Análisis Matemático II

TP4a: Ejercicio 11

11. Sea **F** dado por el gráfico de la figura 2 (abajo). Indique si cada una de las integrales de línea de **F** a lo largo de C_1 y C_2 es positiva, nula o negativa.

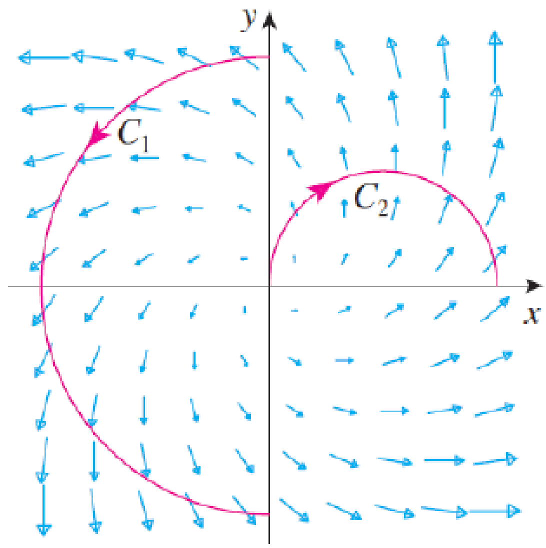

figura 2

Una integral de línea de campo vectorial tiene la forma

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Conceptualmente se trata de una sumatoria infinitesimal del producto escalar en cada punto a lo largo de la curva, entre las componentes del campo vectorial y el vector ***dr*** en cada punto.

Las componentes del campo vectorial F son funciones de x y de y. El diferencial del vector posición se puede expresar en función del vector velocidad.

$$\vec{F}(x,y) = (N, M)$$

$$d\vec{r} = (dx, dy) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt = \vec{r}\,'(t)dt$$

La integral se puede escribir como

$$\int \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

Ahora se ve más claro que el integrando es el producto escalar entre las componentes del campo vectorial y el vector velocidad.

Recordando la definición de producto escalar, sabemos que: si el ángulo que forman los dos vectores es menor a 90 grados, el resultado es positivo; si es 90 grados el producto escalar es cero; y si el ángulo es mayor a 90 grados, el producto escalar es negativo.

Por otro lado, sabemos que el vector velocidad de una curva es tangente a la trayectoria de la misma.

Ahora bien, con todo lo anterior, vemos que para deducir el signo de las integrales de línea de campo vectorial en forma gráfica tenemos que recorrer la curva en el sentido indicado, e ir analizando en forma estimada si el ángulo que forma el vector de campo y el vector velocidad de la curva es menor, igual o mayor a 90°.

En el caso de la curva C1, vemos q a lo largo de toda la curva, el ángulo entre el vector ***F*** y el vector ***r´*** es menor a 90°, por lo que la contribución infinitesimal de cada producto escalar puntual dará como resultado una integral de valor positivo.

En el caso de la curva C2, vemos que, en la primera mitad de la curva, el ángulo entre los vectores F y r´ es menor a 90°, por lo que la contribución de esos productos escalares a la integral total es positiva. Sin embargo, en la segunda mitad de la curva, vemos que el ángulo es mayor a 90°, y además el valor del producto escalar es numéricamente mayor porque los vectores F tienen mayor magnitud.

En conclusión, tiene más peso en el producto escalar la contribución negativa a lo largo de la segunda mitad de la curva C2.

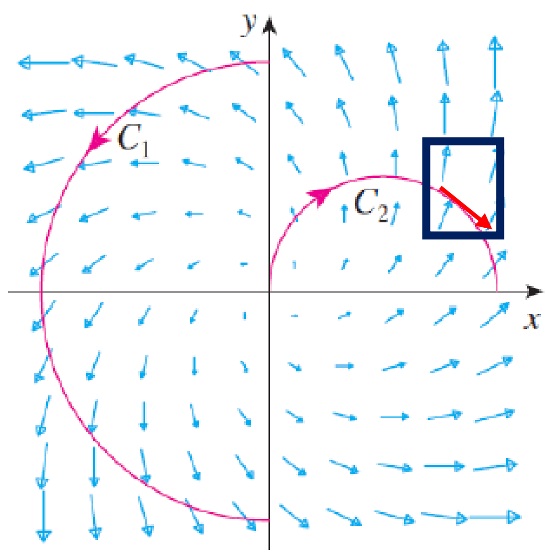

figura 2