Agregado 1

Sabemos que $\nabla(\cdot) = \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}\right)$.

Parte a

Sea $f : U \subset R^3 \to R$ cuyas derivadas parciales de segundo orden existen, entonces:

$\triangle f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot (f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$

Parte b

Sea $F : U \subset R^3 \to R^3$ un campo vectorial cuyas funciones componentes P, Q y R tienen derivadas parciales de segundo orden continuas y sabiendo que $\triangle F = (\triangle P, \triangle Q, \triangle R)$, queremos demostrar que $\triangle F = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F)$.

Calculamos:
$\nabla \cdot F = P_x + Q_y + R_z$
de donde:
$\nabla(\nabla \cdot F) = \Big((P_x + Q_y + R_z)_x, (P_x + Q_y + R_z)_y, (P_x + Q_y + R_z)_z\Big) =$
$(P_{xx} + Q_{yx} + R_{zx}, P_{xy} + Q_{yy} + R_{zy}, P_{xz} + Q_{yz} + R_{zz})$

Por otro lado:
$\nabla \times F = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$
de donde:
$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla \times (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) =$
$\Big((Q_x - P_y)_y - (P_z - R_x)_z, (R_y - Q_z)_z - (Q_x - P_y)_x, (P_z - R_x)_x - (R_y - Q_z)_y\Big) =$
$(Q_{xy} - P_{yy} - P_{zz} + R_{xz}, R_{yz} - Q_{zz} - Q_{xx} + P_{yx}, P_{zx} - R_{xx} - R_{yy} + Q_{zy})$

Luego:
$\nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F) = (P_{xx} + Q_{yx} + R_{zx}, P_{xy} + Q_{yy} + R_{zy}, P_{xz} + Q_{yz} + R_{zz}) - (Q_{xy} - P_{yy} - P_{zz} + R_{xz}, R_{yz} - Q_{zz} - Q_{xx} + P_{yx}, P_{zx} - R_{xx} - R_{yy} + Q_{zy})$

y como las derivadas parciales de segundo orden son continuas por hipótesis las cruzadas son iguales (dos a dos), por los que:
$\nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F) = (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}, Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}, R_{xx} + R_{yy} + R_{zz}) =$
$(\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R) = (\triangle P, \triangle Q, \triangle R) = \triangle F$