Ejercicio 73:
Maximice la función $f(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2$ sujeta a las restricciones $2x-y=0$ y $y+z=0$.

Llamamos g y h a las funciones que dan las restricciones y hacemos un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange, de la forma

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) & =\lambda\nabla g(x,y,z)+\mu\nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) & =0 \\ h(x,y,z) & =0 \end{cases}$$

y obtenemos:

$$\begin{cases} 2x & =\lambda 2+\mu 0 \\ 4y & =\lambda(-1)+\mu 1 \\ -2z & =\lambda 0+\mu 1 \\ 2x-y & =0 \\ y+z & =0 \end{cases}$$

que es un Sistema de Ecuaciones Lineales. Su única solución es $(0,0,0,0,0)$ (aplique sus conocimientos de álgebra). Esto nos deja con un único punto crítico: $(0,0,0)$. No sabemos si en este punto f alcanza un máximo o un mínimo. Usualmente en casos como este, el enunciado nos ayuda. En este caso, HAY UN ERROR EN EL ENUNCIADO y f presenta en el origen un mínimo. ¿Cómo lo sabemos?

Sustituyendo las dos condiciones

$$2x=y,\ \text{es decir},\ x=\frac{y}{2}$$

y

$$z=-y,$$

en la expresión de la función f, tenemos:

$$f(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2=\frac{y^2}{4}+2y^2-y^2=\frac{5}{4}y^2$$

y esa expresión nos muestra que f asume su valor MÍNIMO en el origen, mientras que CRECE para todo otro punto de la restricción. De manera que f asume en $(0,0,0)$ su valor mínimo y no tiene máximo entre los puntos tales que $2x-y=0$ y $y+z=0$.