TRABAJO PRÁCTICO 2 - EJERCICIO 53 a

53) a) Se desea estudiar si la ecuación $2x-3y^2+xz=1$ define a z implícitamente como una función de x y de y. Para ello, considere la función $F(x,y,z) = 2x-3y^2+xz$ y, analizando las condiciones correspondientes, verifique que $F(x,y,z)=1$ define a z implícitamente como función de x y de y en un entorno de $(1,-1,2)$. (Ayuda: página 781 del libro de Thomas.)

Solución: En la clase de Teoría vimos un Teorema que dice:

> Si F es una función de tres variables y las derivadas parciales F_x, F_y y F_z son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0,y_0,z_0) y si $F(x_0,y_0,z_0)=c$, para alguna constante c, y si $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x,y,z)=c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de (x_0,y_0) y las derivadas parciales de esta función z están dadas por
>
> $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}; \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

En este ejemplo, tenemos $F(x,y,z) = 2x-3y^2+xz$ y $P_0(x_0,y_0,z_0) = (1,-1,2)$. También teenmos que las derivadas parciales

$$F_x(x,y,z) = 2+z; \quad F-y(x,y,z) = -6y; \quad F_z(x,y,z) = x,$$

son continuas en $\mathbb{R}^3$ (región abierta $R \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0,y_0,z_0)); $F(P_0) = F(1,-1,2) = 1$ y $F_z(1,-1,2) = 1 \neq 0$. Luego, en virtud del teorema anterior, la ecuación $2x-3y^2+xz=1$ $(F(x,y,z)=c)$ define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de $(x_0,y_0) = (1,-1)$.

b) A la luz de lo concluido en el ítem anterior, calcule la derivada de f en la dirección de $\vec{\mathbf{v}} = (2,-1)$ en el punto $(1,-1)$. (Ayuda: página 780 del libro de Thomas.)

Según el Teorema anterior, $f_x(1,-1) = -4$ y $f_y(1,-1) = -6$; ambas derivadas parciales son continuas de manera que la función f es diferenciable y la derivada direccional se puede calcular haciendo un producto escalar:

$$D_{\mathbf{u}}f(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = (-4,-6) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$