Análisis Matemático II

TP4a: Ejercicio 26

26. Compruebe que el integrando es una forma diferencial exacta y calcule la integral.

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xydx + (x^2 - z^2)dy - 2yzdz.$$

Una forma diferencial exacta se puede expresar como

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$$

Debemos encontrar la función potencial asociada a la forma diferencial.

Observando el argumento de la integral, podemos deducir que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2yz$$

Integramos cada una de las expresiones anteriores con respecto a la variable que corresponda en cada caso para encontrar la función *f*:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}dx = f(x,y,z) = x^2y + g_1(y,z)$$

Nótese que al integrar una función de 3 variables con respecto a una de ellas, la constante de integración será una función de las otras dos variables, en este caso $g_1(y,z)$.

$$\int \frac{\partial f}{\partial y}dy = f(x,y,z) = x^2y - z^2y + g_2(x,z)$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial z}dz = f(x,y,z) = -yz^2 + g_3(x,y)$$

Hemos encontrado la función f mediante 3 integrales, pero sabemos que la función es única, por lo cual para que quede completamente definida, tenemos que mirar los 3 resultados anteriores simultáneamente, y "armar" la función potencial considerando una sola vez los términos que se repiten, y agregando los que no se repiten.

Por ejemplo, vemos que el término x^2y aparece en las primeras dos expresiones. En la última expresión también está, sólo que "escondido" bajo el nombre $g_3(x,y)$.

De la misma manera, el término - z^2y aparece en dos de las expresiones, y en la otra está representado por $g_1(y,z)$.

Lo único que nos falta encontrar es la función $g_2(x,z)$. Vemos que no hay indicio de su valor en las otras expresiones, por lo que concluimos que es cero.

Con toda la información anterior, finalmente podemos armar la función potencial f:

$$f(x.y,z) = x^2y - z^2y + C$$

Para corroborar que la solución es correcta, basta con derivar f con respecto a x, y, z y comparar con las derivadas parciales planteadas al inicio del ejercicio.

Ya comprobamos que la forma diferencial es exacta, ahora volvamos a la integral del principio. Como encontramos la función potencial asociada, podríamos expresar el argumento de la integral de esta manera:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \nabla\vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Hemos visto que un campo es conservativo cuando existe una función potencial asociada, y además el teorema fundamental de las integrales de línea establece que, si un campo es conservativo, la integral de línea es independiente de la trayectoria y sólo depende de los valores de la función potencial en los extremos de la curva, es decir:

$$\int_C \overrightarrow{\nabla f} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

$$f(B) = f(1,2,3) = -16 + C$$

$$f(A) = f(0,0,0) = C$$

Finalmente,

$$\int_C \overrightarrow{\nabla f} \cdot d\vec{r} = -16$$