Análisis Matemático II

TP4b: Ejercicio 26

26. Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo de **F** hacia afuera de la superficie S frontera de D, siendo

   a) $\mathbf{F} = (y - x, z - y, y - x)$ y D el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

Teorema

Sea S una superfice cerrada positivamente orientada, suave por partes, sea D la región sólida encerrada por S y sea $\mathrm{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas paciales continuas en una región abierta que contiene a S. Entonces el flujo de* F *a través hacia fuera de S es:*

$$\oiint_S \mathrm{F} \cdot \mathrm{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathrm{F} dV.$$

El ejercicio nos pide que usemos el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo F a través y hacia afuera de S, es decir, nos está pidiendo que calculemos la integral triple de la divergencia de F.

Primero calculamos la divergencia del campo F:

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = -1 - 1 + 0 = -2$$

Planteamos la integral triple sobre el cubo:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = -2 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dzdydx = -16$$

En este caso, la integral triple puede dar negativa porque no representa el volumen de un sólido, es decir, la hemos usado para calcular el flujo hacia afuera de un campo vectorial. El signo del flujo dependerá de la forma funcional del campo.