DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL INCREMENTO.

Definición
Una función f es diferenciable en un punto $P_0(x_0, y_0)$ (de su dominio) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple que el incremento $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ verifica:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

en la cual las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ cumplen

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Teorema del incremento
Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene al punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Demostración: Consideremos Δx y Δy[1] lo suficientemente pequeños como para que toda la región rectangular con vértices (x_0, y_0), $(x_0 + \Delta x, y_0)$, $(x_0, y_0 + \Delta y)$ y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ esté incluida en R. Entonces el incremento en el valor de la función f, cuando se pasa del punto (x_0, y_0) al punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ es:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \quad \text{(restamos y sumamos } f(x_0 + \Delta x, y_0))\end{aligned} \tag{1}$$

Consideramos la función $f(x_0 + \Delta x, \cdot)$ que es sólo función de y, es decir, es una función de una variable. Observemos que esta función satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio para funciones de una variable: según la hipótesis, existen las derivadas parciales f_x y f_y en toda la región R; así, existe la derivada de la función de una variable $f(x_0 + \Delta x, \cdot)$ para todos los valores de y tales que el punto $(x_0 + \Delta x, y)$ pertenezca a R. En particular, $f(x_0 + \Delta x, \cdot)$ es derivable para todos los y del intervalo $[y_0, y_0 + \Delta y]$. Luego, también es continua en dicho intervalo. Así vemos que podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a la función $f(x_0 + \Delta x, \cdot)$ en el intervalo $[y_0, y_0 + \Delta y]$ y concluimos que existe un valor d en $(y_0, y_0 + \Delta y)$ tal que

$$f_y(x_0 + \Delta x, d) = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y}$$

es decir

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y. \tag{2}$$

Notemos que (2) nos da una expresión equivalente a los dos primeros términos de (1). De manera análoga[2], considerando ahora la función de una variable real $f(\cdot, y_0)$, concluimos que existe $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ tal que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0)\Delta x. \tag{3}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)\\ &= f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y + f_x(c, y_0)\Delta x\\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y.\end{aligned} \tag{4}$$

Los valores $f_x(c, y_0)$ y $f_x(x_0, y_0)$ no tienen por qué coincidir. Lo mismo ocurre con $f_y(x_0 + \Delta x, d)$ y $f_y(x_0, y_0)$. En general tendremos:

$$\begin{aligned}f_x(c, y_0) &= f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1 \quad \text{y}\\ f_y(x_0 + \Delta x, d) &= f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2,\end{aligned}$$

donde ε_1 y ε_2 son funciones que dan cuenta del error. Como $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, c depende de Δx y $\varepsilon_1 = f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0)$, también. Por otra parte, como $d \in (y_0, y_0 + \Delta y)$, d depende de Δy y $\varepsilon_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0)$ depende tanto de Δx como de Δy. Por ello, consideramos que ambos errores son funciones de Δx y de Δy:

$$\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0) \text{ y } \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0).$$

[1] En rigor los valores Δx y Δy podrían ser positivos o negativos ya que finalmente los haremos tender a cero; pero para acortar nuestro texto los trataremos como positivos.
[2] Ud. debe completar los detalles.

Sustituyendo en (4), obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0) &= f_x(c,y_0)\Delta x + f_y(x_0+\Delta x,d)\Delta y\\ &= \left(f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\right)\Delta x + \left(f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\right)\Delta y\\ &= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y.\end{aligned}$$

Si bien esta última expresión es la que encontramos en la definición de función diferenciable, falta aún probar que los errores ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.

Para probar esto, ahora aplicamos la continuidad de las derivadas parciales f_x y f_y en (x_0,y_0) que tenemos por hipótesis: por ser f_x continua en (x_0,y_0), podemos asegurar que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(f_x(c,y_0)-f_x(x_0,y_0)\right) = 0;$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(f_y(x_0+\Delta x,d)-f_y(x_0,y_0)\right) = 0.$$

Recién ahora hemos terminado de probar que f es diferenciable en (x_0,y_0).