1 Ejercicio 57-c

Pide enunciar (no calcular) la integral iterada $\int\int\int_D f(r,\theta,z)rdzdrd\theta$ de la región comprendida entre dos cilindros y dos planos.

Cuando planteamos una integral triple, suele ser conveniente trazar dos diagramas: una de la región sólida D (que en este es dato del problema) y otro de su proyección sobre el plano xy.

En la Figura 1 se muestran ambos diagramas. Notar que $r = 2cos\theta$ es la ecuación de una circunferencia de radio 1 centrada en $(1,0)$ y $r = cos\theta$ es una circunferencia de radio 1/2 con centro en $(1/2,0)$. Si le cuesta reconocer circunferencias en estas ecuaciones, por favor vaya al final del ejercicio donde se explica cómo.

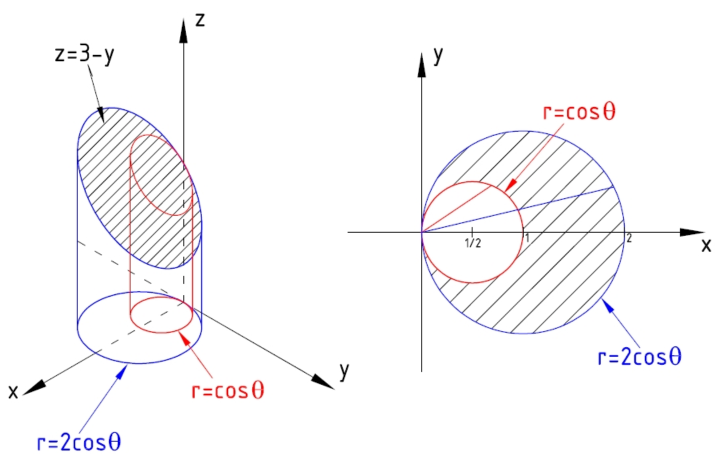

Figure 1:

Por lo simetría del problema, la integral está en coodenadas cilíndricas y por ende, debemos encontrar los límites de integración en términos de las variables z, r y θ. En este caso, lo más fácil de determinar posiblmente sea z que, por el diagrama de la región D, se ve que toma valores desde el plano $z = 0$ hasta el plano inclinado $z = 3 - y$, es decir:

$$0 \leq z \leq 3 - rsen\theta$$

Para determinar los valores que toman r y θ, conviene analizar la proyección de D en el plano. En ella se ve que θ barre el primer y cuarto cuadrante, por lo que:

$$\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Así mismo, se ve que r mínimo está delimitado por la circunferencia pequeña $r = cos\theta$ (segmento rojo) mientras que r máximo está delimitado por $r = 2cos\theta$ (segmento azul). Luego,

$$cos\theta \leq r \leq 2cos\theta$$

Finalmente, tenemos que la integral pedida es:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{cos\theta}^{2cos\theta} \int_{0}^{3-rcos\theta} f(r,\theta,z) r dz dr d\theta \tag{1}$$

Si Ud. ya tiene claro cómo pasar la ecuación de una circunferencia de coordenadas rectangulares a polares, aquí terminó el ejercicio. Sin embargo, si se perdió en el segundo párrafo, por favor no deje de leer este repaso:

La ecuación de una circunferencia con centro en (a, b) y radio R en coordenadas rectangulares es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Reescribiendo x e y en polares se tiene que:

$$(rcos\theta - a)^2 + (rsen\theta - b)^2 = R^2$$
$$r^2cos^2\theta + a^2 - 2arcos\theta + r^2sen^2\theta - 2brsen\theta + b^2 = R^2$$
$$r^2 - 2arcos\theta - 2brsen\theta = R^2 - a^2 - b^2 \tag{2}$$

Luego, si $b = 0$ y $R = a$, como es el caso del problema que aquí nos atañe, la Ec.(2) queda:

$$r^2 - 2arcos\theta = 0$$

Despejando,

$$r = 2acos\theta \tag{3}$$

Con la Ec.(3) en mente, analice las igualdades $r = cos\theta$, $r = 2cos\theta$.