Capítulo 2. Matemáticas técnicas

Presentación PowerPoint de

Paul E. Tippens, Profesor de Física

Southern Polytechnic State University

Las MATEMÁTICAS son una herramienta esencial para el científico o ingeniero. Este capítulo es una revisión de las habilidades necesarias para entender y aplicar la física. Una revisión exhaustiva es esencial.

Matemáticas preparatorias

Nota: Este módulo se puede saltar con base en las necesidades del usuario.

En general, para la física introductoria se suponen geometría básica, álgebra, despeje de fórmulas, graficación, trigonometría y notación científica.

Si no está seguro, al menos recorra el repaso muy conciso de este módulo.

Objetivos: Después de completar este módulo, deberá:

- Sumar, restar, multiplicar y dividir mediciones signadas.
- Resolver y evaluar fórmulas simples para todos los parámetros en una ecuación.
- Problemas resueltos de notación científica.
- Construir y evaluar gráficas.
- Aplicar reglas de geometría y trigonometría.

Suma de números signados

- Para sumar dos números de igual signo, sume los valores absolutos de los números y asigne a la suma el signo común.

Ejemplo: Sumar (-6) a (-3)

$$(-3) + (-6) = -(3 + 6) = -9$$

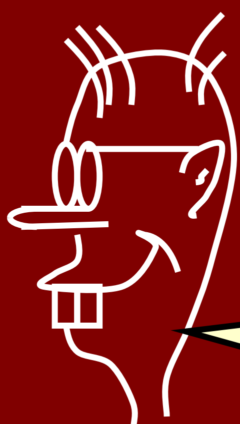
- Para sumar dos números de signo diferente, encuentre la diferencia de sus valores absolutos y asigne el signo del número más grande.

Ejemplo: Sumar (-6) a (+3).

$$(+3) + (-6) = -(6 - 3) = -3$$

Aritmética: ¡Vamos!, hombre…

¡Qué onda con esto! No tengo problemas con sumas y restas. ¡Esto es escuela elemental, hombre!



¡Números con signo!
¡Principal fuente de error!

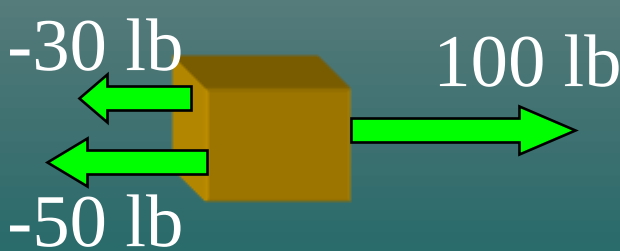
Ejemplo 1. Una fuerza dirigida a la derecha es positiva y una fuerza hacia la izquierda es negativa. ¿Cuál es la suma de A + B + C si A es 100 lb, derecha; B es 50 lb, izquierda; y C es 30 lb, izquierda.

Dados: A = + 100 lb; B = - 50 lb; C = -30 lb

A + B + C = (100 lb) + (-50 lb) + (-30 lb)

A + B + C = (100 lb) + (-50 lb) + (-30 lb)

A + B + C = +(100 lb - 50 lb - 30 lb)



A + B + C = +20 lb

Fuerza neta = 20 lb, derecha

Resta de números signados

- Para restar un número signado b de otro número signado a, cambie el signo de b y súmelo a a; use la regla de la suma.

Ejemplos: Restar (-6) de (-3):

$$(-3) - (-6) = -3 + 6 = +3$$

Restar (+6) de (-3):

$$(-3) - (+6) = -3 - 6 = -9$$

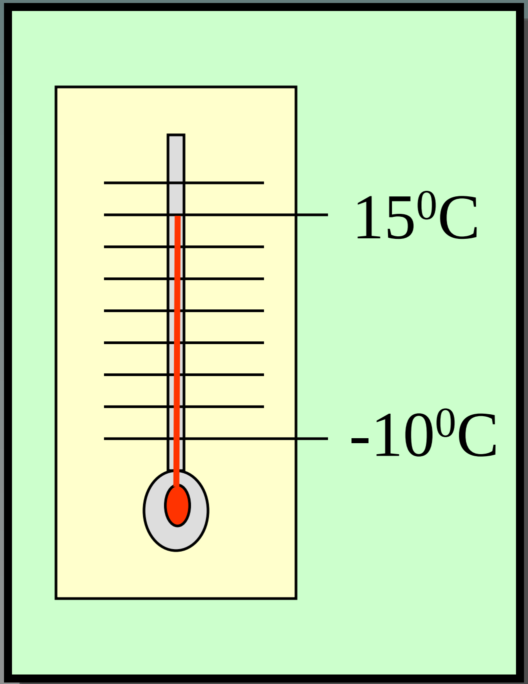
Ejemplo 2. En un día de invierno, la temperatura cae de 15^0C a una baja de -10^0C. ¿Cuál es el cambio en temperatura?

Dados: $t_0 = + 15^0\text{C}; \; t_f = - 10^0\text{C}$

$$\Delta t = t_f - t_0$$

$$\Delta t = (-10^0\text{C}) - (+15^0\text{C})$$
$$= -10^0\text{C} - 15^0\text{C} = -25\ \text{C}^0$$

$$\boxed{\Delta t = -25\ \text{C}^0}$$



¿Cuál es el cambio en temperatura si sube de nuevo a $+15^0$C?

$$\boxed{\Delta t = +25\ \text{C}^0}$$

Multiplicación: números signados

- Si dos números tienen signos iguales, su producto es positivo.
- Si dos números tienen signos distintos, su producto es negativo.

Ejemplos:

$$(-12)(-6) = +72 \; ; \quad (-12)(+6) = -72$$

Regla de división para números signados

- Si dos números tienen signos iguales, su cociente es positivo.
- Si dos números tienen signos distintos, su cociente es negativo.

Ejemplos:

$$\frac{(-72)}{(-6)} = +12; \qquad \frac{(-72)}{(+6)} = -12$$

Extensión de la regla por factores

- El resultado será positivo si todos los factores son positivos o si hay un número par de factores negativos.
- El resultado será negativo si hay un número impar de factores negativos.

Ejemplos:

$$\frac{(-2)(-4)}{-2} = -4\ ; \qquad \frac{(-2)(+4)(-3)}{(-2)(-1)} = +12$$

Ejemplo 3: Considere la siguiente fórmula y evalúe la expresión para x cuando a = -1, b = -2, c = 3, d = -4.

$$x = \frac{cba}{bc} + cd^2$$

$$x = \frac{(3)(-2)(-1)}{(-2)(3)} + (3)(-4)^2$$

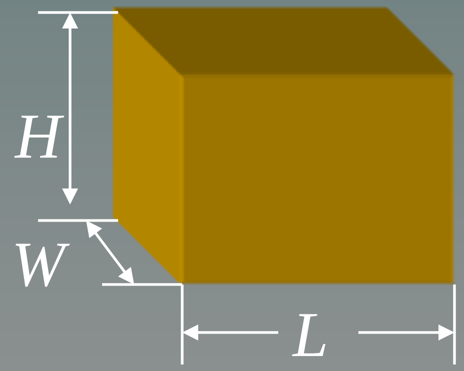
x = -1 + 48 → $\boxed{x = +47}$

Trabajo con fórmulas:

Muchas aplicaciones de la física requieren que uno resuelva y evalúe expresiones matemáticas llamadas fórmulas.

Considere, por ejemplo, el Volumen *V*:

$$V = LWH$$



Al aplicar leyes del álgebra, se puede resolver para *L*, *W* o *H*:

$$L = \frac{V}{WH} \qquad W = \frac{V}{LH} \qquad H = \frac{V}{LW}$$

Repaso de álgebra

Una fórmula expresa una igualdad, y dicha igualdad se debe conservar.

Si $x + 1 = 5$ entonces x debe ser igual a 4 para conservar la igualdad.

Cualquier cosa que se haga en un lado de la ecuación se debe hacer al otro para conservar la igualdad.

Por ejemplo:

- Sumar o restar el mismo valor en ambos lados.
- Multiplicar o dividir ambos lados por el mismo valor.
- Elevar al cuadrado o sacar la raíz cuadrada de ambos lados.

Álgebra con ecuaciones

Las fórmulas se pueden resolver al realizar una secuencia de operaciones idénticas en ambos lados de una igualdad.

- Se pueden sumar o restar términos de cada lado de una igualdad.

Restar 4 y sumar 6 a cada lado

$$x + \cancel{4} - \cancel{6} = 2 \quad \text{(Ejemplo)}$$

$$-\cancel{4} + \cancel{6} = -4 + 6$$

$$x = 2 - 4 + 6$$

$$\boxed{x = +4}$$

Ecuaciones (*cont.*)

- Cada término en ambos lados se puede multiplicar o dividir por el mismo factor.

$$\frac{x}{5} = 4; \qquad \frac{5x}{5} = 4 \cdot 5; \qquad x = 20$$

$$5x = 15; \qquad \frac{5x}{5} = \frac{15}{5}; \qquad x = 3$$

$$2x - 6 = 4; \qquad \frac{2x}{2} - \frac{6}{2} = \frac{4}{2}; \qquad x - 3 = 2; \qquad x = 5$$

Ecuaciones (*cont.*)

- Las mismas reglas se pueden aplicar a ecuaciones literales (a veces llamadas fórmulas).

Resuelva para g: $F = m_2 g - m_1 g$

Aísle g al factorizar: $F = g(m_2 - m_1)$

Divida ambos lados por: $(m_2 - m_1)$

Resuelto para g: $g = \dfrac{F}{(m_2 - m_1)}$

Ecuaciones (*cont.*)

- Ahora observe uno más difícil. (Todo lo que se necesita es aislar la incógnita.)

$$F = mg + \frac{mv^2}{R}; \quad \text{resuelva para } g$$

Reste $\frac{mv^2}{R}$:
$$F - \frac{mv^2}{R} = mg$$

Divida entre m:
$$\frac{F}{m} - \frac{v^2}{R} = g$$

Resuelto para g: $g = \frac{F}{m} - \frac{v^2}{R}$

Ecuaciones (*cont.*)

- Cada lado se puede elevar a una potencia o se puede sacar la raíz de cada lado.

$$F = mg + \frac{mv^2}{R} \quad ; \quad \text{resuelva para } v$$

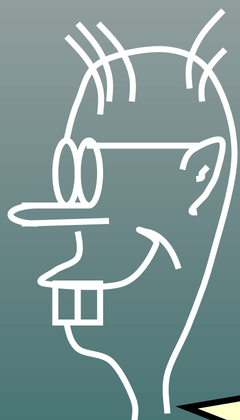
Reste *mg*: $F - mg = \frac{mv^2}{R}$

Divida por m; multiplique por *R*: $\frac{FR}{m} - gR = v^2$

Resuelto para v: $v = \sqrt{\frac{FR}{m} - gR}$

¡Esto se pone más duro!

Hombre... La aritmética es una cosa, pero necesitaré ayuda para resolver esas letras.



Calma, la mayoría de las fórmulas físicas son simples

Reordenamiento de fórmulas

Considere la siguiente fórmula:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Multiplique por *B* para resolver para *A*:

$$\frac{\cancel{B}A}{\cancel{B}} = \frac{BC}{D}$$

Note que *B* se movió arriba a la derecha.

$$\frac{A}{1} = \frac{BC}{D}$$

Por tanto, la solución para *A* es:

$$\boxed{A = \frac{BC}{D}}$$

Ahora resuelva para *D*

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

1. Multiplique por *D*

$$\frac{DA}{B} = \frac{\cancel{D}C}{\cancel{D}}$$

2. Divida por *A*

$$\frac{\cancel{D}A}{\cancel{A}B} = \frac{C}{A}$$

3. Multiplique por *B*

$$\frac{\cancel{B}D}{\cancel{B}} = \frac{BC}{A}$$

4. Solución para *D*

$$D = \frac{BC}{A}$$

D se mueve arriba a la izquierda.

B se mueve arriba a la derecha.

A se mueve abajo a la derecha.

Entonces se aísla *D*.

Cruces para factores

Cuando en una fórmula sólo hay dos términos separados por un signo igual, se pueden usar los cruces.

$$\frac{AB}{C} = \frac{DE}{F}$$

¡Cruces sólo para factores!

A continuación se dan ejemplos de soluciones:

$$\frac{A}{1} = \frac{CDE}{BF} \qquad \frac{F}{1} = \frac{CDE}{AB} \qquad \frac{ABF}{CE} = \frac{D}{1}$$

Ejemplo 4: Resolver para *n*.

$$PV = nRT \;\Rightarrow\; \frac{PV}{1} = \frac{nRT}{1}$$

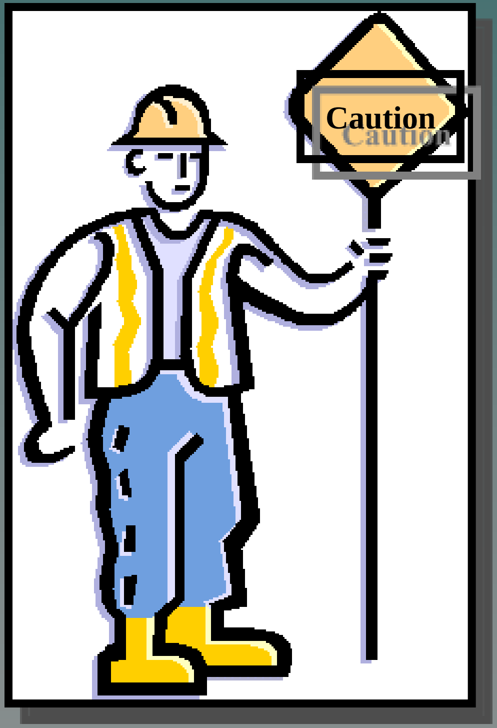
$$\frac{PV}{RT} = \frac{n\cancel{R}\cancel{T}}{1} \qquad \frac{PV}{RT} = \frac{n}{1}$$

$$\boxed{n = \frac{PV}{RT}}$$

SEÑAL DE ADVERTENCIA PARA CRUCES

¡El método de cruces SÓLO funciona para FACTORES!

$$\frac{a(b+c)}{d} = \frac{e}{f}$$



La *c* no se puede mover a menos que se mueva todo el factor *(b + c)*.

Solución para a:

$$\boxed{a = \frac{ed}{(b+c)f}}$$

Ejemplo 5: Resolver para *f*.

$$\frac{a(b+c)}{d} = \frac{e}{f}$$

Primero mueva *f* para tenerlo en el numerador.

$$\frac{af(b+c)}{d} = \frac{e}{}$$

A continuación mueva a, d y (b + c)

$$\boxed{f = \frac{ed}{a(b+c)}}$$

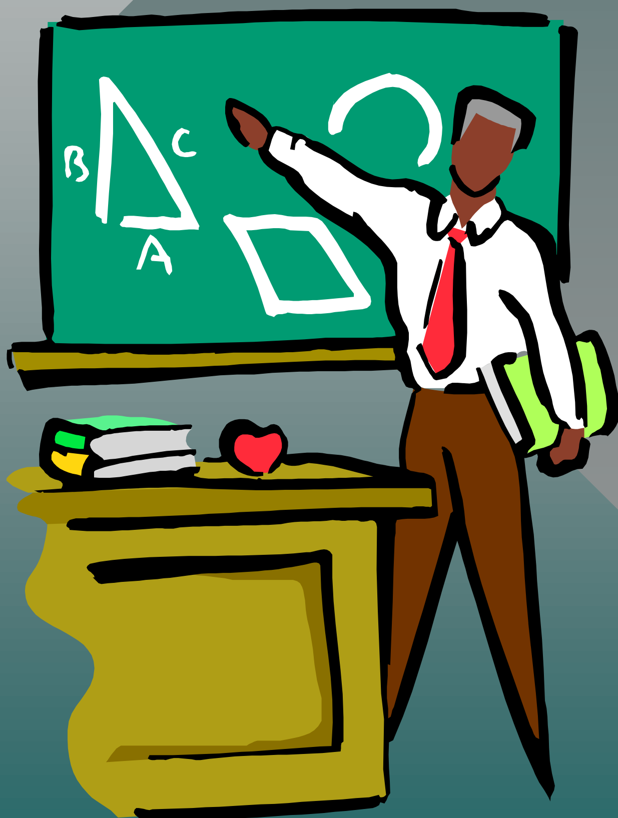
Cuándo usar cruces:

1. Los cruces sólo funcionan cuando una fórmula tiene UN término en cada lado de una igualdad.

$$\frac{AB}{C} = \frac{DE}{F}$$

2. ¡Sólo se pueden mover FACTORES!

AVISO: ¡NO MUESTRE ESTE MÉTODO DE "CRUCES" A UN MAESTRO DE MATEMÁTICAS!



Use la técnica porque funciona y es efectiva. Reconozca los problemas de confundir factores con términos.

PERO... No espere que le guste a todos los profesores. Utilícela en secreto y no le diga a nadie.

Con frecuencia es necesario usar exponentes en aplicaciones físicas

$$E = mc^2$$

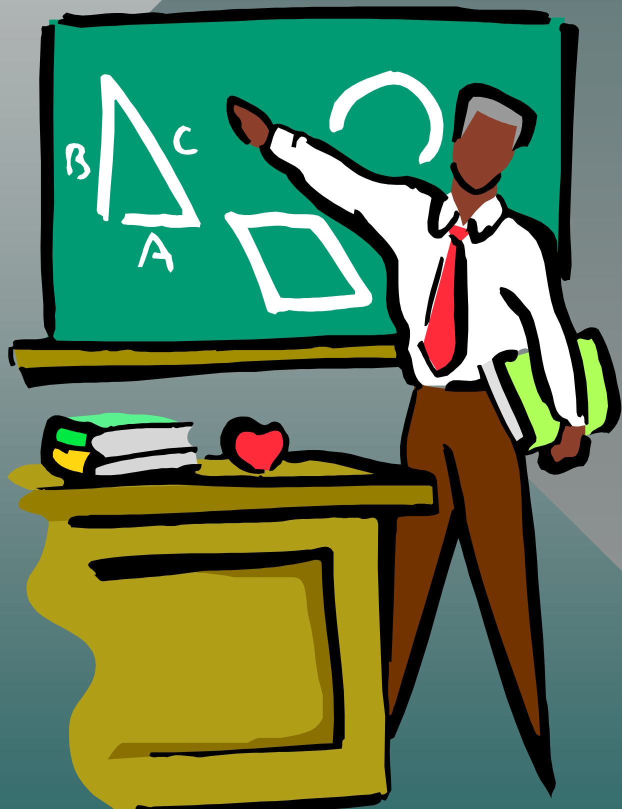
$$E = m\ (c \cdot c)$$

El exponente "2" significa "c" por "c"

El volumen de un cubo de lado x es "x • x • x" o

$$V = x^3$$

¡ Camino escabroso por delante !



Las reglas de exponentes y radicales son difíciles de aplicar, pero necesarias en notación física.

Por favor, ábrase paso a través de esta revisión; pida ayuda si es necesario.

Exponentes y radicales Reglas de multiplicación

Cuando se multiplican dos cantidades de la misma base, su producto se obtiene al sumar algebraicamente los exponentes.

$$(a^m)(a^n) = a^{m+n}$$

Ejemplos:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 \qquad x \cdot x^4 = x^{1+5} = x^6$$

Reglas de exponentes

Exponente negativo: Un término distinto de cero puede tener un exponente negativo como se define a continuación:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{or} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Ejemplos:

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0.25 \qquad \frac{x^{-2}y^3}{y^{-4}} = \frac{y^3y^4}{x^2} = \frac{y^7}{x^2}$$

Exponentes y radicales
Exponente cero

<u>Exponente cero:</u> Cualquier cantidad elevada a la potencia cero es igual a 1.

El exponente cero: $a^0 = 1$

SÍ, es correcto

¡CUALQUIER COSA!
Elevada a la potencia cero es "1"

$^{0} = 1$

Exponentes y radicales Exponente cero

Exponente cero: Considere los siguientes ejemplos para exponentes cero.

El exponente cero: $a^0 = 1$

$$x^0 y^3 z^0 = y^3$$

$$\frac{\left(\frac{x^3}{y^{-4}}\right)^0}{3z^0} = \frac{1}{3} = 0.333$$

Otras reglas de exponentes

Regla de división: Cuando se dividen dos cantidades de la misma base, su cociente se obtiene al restar algebraicamente los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^4 y^2}{x y^5} = \frac{x^{4-1} y^{2-5}}{1} = \frac{x^3 y^{-3}}{1} = \frac{x^3}{y^3}$$

Reglas de exponentes (*cont.*):

Potencia de una potencia:
Cuando una cantidad a^m se eleva a la potencia *m*:

$$a^{m}\;{}^{n} = a^{mn}$$

Ejemplos:

$$(x^3)^5 = x^{(5)(3)} = x^{15}; \quad (q^{-2})^{-3} = q^{+6}$$

Reglas de exponentes (*cont.*):

Potencia de un producto: Se obtiene al aplicar el exponente a cada uno de los factores.

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Ejemplo:

$$(x^3 y^{-2})^4 = x^{(3)(4)} y^{(-2)(4)} = x^{12} y^{-8} = \frac{x^{12}}{y^8}$$

Reglas de exponentes (*cont.*):

Potencia de un cociente: Se obtiene al aplicar el exponente a cada uno de los factores.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a^n}{b^n}\right)$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{x^3y^{-2}}{qp^{-3}}\right)^3 = \frac{x^9y^{-6}}{q^3p^{-9}} = \frac{x^9p^9}{q^3y^6}$$

Raíces y radicales

Raíces de un producto: La *n*-ésima raíz de un producto es igual al producto de las *n*-ésimas raíces de cada factor.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$$

Raíces y radicales (*cont.*)

Raíces de una potencia: Las raíces de una potencia se encuentran con la definición de exponentes fraccionarios:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{x^{16}y^{12}} = x^{16/4}y^{12/4} = x^4y^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^6y^3}{z^9}} = \frac{x^{6/3}y^{3/3}}{z^{9/3}} = \frac{x^2y}{z^3}$$

Notación científica

La **notación científica** proporciona un método abreviado para expresar números o muy pequeños o muy grandes.

$$0.000000001 = 10^{-9}$$

$$0.000001 = 10^{-6}$$

$$0.001 = 10^{-3}$$

$$1 = 10^{0}$$

$$1000 = 10^{3}$$

$$1{,}000{,}000 = 10^{6}$$

$$1{,}000{,}000{,}000 = 10^{9}$$

Ejemplos:

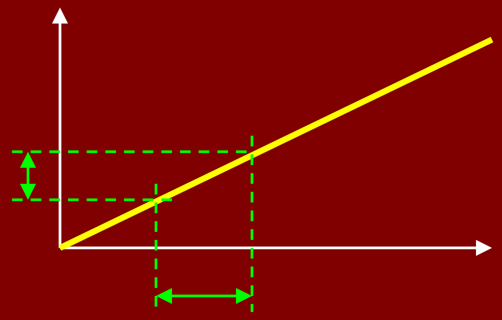
$$93{,}000{,}000 \text{ mi} = 9.30 \text{ x } 10^{7} \text{ mi}$$

$$0.00457 \text{ m} = 4.57 \text{ x } 10^{-3} \text{ m}$$

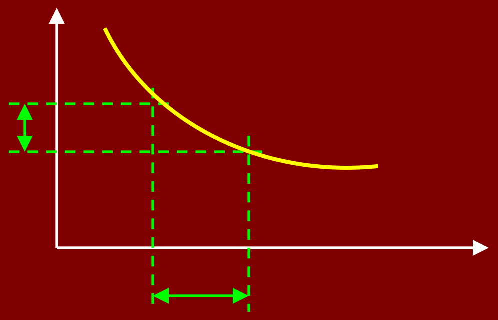
$$v = \frac{876 \text{ m}}{0.0037 \text{ s}} = \frac{8.76 \text{ x } 10^{2} \text{m}}{3.7 \text{ x } 10^{-3} \text{s}}$$

$$\boxed{v = 3.24 \text{ x } 10^{5} \text{ m/s}}$$

Gráficas



Relación directa



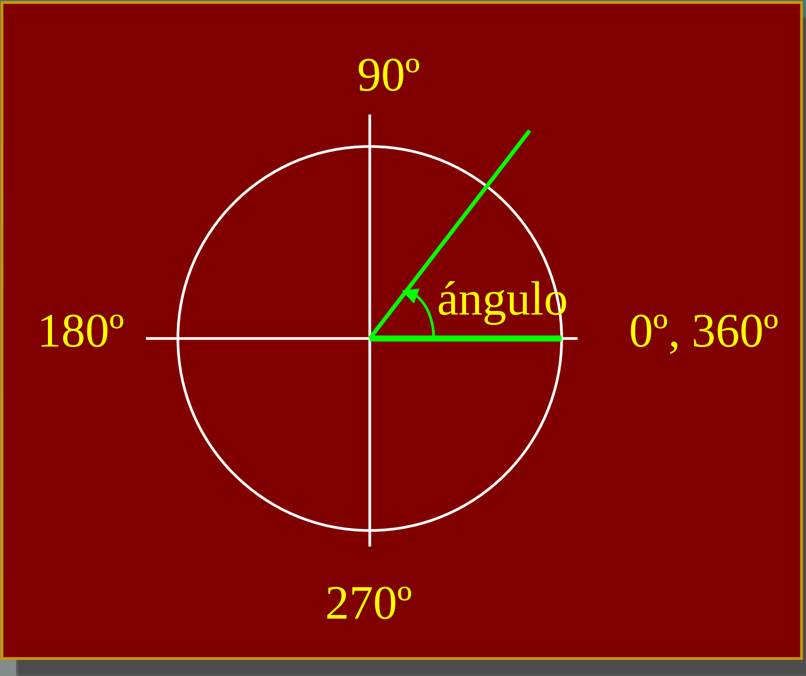
Relación indirecta

Valores **crecientes** en el eje horizontal causan un **aumento** proporcional en los valores del eje vertical.

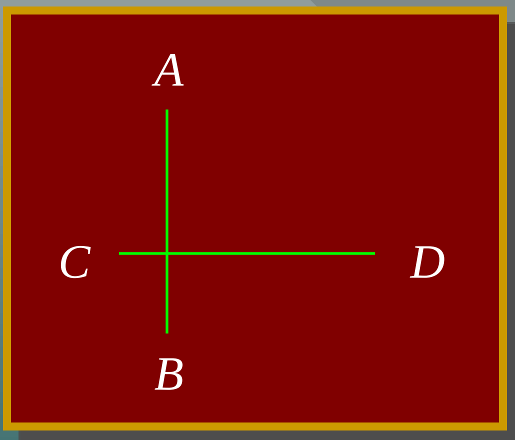
Valores **crecientes** en el eje horizontal causan una **disminución** proporcional en los valores del eje horizontal.

Geometría

Los **ángulos** se miden en términos de grados, de **0°** a **360º.**



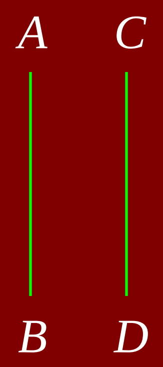
Línea ***AB*** es **perpendicular** a línea ***CD***



$$AB \perp CD$$

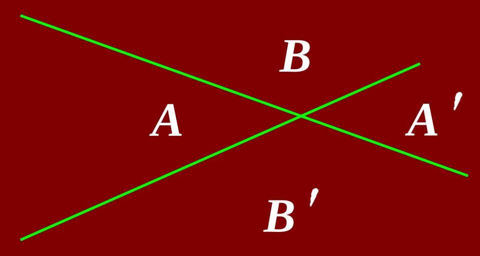
Línea ***AB*** es **paralela** a línea ***CD***

$$AB \parallel CD$$



Geometría (*cont.*)

Cuando dos líneas rectas intersecan, forman ángulos opuestos iguales.



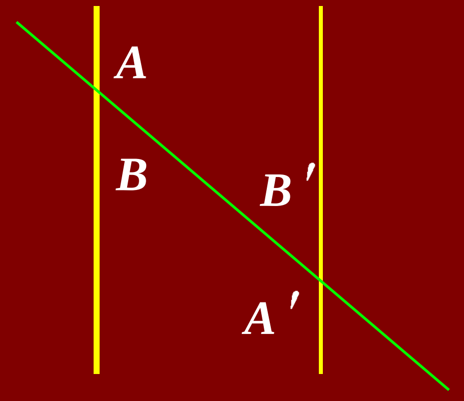
ángulo A = ángulo A'

ángulo B = ángulo B'

Cuando una línea recta interseca dos líneas paralelas, los ángulos internos alternos son iguales.

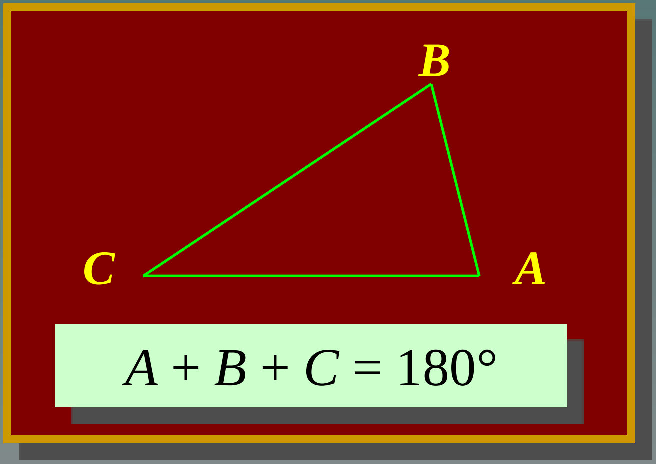
ángulo A = ángulo A'

ángulo B = ángulo B'

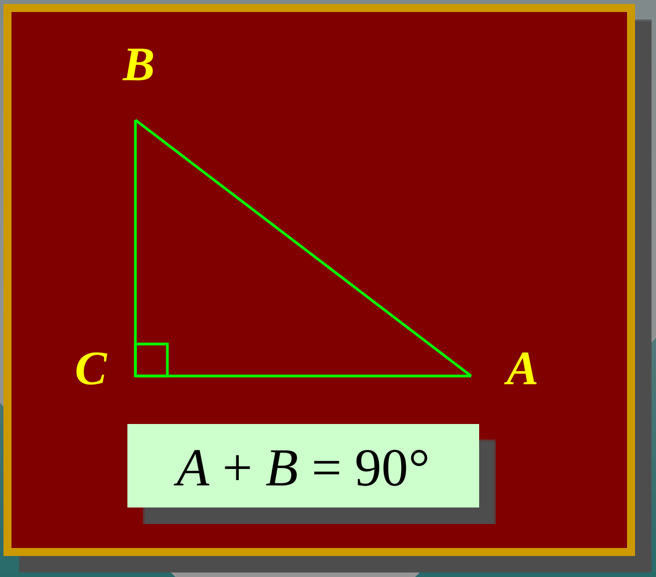


Geometría (*cont.*)

Para todo triángulo, la suma de los ángulos internos es 180º

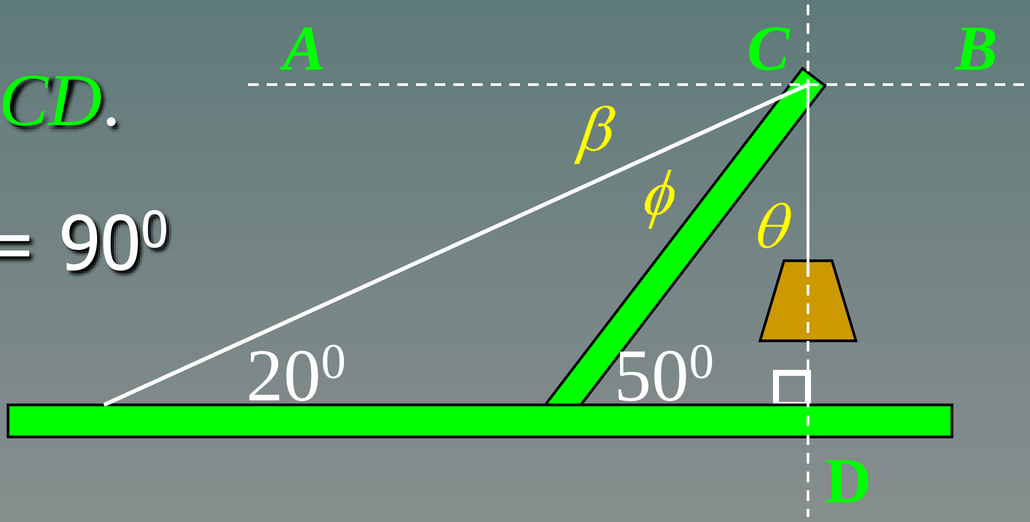


Para todo triángulo recto, la suma de los dos ángulos más pequeños es 90º



Ejemplo 6: Use geometría para determinar en la figura los ángulos desconocidos ϕ y θ.

1. Dibuje líneas auxiliares *AB* y *CD*.



2. Note: $\theta + 50^0 = 90^0$

$$\boxed{\theta = 40^0}$$

3. Ángulos internos alternos son iguales: $\beta = 20^0$

4. *ACD* es ángulo recto: $\beta + \phi + \theta = 90^0$

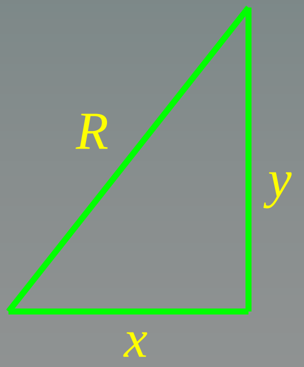
$$20^0 + \phi + 40^0 = 90^0$$

$$\boxed{\phi = 30^0}$$

Trigonometría de triángulo recto

Con frecuencia, los ángulos se representan con letras griegas:

α alfa	β beta	γ gamma
θ theta	ϕ phi	δ delta



Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

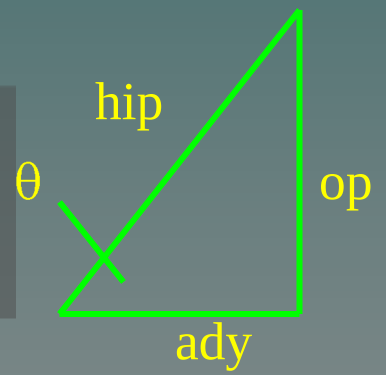
$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Trigonometría de triángulo recto

El valor seno de un triángulo recto es igual a la razón de la longitud del lado opuesto al ángulo, a la longitud de la hipotenusa del triángulo.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{Op}{Hip}$$



El valor coseno de un triángulo recto es igual a la razón de la longitud del lado adyacente al ángulo, a la longitud de la hipotenusa del triángulo.

$$\cos\theta = \frac{Ady}{Hip}$$

El valor tangente de un triángulo recto es igual a la razón de la longitud del lado opuesto al ángulo, al lado adyacente al ángulo.

$$\tan\theta = \frac{Op}{Ady}$$

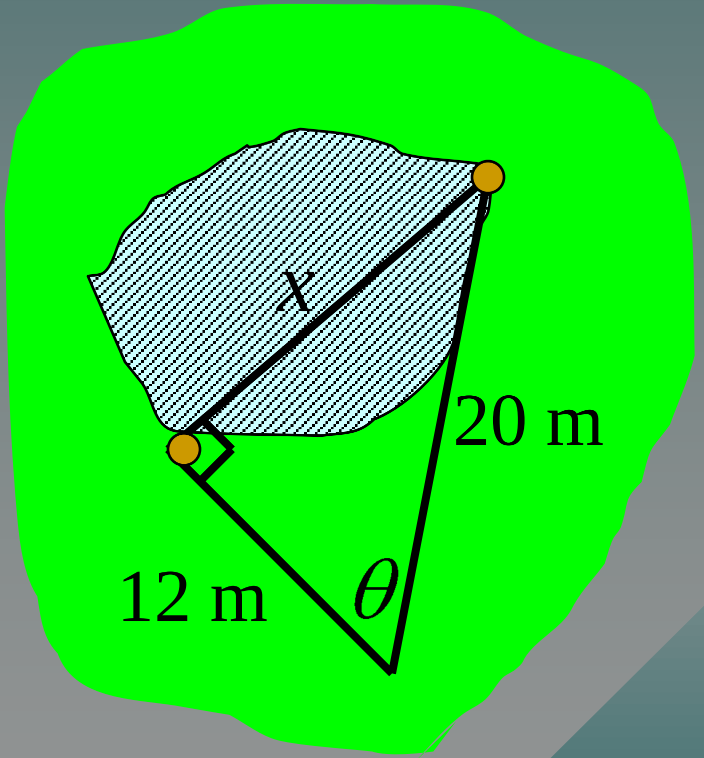
Ejemplo 5: ¿Cuál es la distancia *x* a través del lago y cuál el ángulo θ?

R = 20 m es la hipotenusa. Por el teorema de Pitágoras:

$$(20)^2 = x^2 + (12)^2$$

$$x = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256}$$

$$\boxed{x = 16 \text{ m}}$$



$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} \qquad \frac{12 \text{ m}}{20 \text{ m}}$$

$$\boxed{\theta = 53.1^0}$$

Resumen

- Para sumar dos números de igual signo, sume los valores absolutos de los números y asigne a la suma el signo común.
- Para sumar dos números de signo distinto, encuentre la diferencia de sus valores absolutos y asigne el signo del número más grande.
- Para restar un número signado *b* de otro número signado *a*, cambie el signo de *b* y súmelo a *a*, con la regla de la suma.

Resumen (*cont.*)

- Si dos números tienen signos iguales, su producto es positivo.
- Si dos números tienen signos distintos, su producto es negativo.
- El resultado será positivo si todos los factores son positivos o si hay un número par de factores negativos.
- El resultado será negativo si hay un número impar de factores negativos.

Resumen

Trabajo con ecuaciones:

- Sume o reste el mismo valor a ambos lados.
- Multiplique o divida ambos lados por el mismo valor.
- Eleve al cuadrado o saque raíz cuadrada a ambos lados.

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$(a^m)(a^n) = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$${a^m}^{\;n} = a^{mn}$$

Resumen (*cont.*)

$$ab^{\,m} = a^m b^m \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

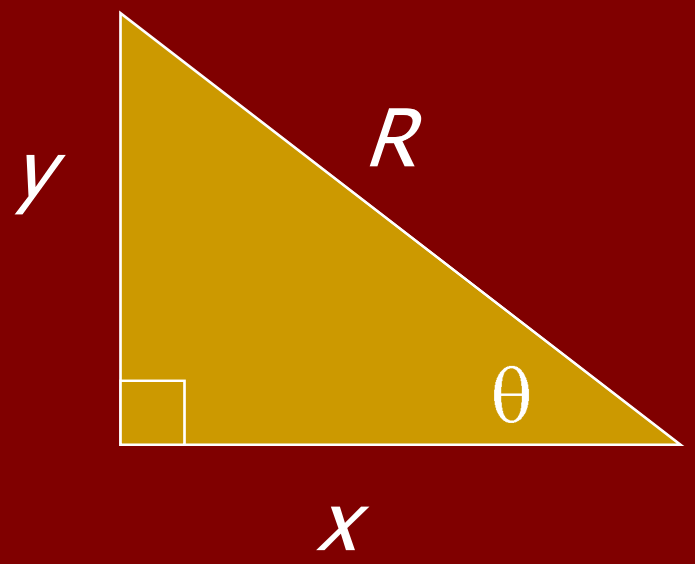
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a^n}{b^n}\right) \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Revise las secciones acerca de notación científica, geometría, gráficas y trigonometría según requiera.

Repaso de trigonometría

- Se espera que sepa lo siguiente:

Trigonometría



$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{R}$$

$$\boxed{y = R\,\text{sen}\,\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{R}$$

$$\boxed{x = R\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{R^2 = x^2 + y^2}$$

Conclusión del Capítulo 2 Matemáticas técnicas