FACULTAD DE INGENIERÍA

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

Análisis Matemático II

TP5: Ejercicio 18

18. Resuelva el siguiente PVI: $\dfrac{dy}{dx} = x + 5y$, $y(0) = 3$.

Se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden. La escribimos en forma estándar:

$$y' + P_{(x)}y = f_{(x)}$$

$$y' - 5y = x$$

Identificamos las funciones:

$$P_{(x)} = -5$$

$$f_{(x)} = x$$

Planteamos la solución general de una EDO de primer orden lineal:

$$y_{(x)} = \frac{1}{\mu_{(x)}}\int f_{(x)}\mu_{(x)}dx$$

Donde $\mu_{(x)}$ es el factor integrante:

$$\mu_{(x)} = e^{\int P(x)dx}$$

Calculamos el factor integrante:

$$\mu_{(x)} = e^{-\int 5dx} = e^{-5x}$$

Reemplazamos en la expresión de la solución general y resolvemos:

$$y_{(x)} = \frac{1}{e^{-5x}}\int xe^{-5x}dx$$

Para resolver la integral, aplicamos integración por partes tomando u=x.

$$y_{(x)} = \frac{1}{e^{-5x}}\left(-\frac{x}{5}e^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x} + C\right)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$y_{(x)} = -\frac{x}{5} - \frac{1}{25} + \frac{C}{e^{-5x}}$$

Recordemos que

$$\frac{1}{e^{-5x}} = e^{5x}$$

Podemos expresar la solución general:

$$y_{(x)} = -\frac{x}{5} - \frac{1}{25} + Ce^{5x}$$

La solución general es una familia paramétrica de soluciones. Para obtener la solución particular que cumpla la condición inicial y(0)=3, planteamos:

$$y_{(0)} = -\frac{0}{5} - \frac{1}{25} + Ce^{0x} = 3$$

$$-\frac{1}{25} + C = 3$$

$$-\frac{1}{25} + C = 3$$

$$C = \frac{76}{25}$$

Finalmente, la solución del PVI resulta:

$$y_{(x)} = \frac{76}{25}e^{5x} - \frac{x}{5} - \frac{1}{25}$$