1. Ejercicio 35, TP 2

Sea $T = T(x, y)$ la temperatura en el punto (x, y) de la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y suponga que:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y, \ \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x.$$

Encuentre dónde ocurren las temperaturas máxima y mínima en la circunferencia, examinando las derivadas $\frac{dT}{dt}$ y $\frac{d^2T}{dt^2}$.

Resolución: si conociésemos la expresión de $T(x, y)$ podríamos componerla con $r(t) = (cos(t), sen(t))$ y así obtener una nueva función de una variable real $w(t) = T(r(t))$ para encontrar máximos y mínimos, sin embargo podemos utilizar el echo de conocer T_x y T_y. Para ello obtengamos $\frac{dw}{dt}$ utilizando regla de la cadena:

$$\frac{dw}{dt} = T_x(x, y)\frac{dx}{dt} + T_y(x, y)\frac{dy}{dt} = (8x - 4y)(-sen(t)) + (8y - 4x)(cos(t))$$

sabiendo que $x = cos(t)$ y $y = sen(t)$ podemos sustituir en la última expresión:

$$\frac{dw}{dt} = (8cos(t) - 4sen(t))(-sen(t) + (8sen(t) - 4cos(t))(cos(t)$$

como estamos buscando puntos críticos de una función de una variable real hacemos:

$$(8cos(t) - 4sen(t))(-sen(t) + (8sen(t) - 4cos(t))(cos(t) = 0$$

o equivalentemente $tan^2(t) = 1$

y obtenemos cuatro puntos críticos: $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$. Para determinar si w alcanza un máximo o mínimo en estos puntos analizamos el signo de la derivada segunda: $\frac{d^2w}{dt^2} = 16cos(t)sen(t)$

Al evaluar la derivada segunda en los cuatro puntos vemos que en $t = \pi/4$ y $t = 5\pi/4$ la función w alcanza mínimos y en $t = 3\pi/4$ y $t = 7\pi/4$ alcanza máximos.