\frac{(L-D)w}{D}$$

Por último, tomamos momentos respecto al punto B de la figura:

$$\sum \tau_B = Lw - hE_x = 0 \quad \text{y} \quad E_x = \frac{Lw}{h}$$

Escogimos los puntos A y B porque la tensión del tendón T tiene momento de torsión cero en torno a esos puntos. (¿Entiende por qué, viendo la figura 11.9b?) Observe lo mucho que simplificamos los cálculos escogiendo el punto para calcular momentos a modo de eliminar una o más incógnitas.

En nuestra determinación alterna de E_x y E_y , no usamos explícitamente la primera condición de equilibrio (que la suma vectorial de las fuerzas sea cero). Como verificación, calcule $\sum F_x$ y $\sum F_y$ para comprobar que realmente *sean* cero. Las verificaciones de consistencia siempre son recomendables.

Como ejemplo específico, suponga $w = 200$ N, $D = 0.050$ m, $L = 0.30$ m y $\theta = 80^\circ$. Dado que $\theta = h/D$, obtenemos

$$h = D \tan \theta = (0.050 \text{ m})(5.67) = 0.28 \text{ m}$$

Por los resultados generales anteriores vemos que

$$T = \frac{Lw}{D \sin \theta} = \frac{(0.30 \text{ m})(200 \text{ N})}{(0.050 \text{ m})(0.98)} = 1220 \text{ N}$$

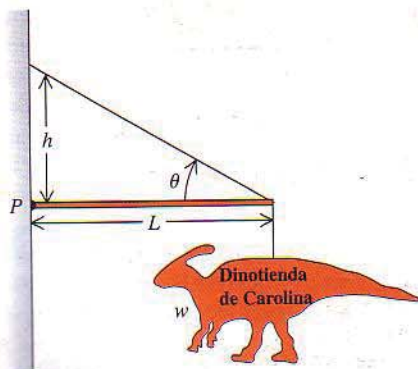
$$E_y = -\frac{(L-D)w}{D} = -\frac{(0.30 \text{ m} - 0.050 \text{ m})(200 \text{ N})}{0.050 \text{ m}} = -1000 \text{ N}$$

$$E_x = \frac{Lw}{h} = \frac{(0.30 \text{ m})(200 \text{ N})}{0.28 \text{ m}} = 210 \text{ N}$$

La magnitud de la fuerza en el codo es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1020 \text{ N}$$

En vista de las magnitudes de los resultados, despreciar el peso del antebrazo (digamos de 20 N) sólo causa errores relativamente pequeños.



11.10 ¿Qué tensión hay en el cable diagonal y qué fuerza ejerce la articulación en P ?

Evalúe su comprensión

Un anuncio metálico (peso w) de una tienda especializada cuelga del extremo de una varilla horizontal de longitud L y masa despreciable (Fig. 11.10). La varilla se sostiene mediante un cable que forma un ángulo θ con la horizontal, y tiene una articulación en el punto P . Calcule: la tensión en el cable y las componentes de fuerza que la articulación ejerce sobre la varilla en P .

11.4 | Esfuerzo, tensión y módulos de elasticidad

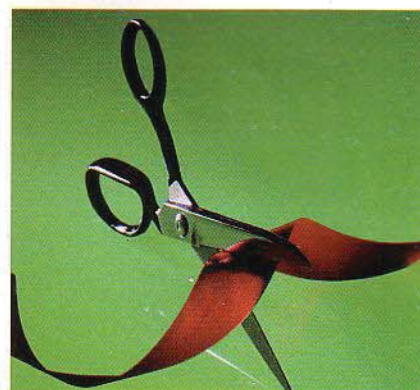
El cuerpo rígido es un modelo idealizado útil, pero en muchos casos: los estiramientos, aplastamientos y torsiones de los cuerpos reales cuando se les aplican fuerzas son demasiado importantes para despreciarse. La figura 11.11 muestra tres ejemplos. Nos interesa estudiar la relación entre las fuerzas y los cambios de forma en cada caso.



(a) Esfuerzo de tensión



(b) Esfuerzo de volumen



(c) Esfuerzo de corte

11.11 Tres tipos de esfuerzos: (a) Un cable sometido a *esfuerzo de tensión*, estirado por fuerzas que actúan en sus extremos. (b) Delfín sometido a *esfuerzo de volumen*, aplastado por todos lados por fuerzas debidas a la presión del agua. (c) Listón sometido a *esfuerzo de corte*, siendo deformado y finalmente cortado por fuerzas ejercidas por las tijeras.

Para cada clase de alteración de la forma, introduciremos una cantidad llamada **esfuerzo** que caracteriza la intensidad de las fuerzas que causan el cambio de forma, generalmente con base en la “fuerza por unidad de área”. Otra cantidad, **deformación**, describe el cambio de forma resultante. Si el esfuerzo y la deformación son pequeños, es común que sean directamente proporcionales, y llamamos a la constante de proporcionalidad **módulo de elasticidad**. Si tiramos con mayor fuerza de algo, se estira más; si lo aplastamos con mayor fuerza, se comprime más. El patrón general puede formularse así:

$$\frac{\text{Esfuerzo}}{\text{Deformación}} = \text{Módulo de elasticidad} \quad (\text{Ley de Hooke}) \quad (11.7)$$

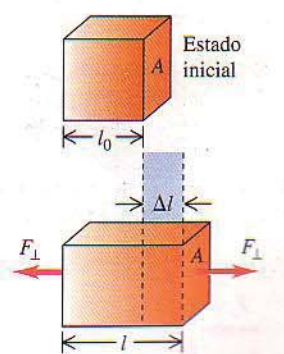
La proporcionalidad del esfuerzo y la deformación (en ciertas condiciones) se denomina **ley de Hooke**, por Robert Hooke (1635-1703), un contemporáneo de Newton. Usamos una forma de la ley de Hooke en las secciones 6.3 y 7.2: el alargamiento de un resorte ideal es proporcional a la fuerza que lo estira. Recuerde que ésta no es realmente una ley general, sino un resultado experimental válido sólo dentro de un intervalo limitado. En la última sección del capítulo estudiaremos dicho intervalo.

Esfuerzo y deformación de tensión y compresión

El comportamiento elástico más fácil de entender es el estiramiento de: una barra, varilla o alambre, cuando se tira de sus extremos (Fig. 11.11a). La figura 11.12 muestra un objeto que inicialmente tiene un área de sección transversal uniforme A y una longitud l_0 . Ahora aplicamos fuerzas de igual magnitud F_{\perp} pero direcciones opuestas a los extremos (esto garantiza que el objeto no tenderá a moverse a la izquierda ni a la derecha). Decimos que el objeto está en **tensión**. Ya hablamos mucho de la tensión en cuerdas e hilos; éste es el mismo concepto. El subíndice \perp nos recuerda que las fuerzas actúan en dirección perpendicular a la sección transversal.

Definimos el **esfuerzo de tensión** en la sección transversal como el cociente de la fuerza F_{\perp} y el área de la sección A :

$$\text{Esfuerzo de tensión} = \frac{F_{\perp}}{A} \quad (11.8)$$



$$\text{Esfuerzo de tensión} = \frac{F_{\perp}}{A}$$

$$\text{Deformación por tensión} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

11.12 Un objeto en tensión. La fuerza neta que actúa sobre el objeto es cero, pero el objeto se deforma. El esfuerzo de tensión (la razón de la fuerza al área de sección transversal) produce una deformación por tensión (el alargamiento dividido entre la longitud inicial). Se ha exagerado el alargamiento Δl para claridad.

Ésta es una cantidad *escalar* porque F_{\perp} es la *magnitud* de la fuerza. La unidad del esfuerzo en el SI es N/m^2 , que también recibe el nombre especial de **pascal** (abreviado Pa y así llamado en honor del científico y filósofo francés del siglo XVII Blaise Pascal). La ecuación (11.8) muestra que un pascal es igual a un newton sobre metro cuadrado (N/m^2):

$$1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

En el sistema británico, la unidad lógica sería la libra por pie cuadrado, pero es más común usar la libra por pulgada cuadrada (lb/pulg^2 o psi). Los factores de conversión son

$$1 \text{ psi} = 6895 \text{ Pa} \quad \text{y} \quad 1 \text{ Pa} = 1.450 \times 10^{-4} \text{ psi}$$

Las unidades de esfuerzo son las mismas que las de *presión*, que veremos a menudo en capítulos posteriores. La presión del aire en los neumáticos de un auto es de alrededor de $3 \times 10^5 \text{ Pa} = 300 \text{ kPa}$, y normalmente se exige a los cables de acero soportar esfuerzos de tensión del orden de 10^8 Pa .

El objeto de la figura 11.12 se estira hasta una longitud $l = l_0 + \Delta l$ cuando se le somete a tensión. El alargamiento Δl no se da sólo en los extremos; todas las partes de la barra se estiran en la misma proporción. La **deformación por tensión** del objeto es igual al cambio fraccionario de longitud, que es el cociente del alargamiento Δl entre la longitud original l_0 :

$$\text{Deformación por tensión} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{11.9}$$

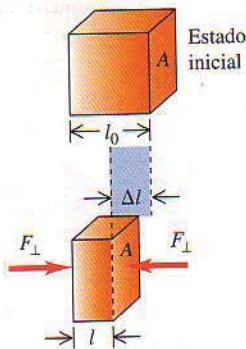
La deformación por tensión es el estiramiento por unidad de longitud; es el cociente de dos longitudes medidas siempre en las mismas unidades, de modo que es un número puro (adimensional) sin unidades.

Experimentalmente, se observa que si el esfuerzo de tensión es lo bastante pequeño, el esfuerzo y la deformación son proporcionales, como en la ecuación (11.7). El módulo de elasticidad correspondiente se denomina **módulo de Young** y se denota con Y :

$$Y = \frac{\text{Esfuerzo de tensión}}{\text{Deformación por tensión}} = \frac{F_{\perp}/A}{\Delta l/l_0} = \frac{F_{\perp}}{A} \frac{l_0}{\Delta l} \quad (\text{módulo de Young}) \tag{11.10}$$

Dado que la deformación es un número puro, las unidades del módulo de Young son las de esfuerzo: fuerza por unidad de área. En la tabla 11.1 se dan valores representativos. (Esta tabla también presenta valores de otros dos módulos que veremos más adelante.) Un material con un valor grande de Y no se estira mucho; se requiere un esfuerzo grande para una deformación dada. Por ejemplo, el valor de Y para el acero colado ($2 \times 10^{11} \text{ Pa}$) es mucho mayor que para el hule ($5 \times 10^8 \text{ Pa}$).

Si las fuerzas en los extremos de una barra empujan en lugar de tirar (Fig. 11.13), la barra está en **compresión**, y el esfuerzo es un **esfuerzo de compresión**. La **deformación por compresión** de un objeto en compresión se define del mis-



$$\text{Esfuerzo de compresión} = \frac{F_{\perp}}{A}$$

$$\text{Deformación por compresión} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

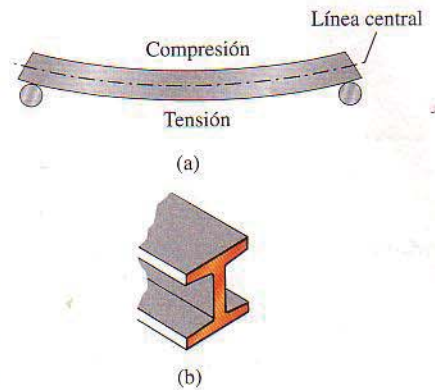
11.13 Objeto en compresión. El esfuerzo de compresión y la deformación por compresión se definen igual que en el caso de la tensión (véase Fig. 11.12), excepto que ahora Δl denota la distancia que el objeto se contrae.

Tabla 11.1 Módulos de elasticidad aproximados

Material	Módulo de Young, Y (Pa)	Módulo de volumen, B (Pa)	Módulo de corte, S (Pa)
Aluminio	7.0×10^{10}	7.5×10^{10}	2.5×10^{10}
Latón	9.0×10^{10}	6.0×10^{10}	3.5×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	14×10^{10}	4.4×10^{10}
Vidrio óptico	6.0×10^{10}	5.0×10^{10}	2.5×10^{10}
Hierro	21×10^{10}	16×10^{10}	7.7×10^{10}
Plomo	1.6×10^{10}	4.1×10^{10}	0.6×10^{10}
Níquel	21×10^{10}	17×10^{10}	7.8×10^{10}
Acero	20×10^{10}	16×10^{10}	7.5×10^{10}

mo modo que la deformación por tensión, pero Δl tiene la dirección opuesta. La ley de Hooke y la ecuación (11.10) son válidas también para la compresión si el esfuerzo no es muy grande. El módulo de Young de muchos materiales tiene el mismo valor para esfuerzos de tensión y de compresión; los materiales compuestos como el concreto u hormigón son una excepción.

En muchas situaciones, los cuerpos experimentan esfuerzos de tensión y compresión al mismo tiempo. Por ejemplo, una viga horizontal apoyada en sus extremos se pandea por su propio peso. En consecuencia, la parte superior de la viga está en compresión, y la inferior, en tensión (Fig. 11.14a). Para reducir al mínimo el esfuerzo y por ende la deformación de flexión, las partes superior e inferior de la viga deben tener un área transversal grande. En la línea central de la viga no hay compresión ni tensión, así que ésta parte puede tener una sección pequeña; esto ayuda a reducir al mínimo el peso de la viga y también a reducir el esfuerzo. El resultado es la viga I tan utilizada en la construcción de edificios (Fig. 11.14b).



11.14 (a) Una viga apoyada en sus extremos está sometida tanto a compresión como a tensión. (b) La forma de la sección transversal de una viga I reduce al mínimo tanto el esfuerzo como el peso.

Ejemplo 11.6

Esfuerzo y deformación por tensión

Un cable de acero de 2.0 m de longitud tiene un área transversal de 0.30 cm^2 . El cable se cuelga por un extremo de una estructura de soporte y después un torno de 550 kg se cuelga del extremo inferior del cable. Determine el esfuerzo, la deformación y el alargamiento del cable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos las definiciones de esfuerzo, deformación y módulo de Young de las ecuaciones (11.8), (11.9) y (11.10), respectivamente, y el valor de Y para el acero de la tabla 11.1.

EJECUTAR: Obtenemos

$$\text{Esfuerzo} = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{(550 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{3.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 1.8 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$\text{Def.} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\text{Esfuerzo}}{Y} = \frac{1.8 \times 10^8 \text{ Pa}}{20 \times 10^{10} \text{ Pa}} = 9.0 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} \text{Alargamiento} &= \Delta l = (\text{Def.}) \times l_0 = (9.0 \times 10^{-4})(2.0 \text{ m}) \\ &= 0.0018 \text{ m} = 1.8 \text{ mm} \end{aligned}$$

EVALUAR: Este alargamiento tan pequeño con una carga de más de media tonelada pone de manifiesto la rigidez del acero.

Esfuerzo y tensión de volumen

Cuando un delfín se sumerge a gran profundidad en el mar, el agua ejerce una presión casi uniforme en toda su superficie y reduce un poco su volumen (Fig. 11.11b). Esta situación es diferente de los esfuerzos y deformaciones de tensión y compresión que hemos visto. El esfuerzo en éste caso es una presión uniforme por todos lados, y la deformación resultante es un cambio de volumen. Usamos los términos **esfuerzo de volumen y deformación de volumen** para describir estas cantidades.

Si un objeto se sumerge en un fluido (líquido o gas) en reposo, el fluido ejerce una fuerza sobre todas las partes de la superficie del objeto; esta fuerza es *perpendicular* a la superficie. (Si tratáramos de hacer que el fluido ejerciera una fuerza paralela a la superficie, el fluido se deslizaría a un lado para contrarrestar la acción.) La fuerza F_{\perp} por unidad de área que el fluido ejerce sobre la superficie de un objeto sumergido es la **presión** p en el fluido:

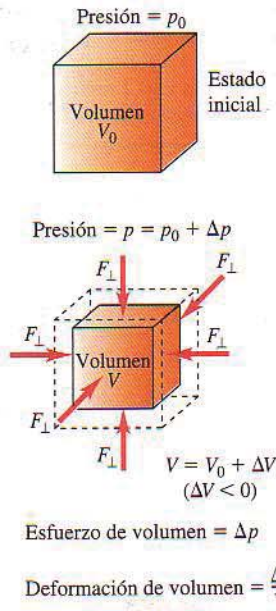
$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \quad (\text{presión en un fluido}) \quad (11.11)$$

La presión dentro de un fluido aumenta con la profundidad. Por ejemplo, la presión del aire es aproximadamente 21% mayor en el nivel del mar que en Denver (altitud: 1.6 km). No obstante, si un objeto sumergido es suficientemente pequeño, podremos despreciar las diferencias de presión debidas a la profundidad en el cuerpo del objeto, en lo que respecta al cálculo del esfuerzo de volumen. Por tanto, supondremos que la presión tiene el mismo valor para todos los puntos en la superficie del objeto sumergido.

La presión tiene las mismas unidades que el esfuerzo; las unidades de uso común incluyen 1 Pa (= 1 N/m²) y 1 lb/pulg² (1 psi). También se usa comúnmente la **atmósfera**, que se abrevia atm. Una atmósfera es la presión media aproximada de la atmósfera terrestre sobre el nivel del mar:

$$1 \text{ atmósfera} = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 14.7 \text{ lb/pulg}^2$$

CUIDADO A diferencia de la fuerza, la presión no tiene una dirección intrínseca: la presión en la superficie de un objeto sumergido es la misma, sea cual sea la orientación de la superficie. Por tanto, la presión es una cantidad *escalar*, no vectorial.



11.15 Objeto sometido a un esfuerzo de volumen. Sin el esfuerzo, el cubo ocupa un volumen V_0 ; cuando se aplica el esfuerzo, el cubo tiene un volumen menor, V . El cambio de volumen ΔV se exageró para claridad.

La presión desempeña el papel del esfuerzo en un cambio de volumen. La deformación correspondiente es el cambio fraccionario en el volumen (Fig. 11.15), es decir, el cociente del cambio de volumen ΔV entre el volumen original V_0 :

$$\text{Deformación de volumen} = \frac{\Delta V}{V_0} \quad (11.12)$$

La deformación de volumen es el cambio de volumen por unidad de volumen; al igual que la deformación por tensión o compresión, es un número puro, sin unidades.

Si se obedece la ley de Hooke, un aumento en la presión (esfuerzo de volumen) produce una deformación de volumen (cambio fraccionario de volumen) *proporcional*. El módulo de elasticidad correspondiente (relación esfuerzo-deformación) se denomina **módulo de volumen** y se denota con B . Si la presión sobre un cuerpo cambia en una cantidad pequeña Δp , de p_0 a $p_0 + \Delta p$, y la deformación de volumen resultante es $\Delta V/V_0$, la ley de Hooke adopta la forma

$$B = \frac{\text{Esfuerzo de volumen}}{\text{Deformación de volumen}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} \quad (\text{módulo de volumen}) \quad (11.13)$$

Incluimos un signo de menos en esta ecuación porque un *aumento* de presión siempre causa una *reducción* de volumen. Dicho de otro modo, si Δp es positivo, ΔV es negativo. El módulo de volumen B en sí es una cantidad positiva.

En el caso de cambios de presión pequeños en un sólido o un líquido, consideramos a B constante. El módulo de volumen de un *gas*, sin embargo, depende de la presión inicial p_0 . La tabla 11.1 da valores del módulo de volumen para varios sólidos. Sus unidades, fuerza por unidad de área, son las de la presión (las mismas del esfuerzo de tensión o compresión).

El recíproco del módulo de volumen se denomina **compresibilidad** y se denota con k . Por la ecuación (11.13),

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{\Delta V/V_0}{\Delta p} = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (\text{compresibilidad}) \quad (11.14)$$

La compresibilidad es la disminución fraccionaria de volumen, $-\Delta V/V_0$, por unidad de aumento Δp de la presión. Las unidades de la compresibilidad son inversas a las de *presión*, Pa⁻¹ o atm⁻¹.

En la tabla 11.2, se presentan valores de compresibilidad k para varios líquidos. La compresibilidad del agua es de $46.4 \times 10^{-6} \text{ atm}^{-1}$. Esto implica que, por cada

Tabla 11.2 Compresibilidades de líquidos

Líquido	Compresibilidad, k	
	Pa ⁻¹	atm ⁻¹
Disulfuro de carbono	93×10^{-11}	94×10^{-6}
Alcohol etílico	110×10^{-11}	111×10^{-6}
Glicerina	21×10^{-11}	21×10^{-6}
Mercurio	3.7×10^{-11}	3.8×10^{-6}
Agua	45.8×10^{-11}	46.4×10^{-6}

aumento de 1 atm en la presión, el volumen del agua disminuye en 46.4 partes por millón. Los materiales con módulo de volumen pequeño y compresibilidad grande son fáciles de comprimir.

Ejemplo 11.7

Esfuerzo y deformación de volumen

Una prensa hidráulica contiene 0.25 m^3 (250 L) de aceite. Calcule la disminución de volumen del aceite cuando se somete a un aumento de presión $\Delta p = 1.6 \times 10^7 \text{ Pa}$ (unas 160 atm o 2300 psi). El módulo de volumen del aceite es $B = 5.0 \times 10^9 \text{ Pa}$ (unas $5.0 \times 10^4 \text{ atm}$) y su compresibilidad es $k = 1/B = 20 \times 10^{-6} \text{ atm}^{-1}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nos dan tanto el módulo de volumen como la compresibilidad, así que podemos usar la ecuación (11.13) o bien la ecuación (11.14) para calcular el cambio de volumen ΔV .

EJECUTAR: Despejamos ΔV de la ecuación (11.13) y obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\frac{V_0 \Delta p}{B} = -\frac{(0.25 \text{ m}^3)(1.6 \times 10^7 \text{ Pa})}{5.0 \times 10^9 \text{ Pa}} \\ &= -8.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3 = -0.80 \text{ L}\end{aligned}$$

O bien, podemos usar la ecuación (11.14). Despejando ΔV y usando las conversiones aproximadas de unidades obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta V &= -kV_0 \Delta p = -(20 \times 10^{-6} \text{ atm}^{-1})(0.25 \text{ m}^3)(160 \text{ atm}) \\ &= -8.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3\end{aligned}$$

EVALUAR: Obtenemos el mismo resultado con los dos enfoques, como debe ser. Observe que ΔV es negativo, lo que indica que el volumen disminuye cuando la presión aumenta. Vemos que, si bien el aumento de presión es muy grande, el cambio *fraccionario* de volumen es muy pequeño:

$$\Delta V/V_0 = (-8.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3)/(0.25 \text{ m}^3) = -0.0032 \text{ o } -0.32\%$$

Esfuerzo y tensión de corte

El tercer tipo de situación de esfuerzo-deformación se denomina *corte*. El listón de la figura 11.11c está sometido a un **esfuerzo de corte** o de *cizallamiento*: una parte del listón se está empujando hacia arriba mientras una parte adyacente se está empujando hacia abajo, lo que produce una deformación del listón. La figura 11.16 muestra un cuerpo deformado por un esfuerzo de corte. En la figura, fuerzas de igual magnitud pero dirección opuesta actúan de forma *tangente* a las superficies de extremos opuestos del objeto. Definimos el esfuerzo de corte como la fuerza F_{\parallel} que actúa tangente a la superficie, dividida entre el área A sobre la que actúa:

$$\text{Esfuerzo de corte} = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad (11.15)$$

El esfuerzo de corte, al igual que los otros dos tipos de esfuerzo, es una fuerza por unidad de área.

La figura 11.16 muestra que una cara del objeto sometido a esfuerzo de corte se desplaza una distancia x relativa a la cara opuesta. Definimos la **deformación de corte** como el cociente del desplazamiento x entre la dimensión transversal h :

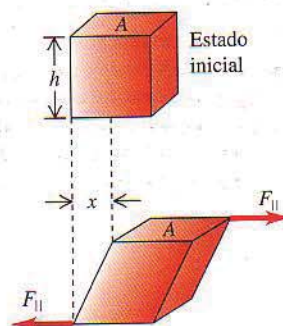
$$\text{Deformación de corte} = \frac{x}{h} \quad (11.16)$$

En situaciones reales, x casi siempre es mucho menor que h . Como todas las deformaciones, la de corte es un número adimensional: un cociente de dos longitudes.

Si las fuerzas son lo suficientemente pequeñas como para que se obedezca la ley de Hooke, la deformación de corte es *proporcional* al esfuerzo de corte. El módulo de elasticidad correspondiente (cociente del esfuerzo de corte entre la deformación de corte) se denomina **módulo de corte** (o de cizallamiento) y se denota por S :

$$S = \frac{\text{Esfuerzo de corte}}{\text{Deformación de corte}} = \frac{F_{\parallel}/A}{x/h} = \frac{F_{\parallel} h}{A x} \quad (\text{módulo de corte}) \quad (11.17)$$

con x y h definidos como en la figura 11.16.



$$\text{Esfuerzo de corte} = \frac{F_{\parallel}}{A}$$

$$\text{Deformación de corte} = \frac{x}{h}$$

11.16 Objeto sometido a un esfuerzo de corte. Se aplican fuerzas tangentes a superficies opuestas del objeto (en contraste con la situación de la figura 11.12, donde las fuerzas actúan perpendiculares a las superficies). Se ha exagerado la deformación x para claridad.

En la tabla 11.1 se dan varios valores de módulo de corte. Para un material dado, S suele ser de 1/3 a 1/2 mayor que el módulo de Young Y para el esfuerzo de tensión. Tenga presente que los conceptos de esfuerzo de: corte, deformación de corte y módulo de corte se aplican sólo a materiales *sólidos*. La razón es que las fuerzas de corte de la figura 11.16 deben deformar el bloque sólido, el cual tiende a regresar a su forma original si se eliminan las fuerzas de corte. Los gases y líquidos, en contraste, no tienen forma definida.

Ejemplo 11.8

Esfuerzo y deformación de corte

Suponga que el objeto de la figura 11.16 es la placa base de latón de una escultura exterior que experimenta fuerzas de corte causadas por un terremoto. La placa cuadrada mide 0.80 m por lado y tiene un espesor de 0.50 cm. ¿Qué fuerza debe ejercerse en cada borde si el desplazamiento x (véase la Fig. 11.16) es 0.16 mm?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Primero calculamos la deformación de corte empleando la ecuación (11.16); luego determinamos el esfuerzo de corte con la ecuación (11.17). Entonces podremos despejar la incógnita F_{\parallel} de la ecuación (11.15). Se dan los valores de todas las demás cantidades, incluido el módulo de corte del latón (de la tabla 11.1, $S = 3.5 \times 10^{10}$ Pa). Observe que h en la figura 11.16 representa la longitud de 0.80 m de cada lado de la placa cuadrada, mientras que el área A es el producto de la longitud de 0.80 m y el espesor de 0.50 cm.

EJECUTAR: La deformación de corte es

$$\text{Deformación de corte} = \frac{x}{h} = \frac{1.6 \times 10^{-4} \text{ m}}{0.80 \text{ m}} = 2.0 \times 10^{-4}$$

Por la ecuación (11.17), el esfuerzo de corte es igual a la deformación de corte multiplicada por el módulo de corte S ,

$$\begin{aligned} \text{Esfuerzo} &= (\text{Deformación de corte}) \times S \\ &= (2.0 \times 10^{-4})(3.5 \times 10^{10} \text{ Pa}) = 7.0 \times 10^6 \text{ Pa} \end{aligned}$$

(Por la ecuación 11.15), la fuerza en cada borde es el esfuerzo de corte multiplicado por el área del borde:

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &= (\text{Esfuerzo de corte}) \times A \\ &= (7.0 \times 10^6 \text{ Pa})(0.80 \text{ m})(0.0050 \text{ m}) = 2.8 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

EVALUAR: ¡La fuerza requerida es de más de tres toneladas! El latón tiene un módulo de corte grande, lo que implica que es intrínsecamente difícil de deformar. Además, la placa es relativamente gruesa (0.50 cm), así que el área A es relativamente grande y se requiere una fuerza F_{\parallel} grande para producir el esfuerzo necesario F_{\parallel}/A .

Evalúe su comprensión

¿Qué sufre mayor deformación por tensión: una varilla de cobre con área transversal de 0.500 cm^2 y longitud de 1.00 m que se alarga $2.00 \times 10^{-2} \text{ mm}$, o una varilla de acero con la misma área transversal pero longitud de 0.100 m que se alarga $2.00 \times 10^{-3} \text{ mm}$?

11.5 | Elasticidad y plasticidad

La ley de Hooke, la proporcionalidad del esfuerzo y la deformación elástica, tienen un intervalo de validez limitado. En las secciones anteriores usamos frases como “si las fuerzas son tan pequeñas que se obedece la ley de Hooke”. ¿Cuáles son exactamente las limitaciones de la ley de Hooke? Sabemos que: si tiramos de *cualquier cosa*, la aplastamos o la torcemos con suficiente fuerza, se doblará o romperá. ¿No podemos ser más precisos?

Examinemos de nuevo el esfuerzo y la deformación por tensión. Supongamos que graficamos el esfuerzo en función de la deformación. Si se obedece la ley de Hooke, la curva será una recta con pendiente igual al módulo de Young. La figura 11.17 muestra una curva esfuerzo-deformación típica de un metal como cobre o hierro blando. La deformación se muestra como *porcentaje* de alargamiento; la escala horizontal no es uniforme después de la primera porción de la curva, hasta una deformación menor que el 1%. La primera porción es una línea recta, lo que indica un comportamiento de ley de Hooke con el esfuerzo directamente propor-

cional a la deformación. Esta porción termina en el punto *a*; el esfuerzo en éste punto se denomina *límite proporcional*.

De *a* a *b*, el esfuerzo y la deformación ya no son proporcionales, y *no* se obedece la ley de Hooke. Si la carga se retira gradualmente, partiendo de cualquier punto entre *O* y *b*, la curva se sigue a la inversa hasta que el material recupera su longitud original. La deformación es *reversible*, y las fuerzas son conservativas; la energía introducida en el material para causar la deformación se recupera cuando se elimina el esfuerzo. En la región *Ob* decimos que el material tiene *comportamiento elástico*. El punto *b*, donde termina esta región, es el *punto de relajamiento*; el esfuerzo en éste punto se denomina *límite elástico*.

Si aumentamos el esfuerzo más allá del punto *b*, la deformación sigue aumentando, pero si retiramos la carga en un punto más allá de *b*, digamos *c*, el material no recupera su longitud original, sino que sigue la línea roja de la figura 11.17. La longitud con cero esfuerzo ahora es mayor que la original; el material sufrió una deformación irreversible y adquirió un *ajuste permanente* (*Incremento en la longitud inicial*). Un aumento de la carga más allá de *c* produce un aumento grande en la deformación con un incremento relativamente pequeño del esfuerzo, hasta llegar a un punto *d* en el que se presenta la *fractura*. El comportamiento del material entre *b* y *d* se denomina *flujo plástico* o *deformación plástica*. Una deformación plástica es irreversible; si se elimina el esfuerzo, el material no vuelve a su estado original.

En algunos materiales, se presenta una deformación plástica considerable entre el límite elástico y el punto de fractura. Decimos que tales materiales son *dúctiles*. En cambio, si la fractura se presenta poco después de rebasarse el límite elástico, decimos que el material es *quebradizo*. Un alambre de hierro blando que puede sufrir un estiramiento permanente considerable sin romperse es dúctil; una cuerda de acero de piano que se rompe poco después de alcanzar su límite elástico es quebradiza.

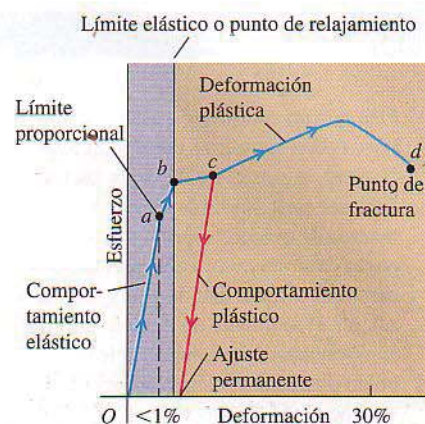
La figura 11.18 es una curva de esfuerzo-deformación de hule vulcanizado estirado a más de siete veces su longitud original. El esfuerzo no es proporcional a la deformación pero el comportamiento es elástico porque, al retirarse la carga, el material recupera su longitud original. Sin embargo, el material sigue curvas diferentes cuando aumenta y cuando disminuye el esfuerzo. Esto se denomina *histéresis elástica*. El trabajo efectuado por el material cuando recupera su forma original es menor que el requerido para deformarlo; hay fuerzas no conservativas asociadas a la fricción interna. El hule con histéresis elástica grande es muy útil para absorber vibraciones, como en las monturas de motores y bujes amortiguadores para auto.

El esfuerzo requerido para causar la fractura de un material se denomina *esfuerzo de rotura*, *resistencia límite* o (para el esfuerzo de tensión) *resistencia a la tensión*. Dos materiales, digamos dos tipos de acero, pueden tener constantes elásticas muy similares pero esfuerzos de rotura muy distintos. La tabla 11.3 presenta valores típicos de esfuerzo de rotura para varios materiales en tensión.

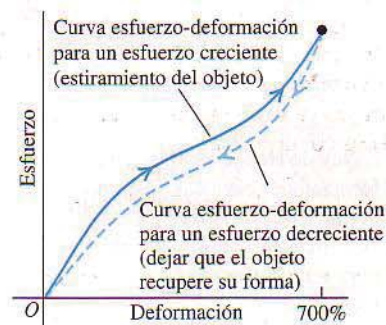
El factor de conversión $6.9 \times 10^8 \text{ Pa} = 100,000 \text{ psi}$ ayuda a poner éstos números en perspectiva. Por ejemplo, si el esfuerzo de rotura de cierto acero es de $6.9 \times 10^8 \text{ Pa}$, una barra con sección transversal de 1 pulg² tendrá una resistencia a la rotura de 100,000 lb.

Evalúe su comprensión

Imagine que, al estacionar su auto en una calle concurrida, golpea accidentalmente un poste de acero. Para examinar el daño, aleja un poco el auto del poste y se baja. ¿Qué aspecto tiene la defensa trasera si la deformación durante el impacto fue: (a) menor que en el límite proporcional; (b) mayor que en el límite proporcional pero menor que en el punto de relajamiento; (c) mayor que en el punto de relajamiento pero menor que en el punto de fractura, o (d) mayor que en el punto de fractura?



11.17 Diagrama de esfuerzo-deformación típico para un metal dúctil sometido a tensión.



11.18 Diagrama esfuerzo-deformación típico para hule vulcanizado. Las curvas son diferentes para un aumento y una disminución del esfuerzo; este fenómeno se denomina histéresis elástica.

Tabla 11.3 Esfuerzos de rotura aproximados de los materiales

Material	Esfuerzo de rotura (Pa o N/m ²)
Aluminio	2.2×10^8
Latón	4.7×10^8
Vidrio	10×10^8
Hierro	3.0×10^8
Bronce	
fosforado	5.6×10^8
Acero	$5-20 \times 10^8$