



UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA  
en acción continua...

# ANALISIS ESTRUCTURAL I

## UNIDAD 2

Desplazamientos y Deformaciones  
Teoremas Energéticos

CURSO 2.023

Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

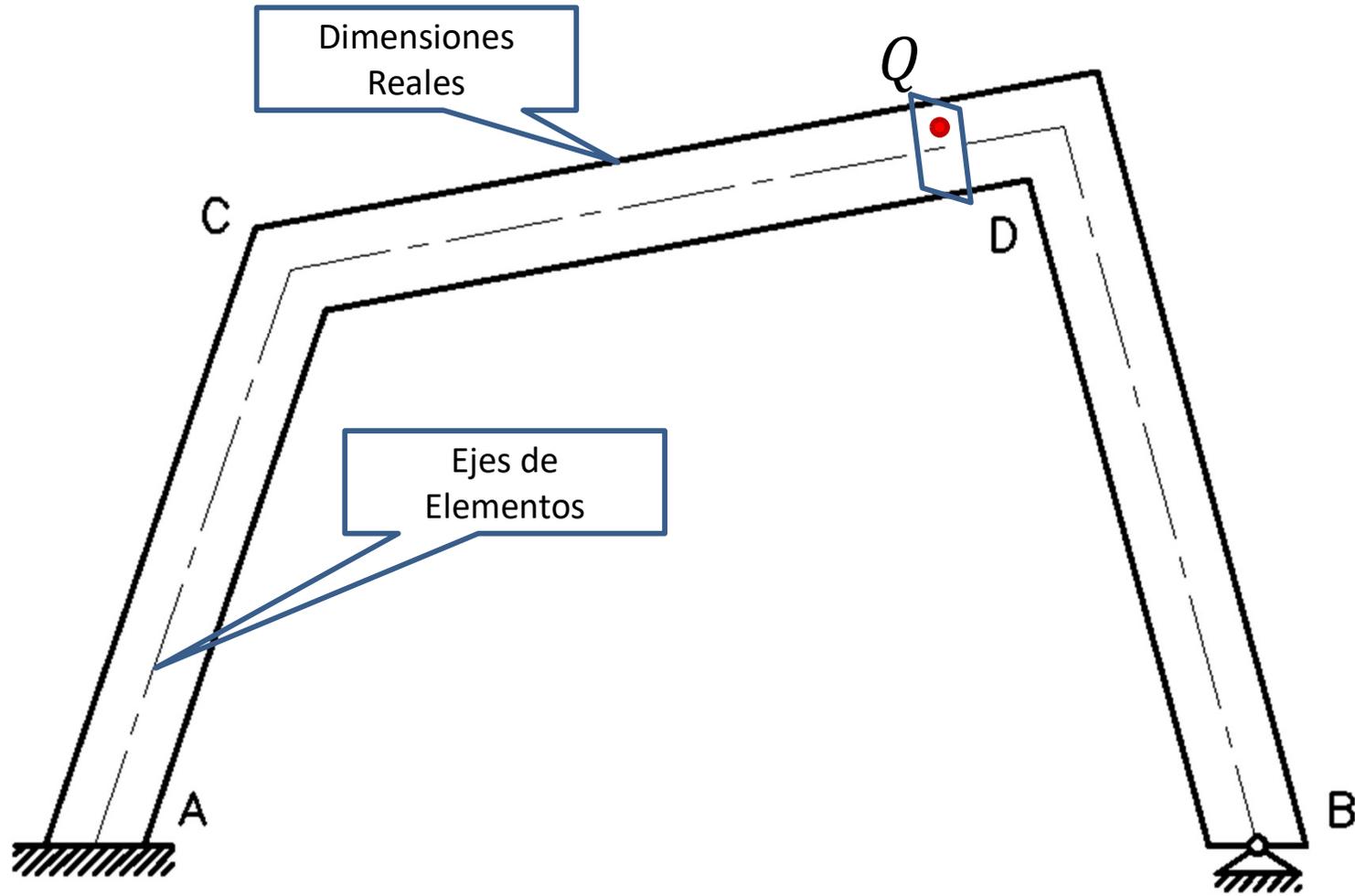
# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Introducción

- Las estructuras cambian de forma debido a acciones externas (cargas, movimientos impuestos, temperatura).
- El cambio en la forma de la estructura se debe a que los elementos que la componen cambian su dimensiones.
- Al cambiar la forma de la estructura se dice que adquiere su configuración deformada o actualizada, y la línea que representa los ejes de los elementos que la componen se denomina elástica.
- Cuando la estructura cambia de forma cada punto cambia de posición con respecto a la posición original (configuración original).
- La magnitud que define el cambio de posición de un punto, se la denomina desplazamiento o corrimiento.

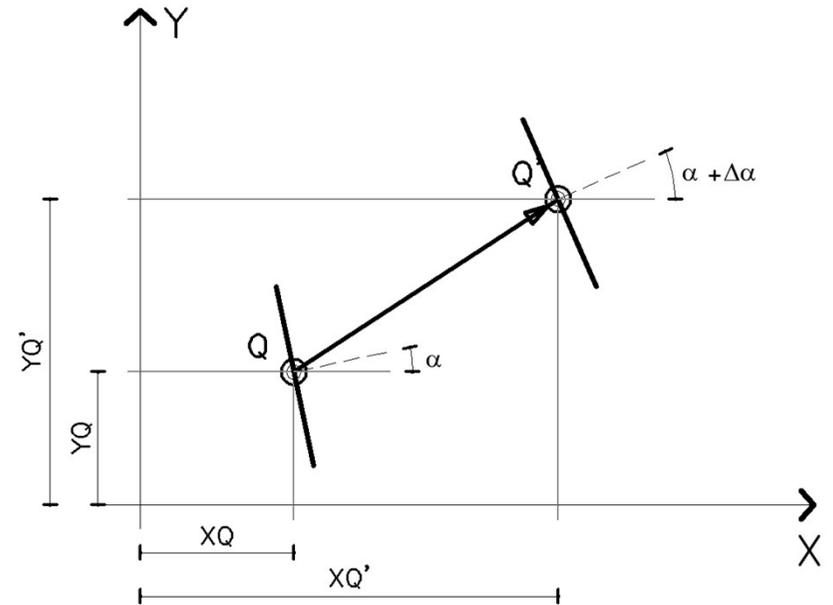
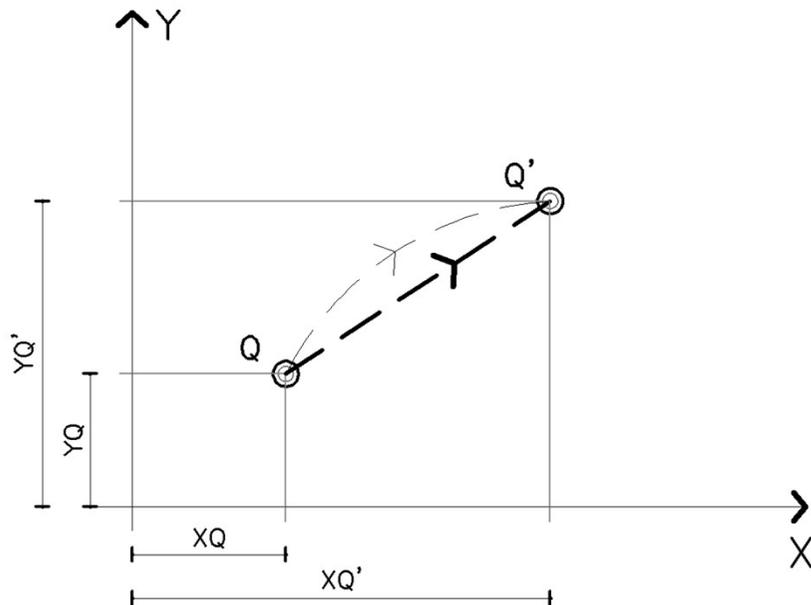
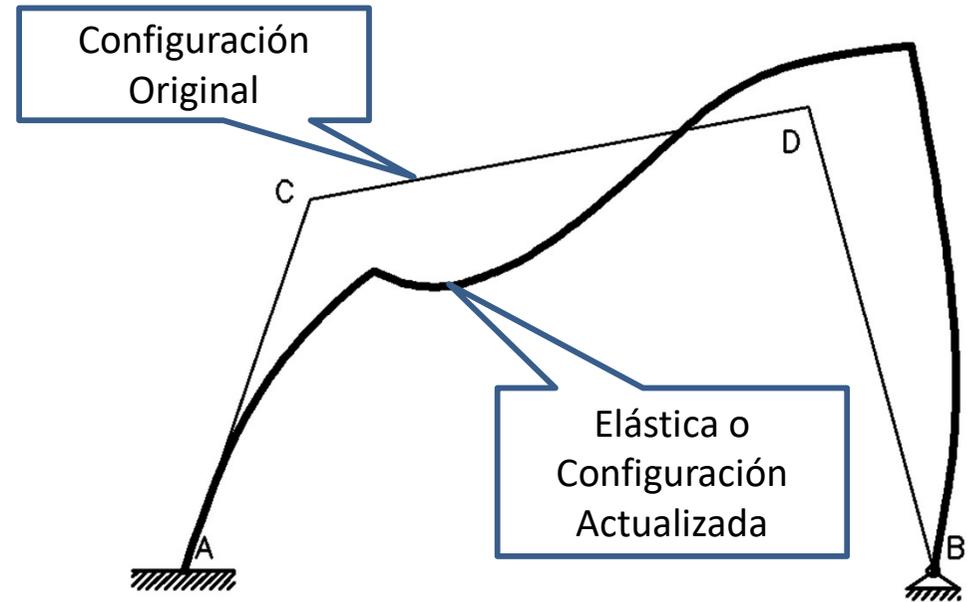
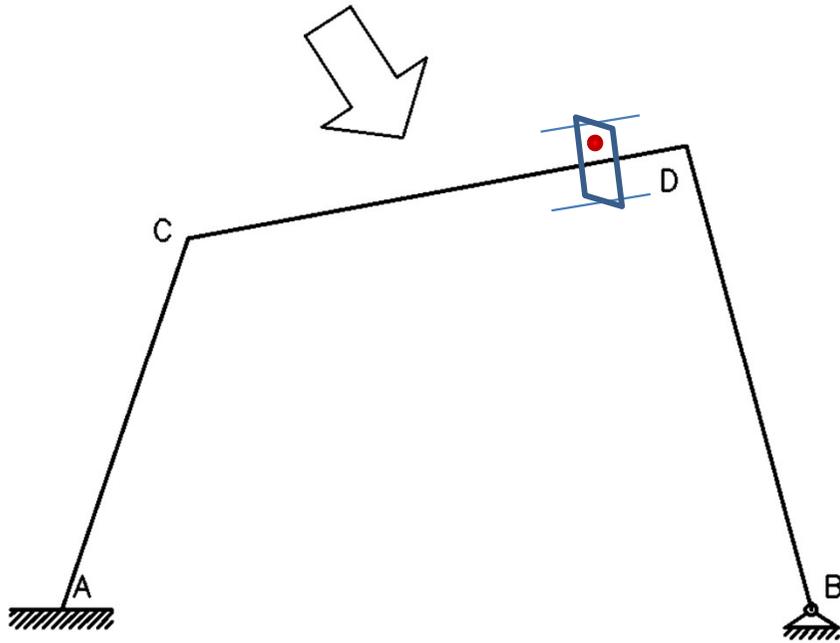
# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Desplazamientos



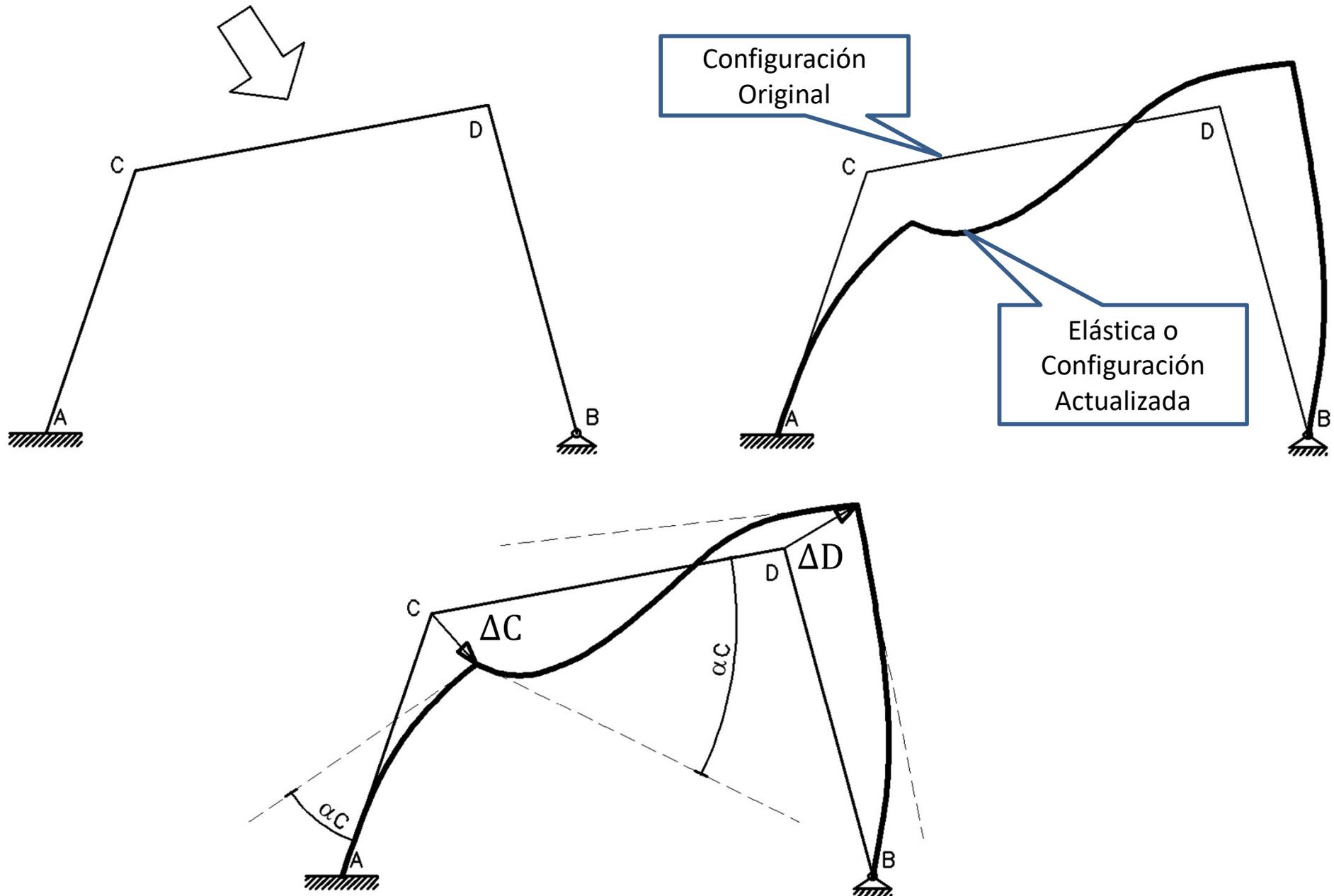
# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Desplazamientos



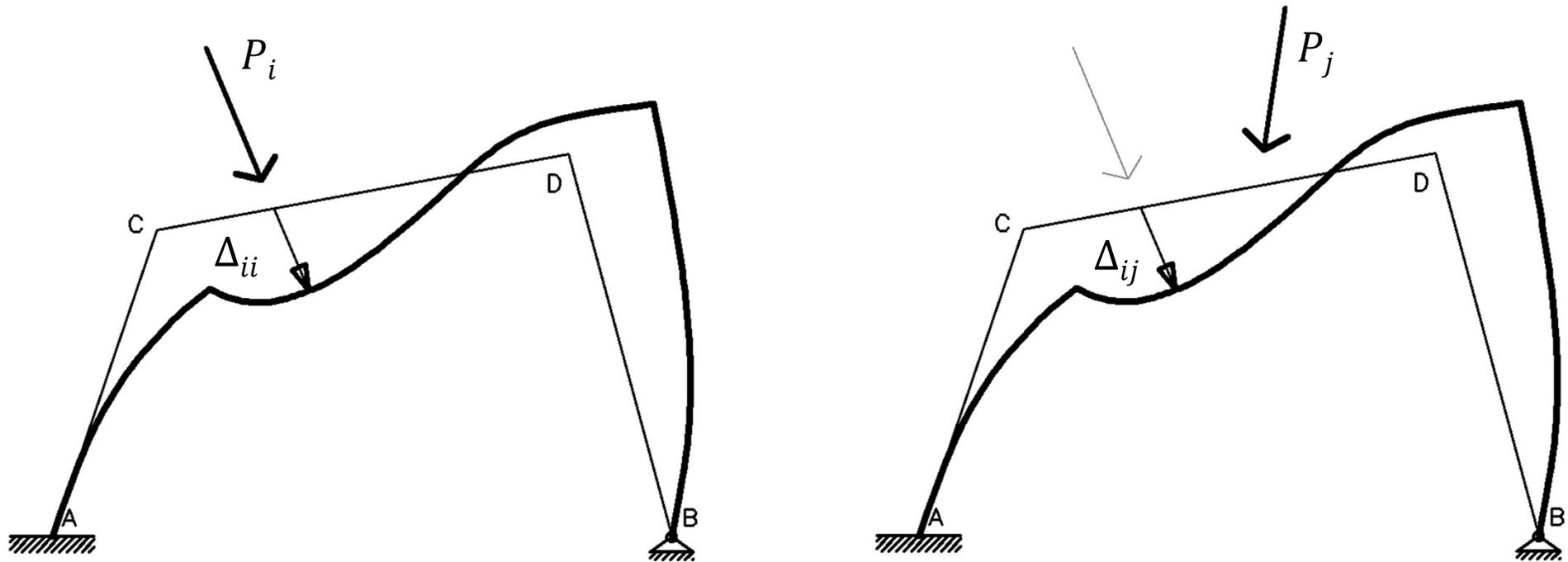
# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Desplazamientos



# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Desplazamientos

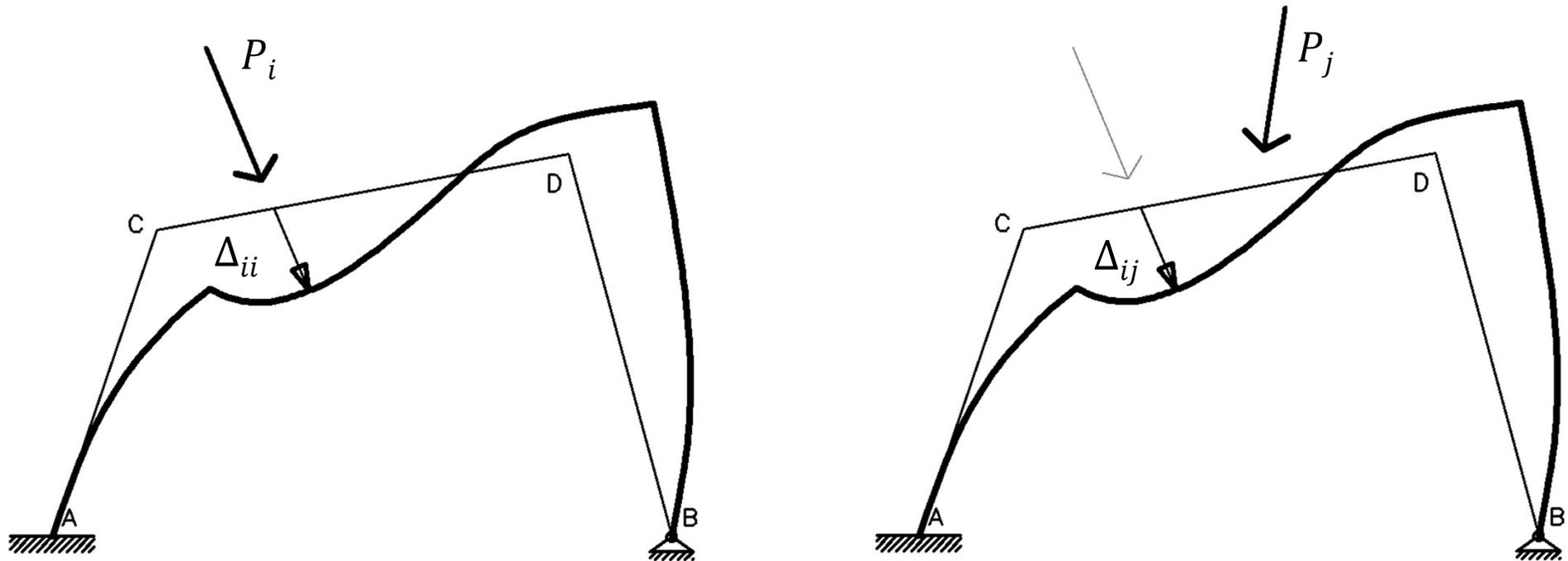


$\Delta_{ii}$  : Desplazamiento en la **dirección** de  $P_i$  provocado por  $P_i$

$\Delta_{ij}$  : Desplazamiento en la **dirección** de  $P_i$  provocado por  $P_j$

# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Desplazamientos



$\delta_{ii}$  : Desplazamiento en la **dirección** de  $P_i$  provocado por  $P_i$ , cuando  $P_i = 1$

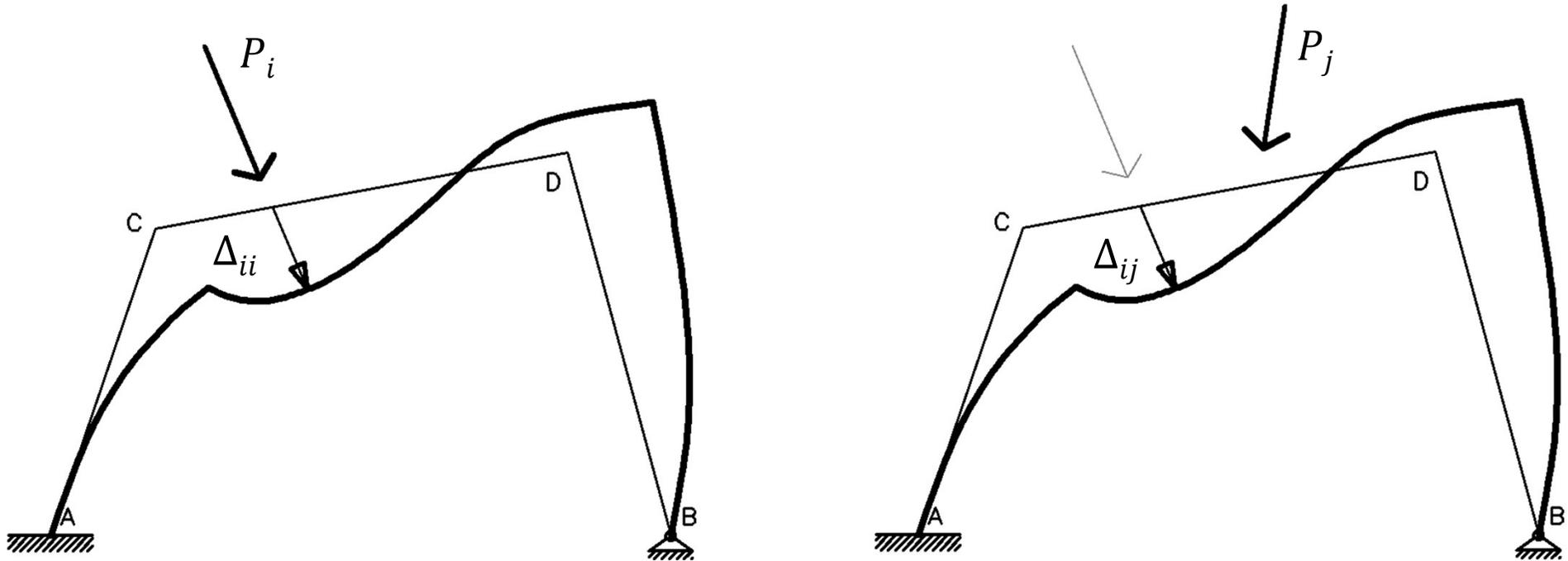
$\delta_{ij}$  : Desplazamiento en la **dirección** de  $P_i$  provocado por  $P_j$ , cuando  $P_j = 1$

$$\delta_{ii} = \frac{\Delta_{ii}}{P_i}$$

$$\delta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{P_j}$$

# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Desplazamientos



$\delta_{ii}$  : Desplazamiento en la **dirección** de  $P_i$  provocado por  $P_i$ , cuando  $P_i = 1$

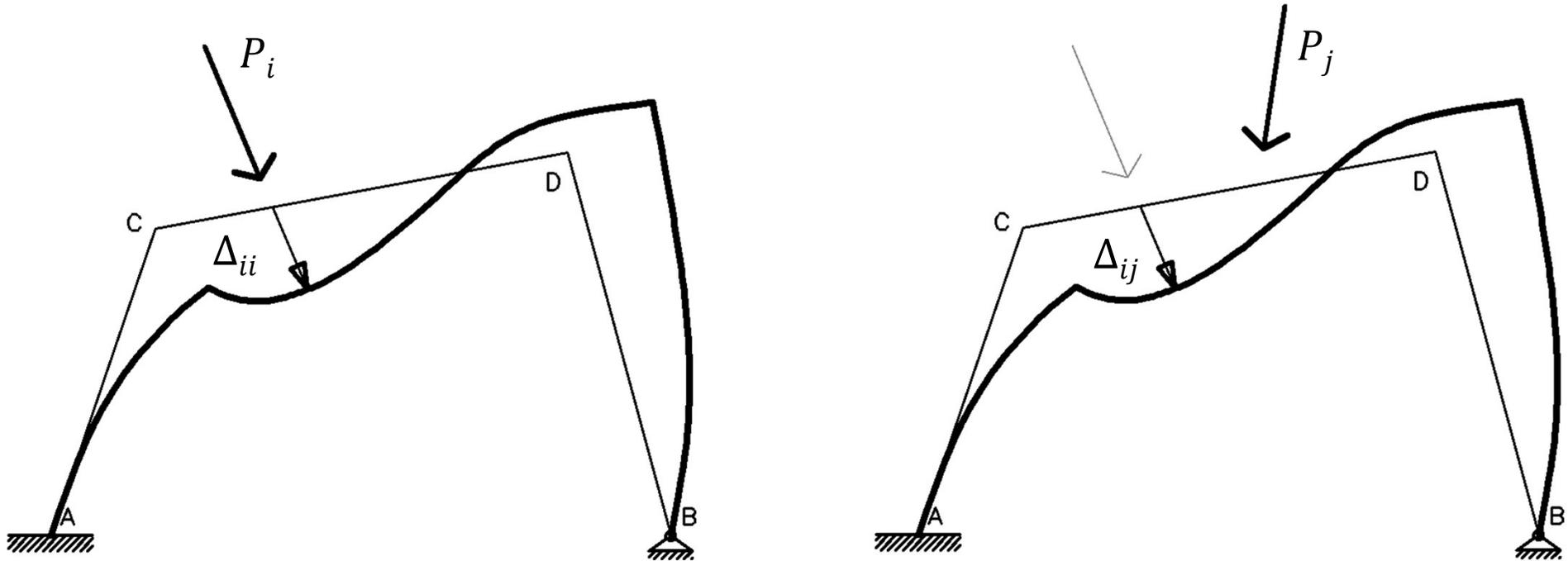
$\delta_{ij}$  : Desplazamiento en la **dirección** de  $P_i$  provocado por  $P_j$ , cuando  $P_j = 1$

Cuando actúan  $P_i$  y  $P_j$

$$\Delta_i = \Delta_{ii} + \Delta_{ij} = \delta_{ii} P_i + \delta_{ij} P_j$$

# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Desplazamientos



$\delta_{ii}$  : Desplazamiento en la **dirección** de  $P_i$  provocado por  $P_i$ , cuando  $P_i = 1$

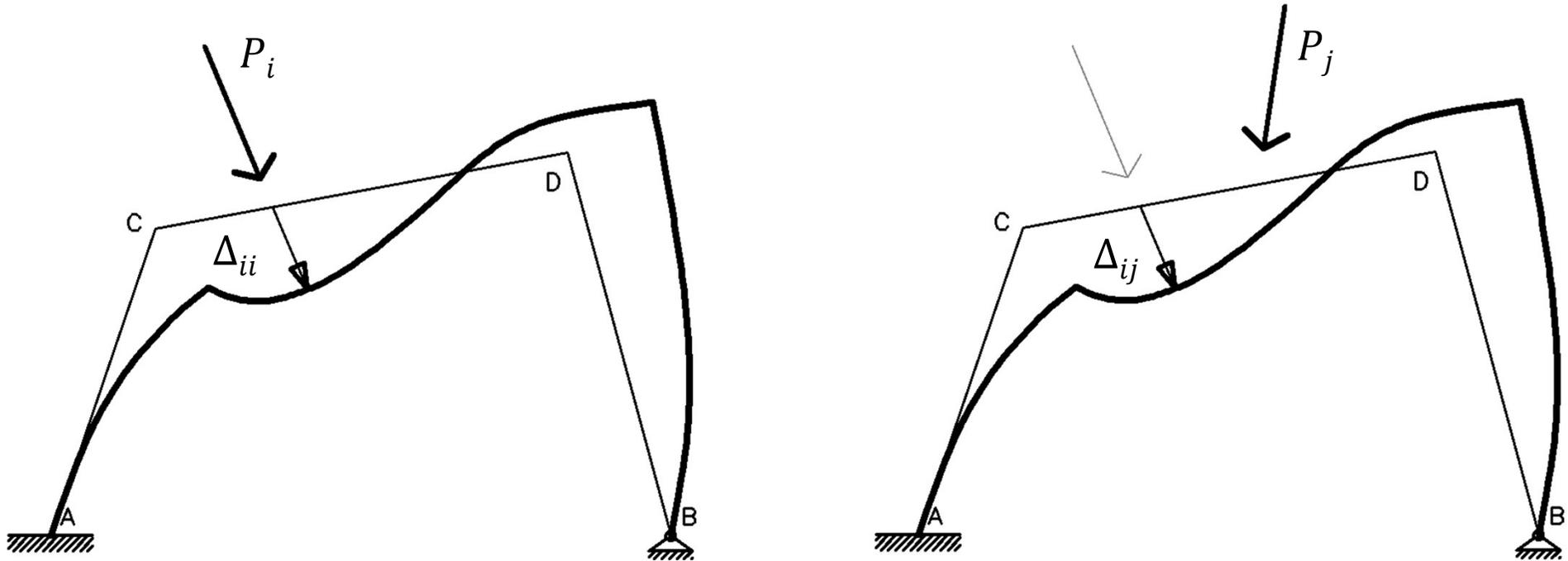
$\delta_{ij}$  : Desplazamiento en la **dirección** de  $P_i$  provocado por  $P_j$ , cuando  $P_j = 1$

Cuando actúan  $P_1 \dots P_i \dots P_n$

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j$$

# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Desplazamientos

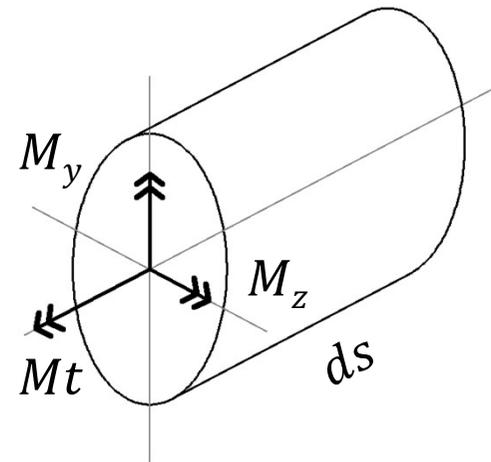
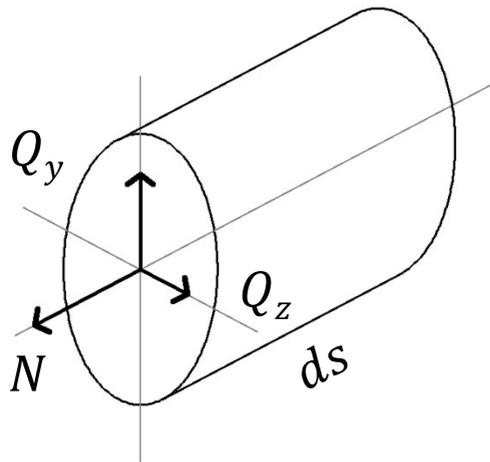
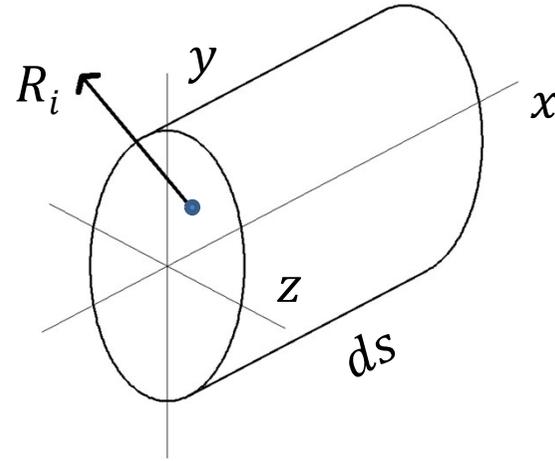


*$P_i$  se refiere a una Carga genérica. **Fuerza o Momento***

*$\delta_{ij}$  se refiere a un Desplazamiento genérico, **Lineal o Angular***

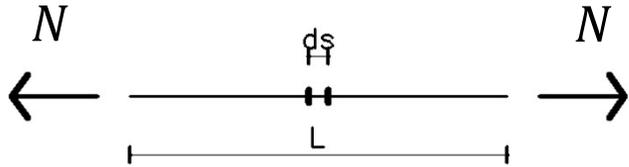
# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Deformaciones

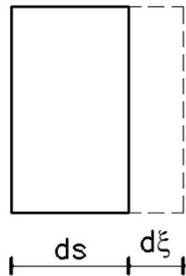


# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Deformaciones debidas a N, Q y Mf



**N**



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

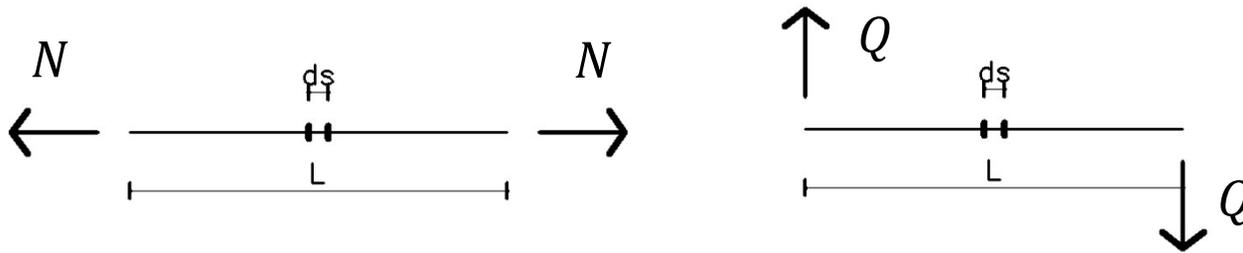
$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

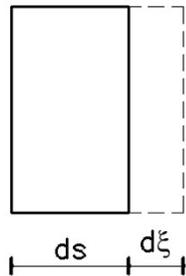
$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA} ds$$

# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

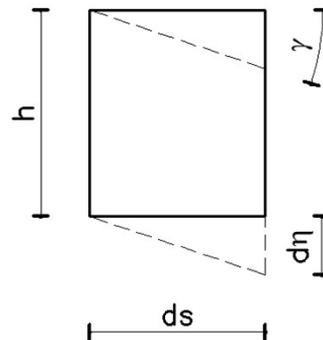
Deformaciones debidas a N, Q y Mf



**N**



**Q**



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA} ds$$

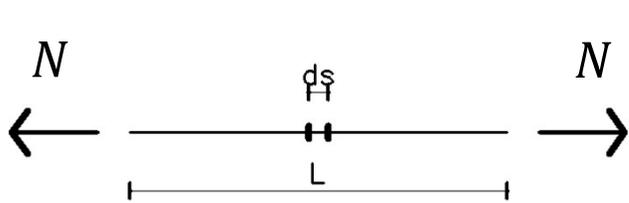
$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \psi \frac{Q}{GA}$$

$$d\eta = \gamma ds$$

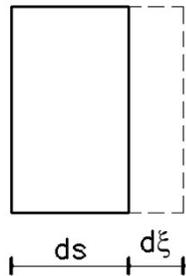
$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$

# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Deformaciones debidas a N, Q y Mf



**N**

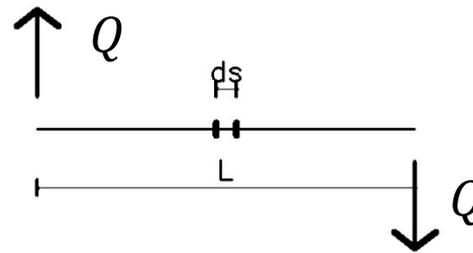


$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

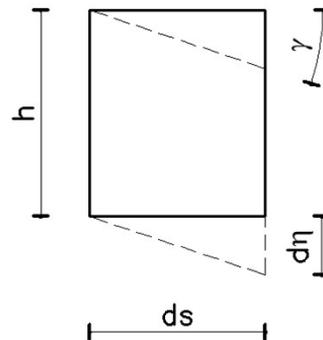
$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA} ds$$



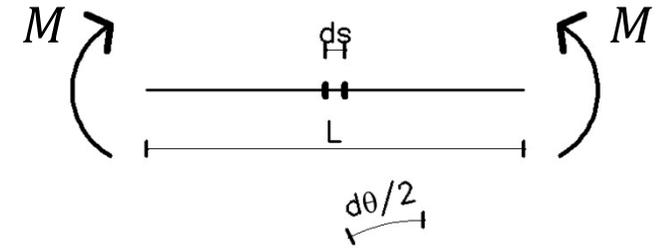
**Q**



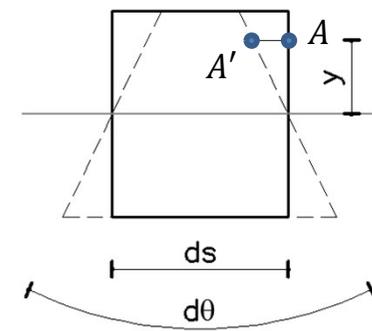
$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \psi \frac{Q}{GA}$$

$$d\eta = \gamma ds$$

$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$



**M**



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

$$\varepsilon = -\frac{My}{EI}$$

$$\varepsilon = -\frac{2AA'}{ds}$$

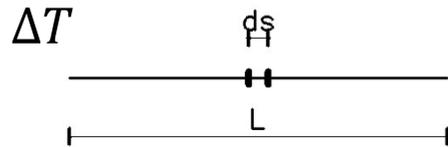
$$2AA' = y d\theta$$

$$d\theta = -\frac{\varepsilon ds}{y}$$

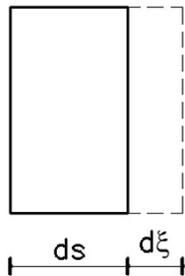
$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Deformaciones debidas a variaciones de Temperatura



$\Delta T$   
ctte



$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

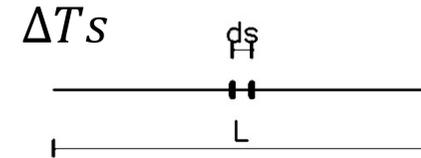
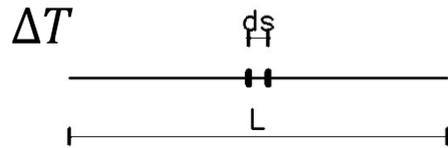
$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

$$d\xi = \alpha \Delta T ds$$

$$\Delta L = \int_0^L \alpha \Delta T ds$$

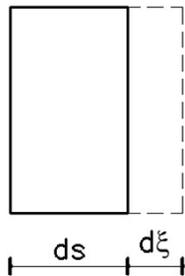
# DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Deformaciones debidas a variaciones de Temperatura

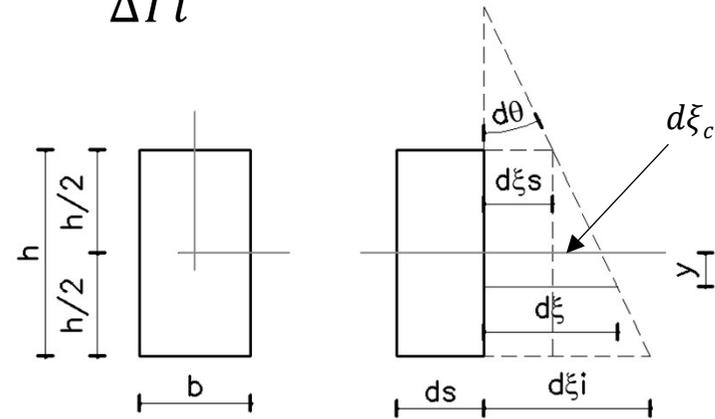


$\Delta T_i$

**$\Delta T$   
ctte**



**$\Delta T$   
var**



$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

$$d\xi = \alpha \Delta T ds$$

$$\Delta L = \int_0^L \alpha \Delta T ds$$

$$d\xi_i = \alpha \Delta T_i ds \quad , \quad d\xi_s = \alpha \Delta T_s ds$$

$$d\xi_c = \frac{d\xi_i + d\xi_s}{2} = \frac{\alpha (\Delta T_i + \Delta T_s) ds}{2}$$

$$d\xi_c = \frac{\alpha (\Delta T_i h_1 + \Delta T_s h_2) ds}{h}$$

$$d\theta = \frac{d\xi_i - d\xi_s}{h} = \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s) ds}{h}$$

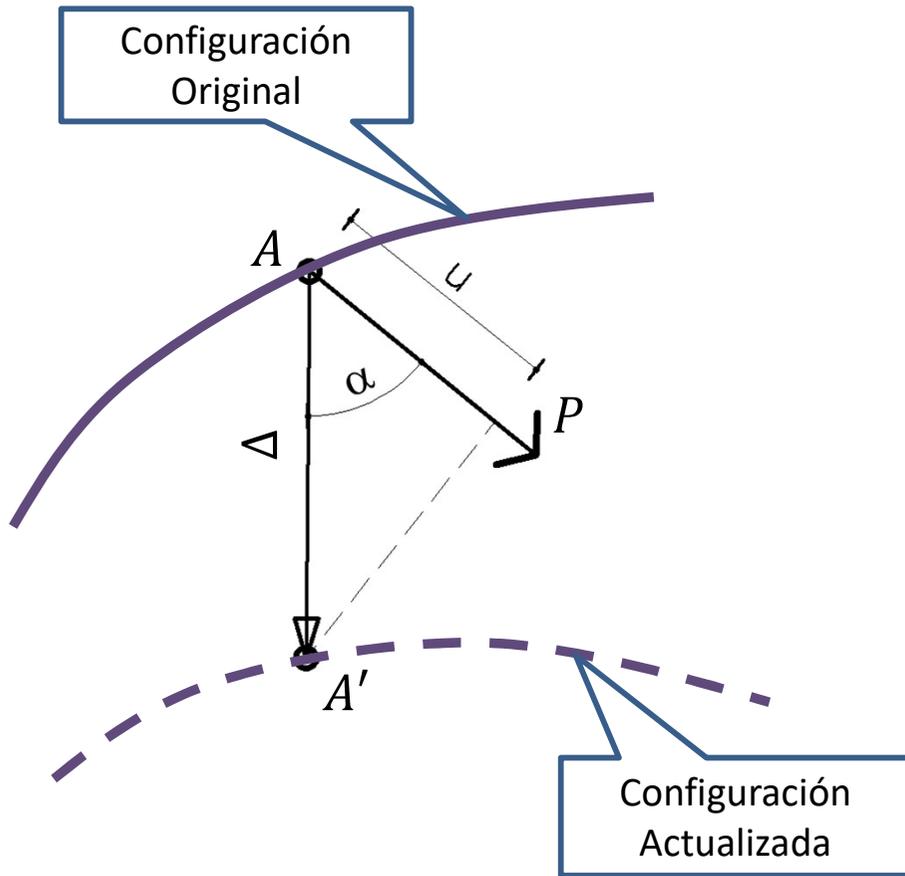
# TRABAJO Y ENERGÍA

## Introducción

- Para el cálculo de desplazamientos se requiere conocer el trabajo de las acciones externas y la energía de deformación de las acciones (esfuerzos) internas.
- Las acciones externas realizan trabajo en los desplazamientos de sus punto o secciones de aplicación.
- Las acciones internas desarrollan energía en las deformaciones.
- El trabajo y la energía serán reales si lo realizan las acciones en las deformaciones y desplazamientos que ellas mismas provocan.
- El trabajo y la energía serán virtuales si lo realizan las acciones en las deformaciones y desplazamientos provocados por otras acciones.
- Al trabajo de las acciones externas los llamamos **W** y a la energía de las acciones internas **U**.

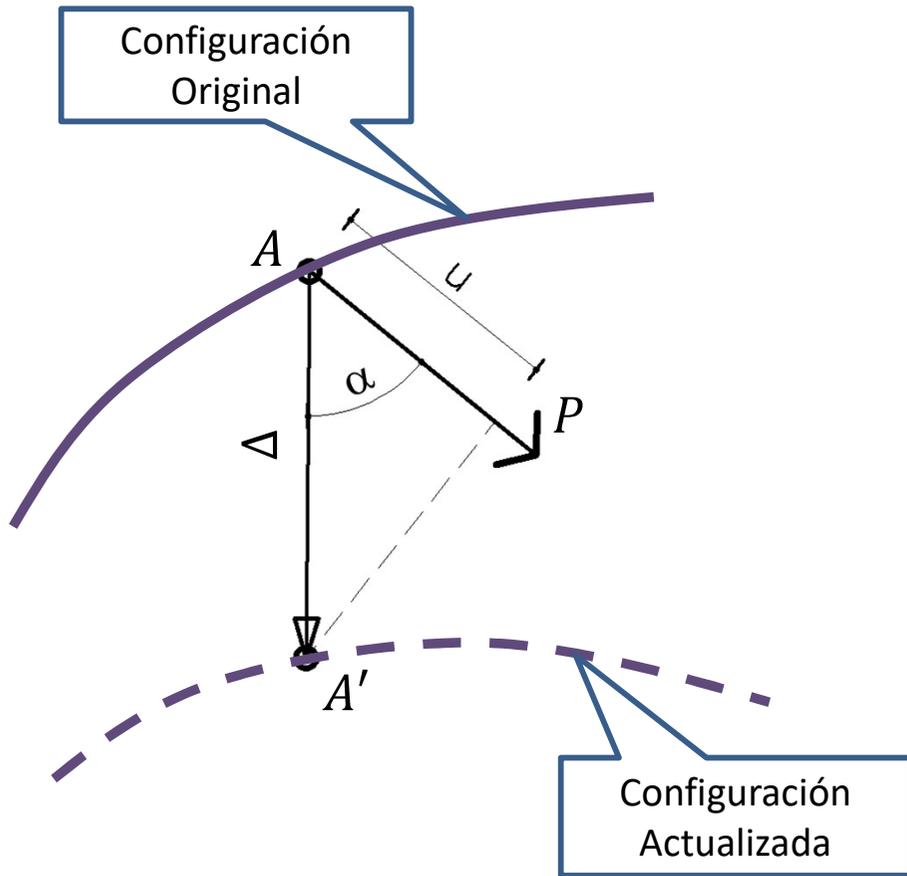
# TRABAJO Y ENERGÍA

## Trabajo de una Fuerza



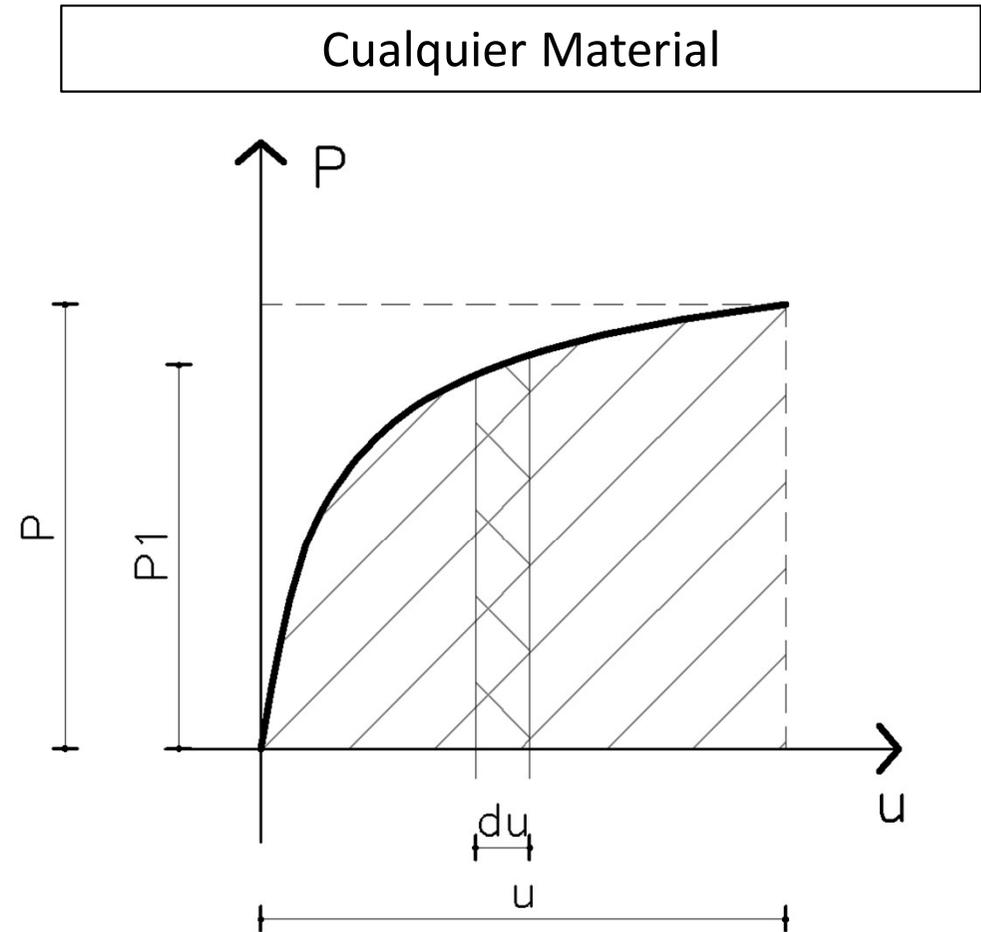
# TRABAJO Y ENERGÍA

## Trabajo de una Fuerza



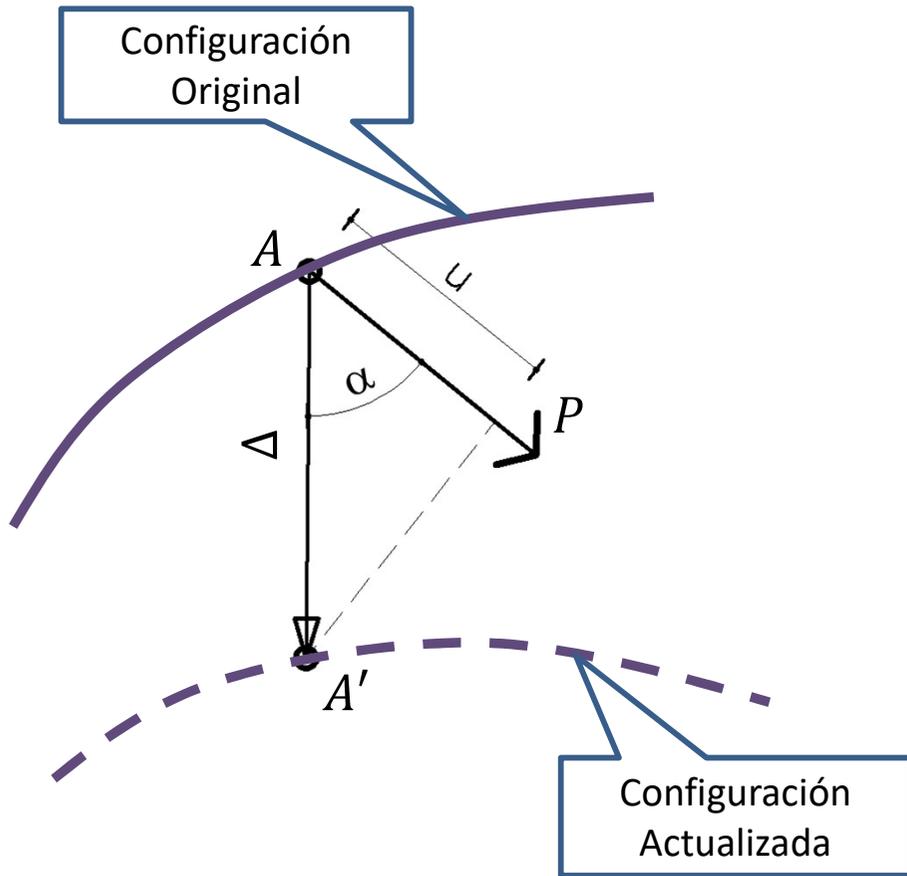
$$dW = P1 du$$

$$W = \int_0^u P1 du$$



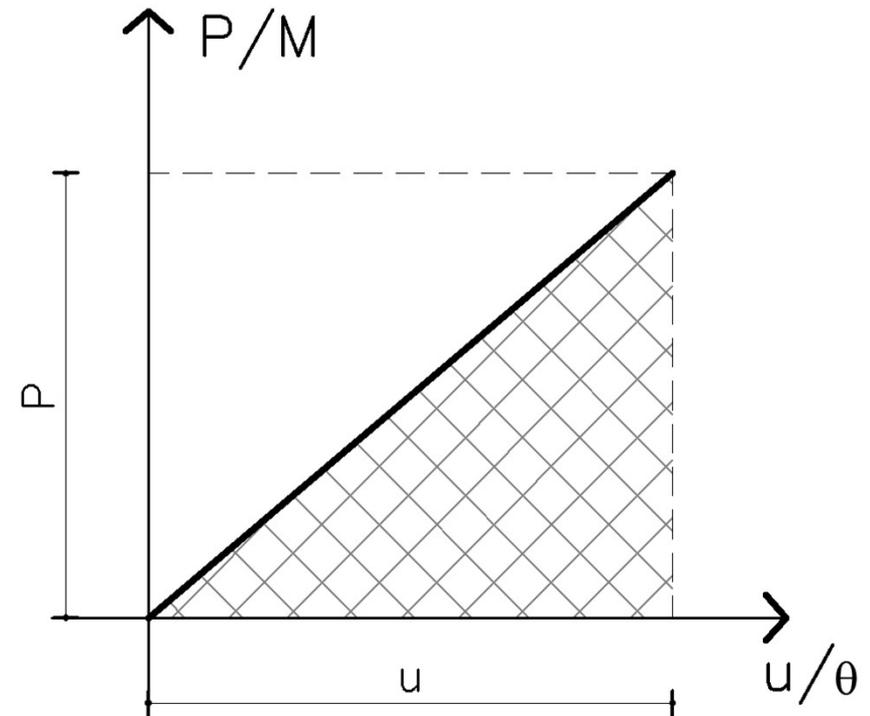
# TRABAJO Y ENERGÍA

## Trabajo de una Fuerza/Par. Material Elástico



$$W = \frac{1}{2} P u$$

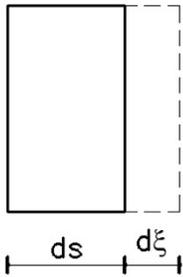
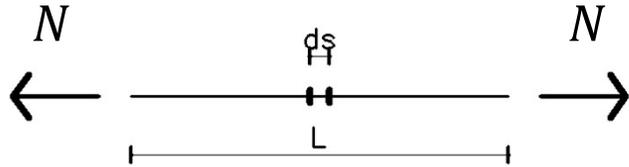
Material Elástico



$$W = \frac{1}{2} M \theta$$

# TRABAJO Y ENERGÍA

## Energía de Deformación de N / Q / Mf



$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} N d\xi$$

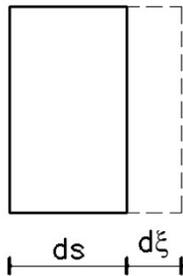
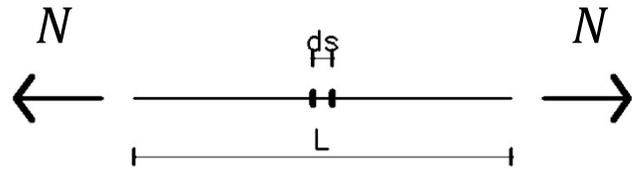
$$U = \int_0^L \frac{1}{2} N \frac{N}{EA} ds$$

N ctte

$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} L$$

# TRABAJO Y ENERGÍA

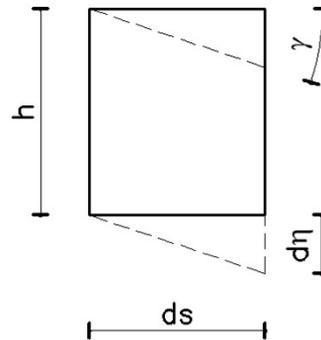
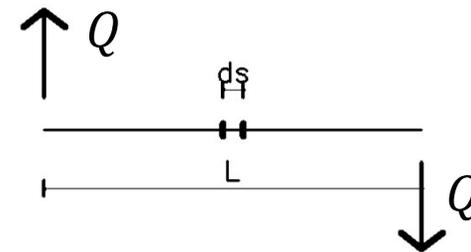
## Energía de Deformación de N / Q / Mf



$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} N d\xi$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} N \frac{N}{EA} ds$$



$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} Q d\eta$$

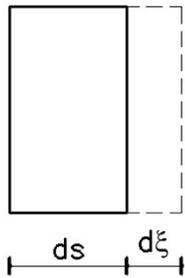
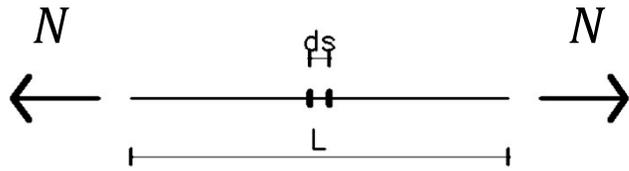
$$U = \psi \int_0^L \frac{1}{2} Q \frac{Q}{GA} ds$$

N ctte

$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} L$$

# TRABAJO Y ENERGÍA

## Energía de Deformación de N / Q / Mf



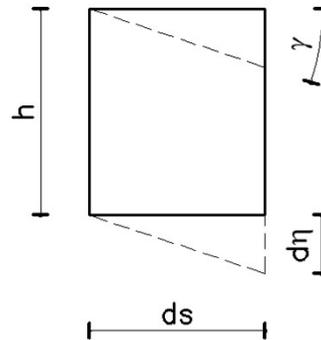
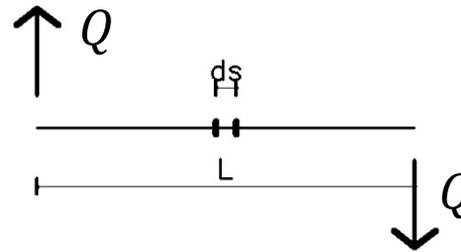
$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} N d\xi$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} N \frac{N}{EA} ds$$

N ccte

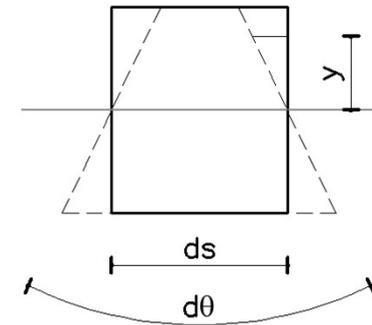
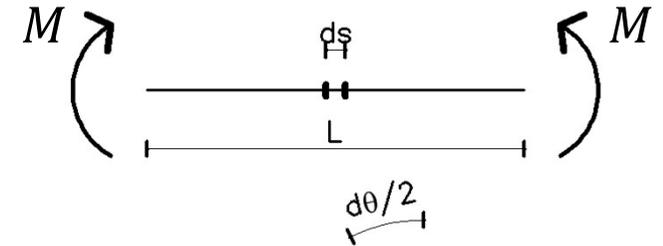
$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} L$$



$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} Q d\eta$$

$$U = \psi \int_0^L \frac{1}{2} Q \frac{Q}{GA} ds$$



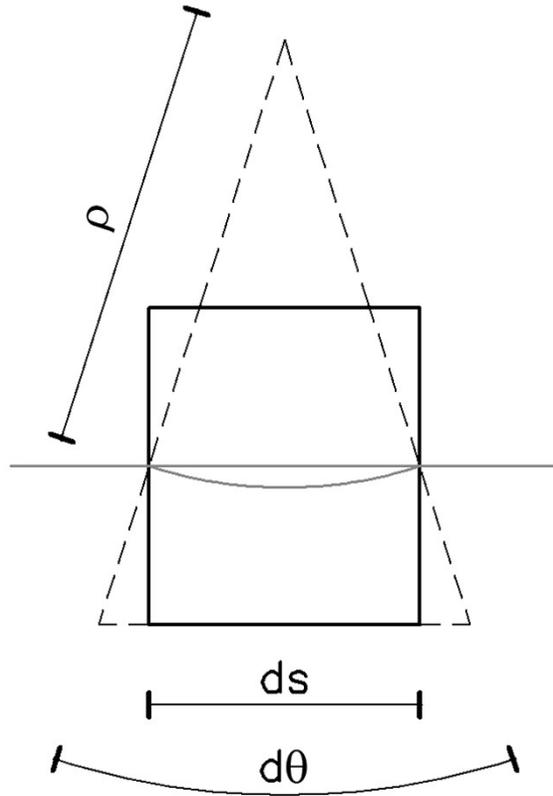
$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} M d\theta$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} M \frac{M}{EI} ds$$

# TRABAJO Y ENERGÍA

## Aplicaciones. Calculo de Corrimientos



$$ds = \rho d\theta$$

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} = \kappa ds$$

$$L = \rho \theta$$

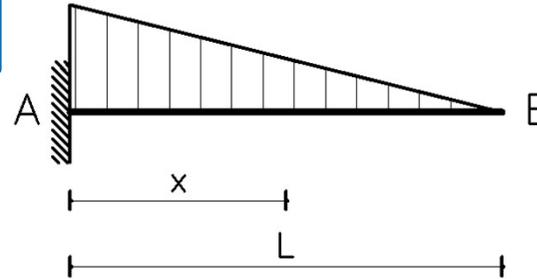
$$\theta = \frac{L}{\rho} = \kappa L$$

# TRABAJO Y ENERGÍA

## Aplicaciones. Calculo de Corrimientos

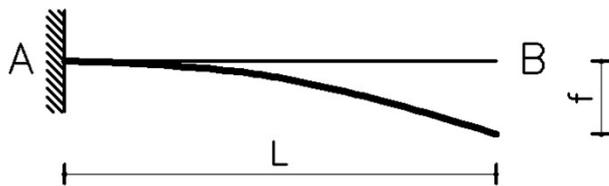


**M**

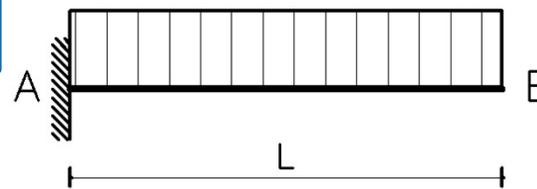


$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L - x)$$



**Q**



$$Q(x) = P$$

$$W = U$$

$$\frac{1}{2} P f = \int_0^L \frac{1}{2} M \frac{M}{EI} dx + \int_0^L \frac{1}{2} Q \frac{\psi Q}{GA} dx$$

$$\frac{1}{2} P f = \int_0^L \frac{P^2 (L - x)^2}{2EI} dx + \psi \int_0^L \frac{P^2}{2GA} dx$$

$$P f = \frac{P^2}{EI} \left( L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3} \right) + \psi \frac{P^2 L}{GA}$$

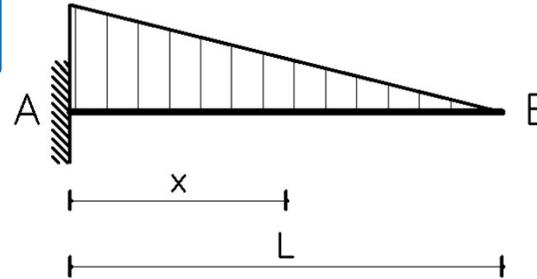
$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi \frac{PL}{GA}$$

# TRABAJO Y ENERGÍA

## Aplicaciones. Calculo de Corrimientos

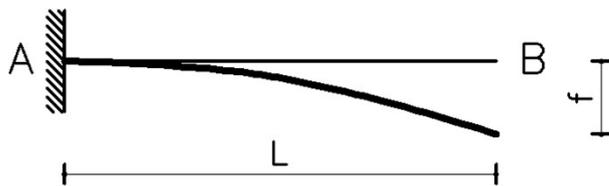


**M**

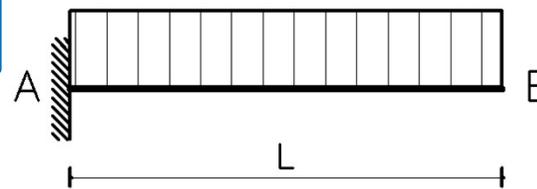


$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L - x)$$



**Q**



$$Q(x) = P$$

$$P = 30.00 \text{ kN}$$
$$L = 10.00 \text{ m}$$

$$b = 0.20 \text{ m}$$
$$h = 1.00 \text{ m}$$

$$E = 21000 \text{ MPa}$$
$$\mu = 0.25 \text{ m}$$
$$G = 0.40 E$$

$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi \frac{PL}{GA}$$

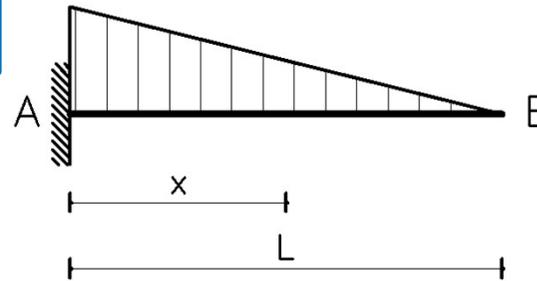
$$A = 0.20 \frac{L}{10} = \frac{L}{50} \text{ m}^2$$
$$I = \frac{0.20}{12} \left( \frac{L}{10} \right)^3 = \frac{L^3}{60000} \text{ m}^4$$

# TRABAJO Y ENERGÍA

## Aplicaciones. Calculo de Corrimientos



**M**

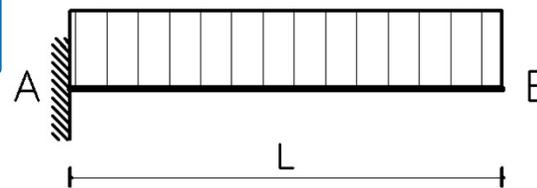


$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L - x)$$



**Q**



$$Q(x) = P$$

$$P = 30.00 \text{ kN}$$

$$L = 10.00 \text{ m}$$

$$P = 30.00 \text{ kN}$$

$$L = 1.00 \text{ m}$$

$$b = 0.20 \text{ m}$$

$$h = 1.00 \text{ m}$$

$$b = 0.20 \text{ m}$$

$$h = 1.00 \text{ m}$$

$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi \frac{PL}{GA}$$

$$E = 21000 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0.25 \text{ m}$$

$$G = 0.40 E$$

$$E = 21000 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0.25 \text{ m}$$

$$G = 0.40 E$$

$$A = 0.20 \frac{L}{10} = \frac{L}{50} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{0.20}{12} \left( \frac{L}{10} \right)^3 = \frac{L^3}{60000} \text{ m}^4$$

$$A = 0.20 L = \frac{L}{5} \text{ m}^2$$

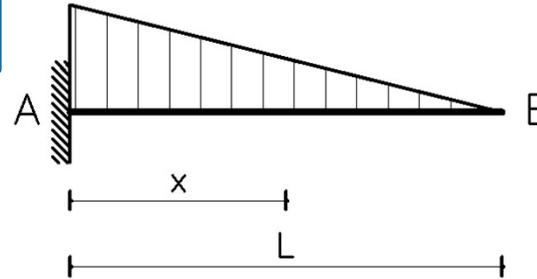
$$I = \frac{0.20}{12} L^3 = \frac{L^3}{60} \text{ m}^4$$

# TRABAJO Y ENERGÍA

## Aplicaciones. Calculo de Corrimientos



**M**

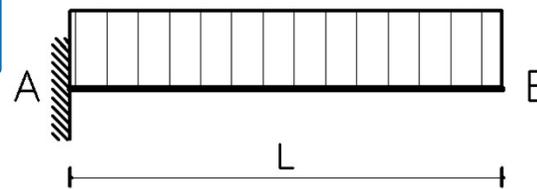


$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L - x)$$



**Q**



$$Q(x) = P$$

$$P = 30.00 \text{ kN}$$

$$L = 10.00 \text{ m}$$

$$P = 30.00 \text{ kN}$$

$$L = 1.00 \text{ m}$$

$$b = 0.20 \text{ m}$$

$$h = 1.00 \text{ m}$$

$$b = 0.20 \text{ m}$$

$$h = 1.00 \text{ m}$$

$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi \frac{PL}{GA}$$

$$E = 21000 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0.25 \text{ m}$$

$$G = 0.40 E$$

$$E = 21000 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0.25 \text{ m}$$

$$G = 0.40 E$$

$$f = \frac{60000 P}{3 E} + \psi 125 \frac{P}{E}$$

$$A = 0.20 \frac{L}{10} = \frac{L}{50} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{0.20}{12} \left( \frac{L}{10} \right)^3 = \frac{L^3}{60000} \text{ m}^4$$

$$A = 0.20 L = \frac{L}{5} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{0.20}{12} L^3 = \frac{L^3}{60} \text{ m}^4$$

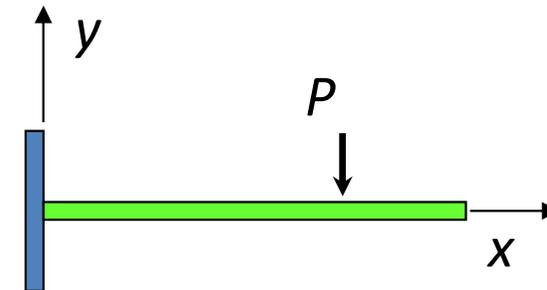
$$f = \frac{60 P}{3 E} + \psi 12.5 \frac{P}{E}$$

# TRABAJO Y ENERGÍA VIRTUALES

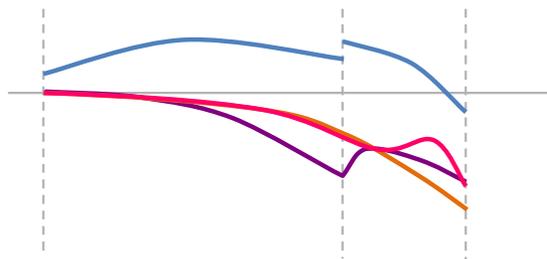
## Desplazamiento y Deformación Virtual

- Desplazamiento Virtual: Es todo desplazamiento pequeño, posible, que satisfice las condiciones de vinculo (contorno cinemáticas) y las condiciones de compatibilidad interna. Pueden no ocurrir.
- La configuración de la estructura sujeta a desplazamientos virtuales en todos sus puntos se denomina Admisible y puede ser no equilibrada.

Estructura



Elástica



- Deformación Virtual: Son las que originan los desplazamientos virtuales. En general se designan deformaciones virtuales tanto a los desplazamientos como a las deformaciones propiamente dichas.

# TRABAJO VIRTUAL

## Definiciones. Trabajo Virtual

- Trabajo Virtual. Es el que realizan las Acciones Reales aplicadas sobre la estructura en Desplazamientos Virtuales originados por acciones distintas de las reales. También se lo denomina Trabajo Virtual Externo.
- También puede ser el trabajo de Acciones Ficticias, en los Desplazamientos debidos a las Acciones Reales aplicadas sobre la estructura.
- Similarmente las Acciones Internas Reales desarrollan Energía en las Deformaciones Virtuales. También se lo denomina Trabajo Virtual Interno.

## Sistema Equilibrado. SE

- Sistema Equilibrado. Toda estructura que se encuentra en equilibrio bajo la acción de las cargas externas y las reacciones de vinculo.

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de Clapeyron

*El trabajo real de varias fuerzas, independientemente de su orden de aplicación, es igual a la semisuma del producto de cada fuerza por el desplazamiento que en su dirección provocan todas las fuerzas.*

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \theta_i$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Trabajo de un sistema equilibrado en un movimiento rígido

*El trabajo de un sistema de acciones en equilibrio, que actúan sobre un sólido rígido, es nulo en todo desplazamiento virtual del mismo.*

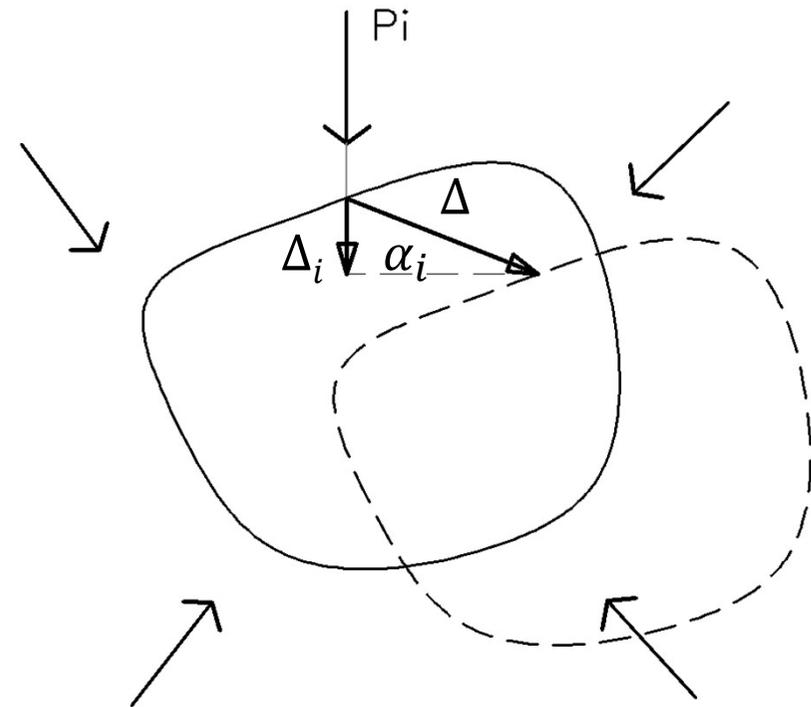
### Traslación

$$W_i = P_i \Delta_i = P_i \Delta \cos \alpha_i$$

$$W = \sum_{i=1}^n P_i \Delta \cos \alpha_i$$

$$W = \Delta \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i$$

$$W = 0$$



# TEOREMAS ENERGETICOS

## Trabajo de un sistema equilibrado en un movimiento rígido

*El trabajo de un sistema de acciones en equilibrio, que actúan sobre un sólido rígido, es nulo en todo desplazamiento virtual del mismo.*

### Rotación

$$W_i = P_i \Delta_i = P_i \Delta \cos \alpha_i$$

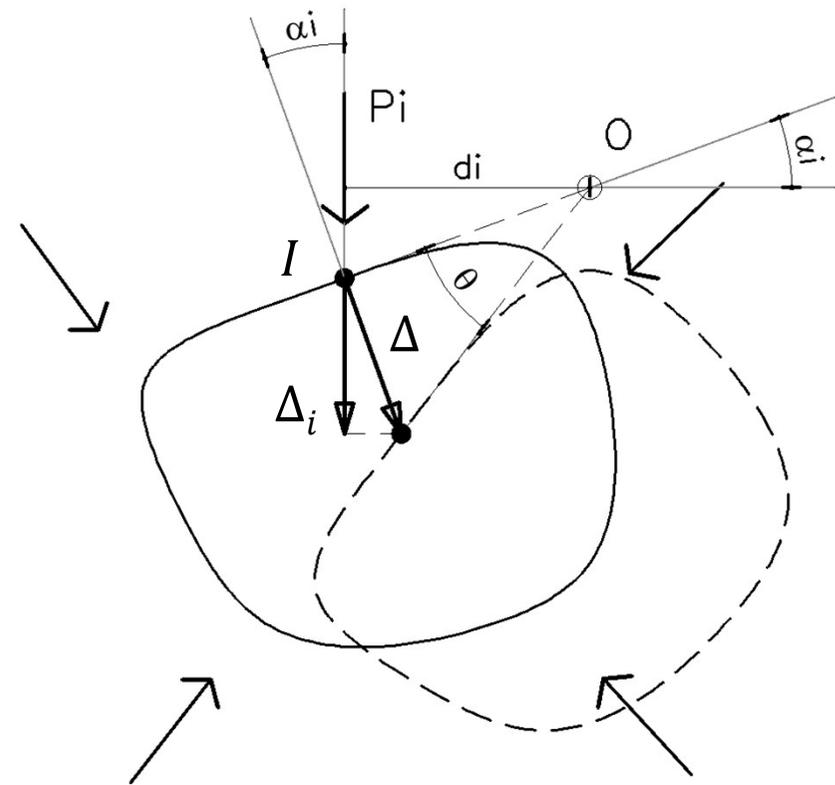
$$\Delta = \theta OI$$

$$W_i = P_i \theta OI \cos \alpha_i$$

$$W_i = P_i \theta d_i$$

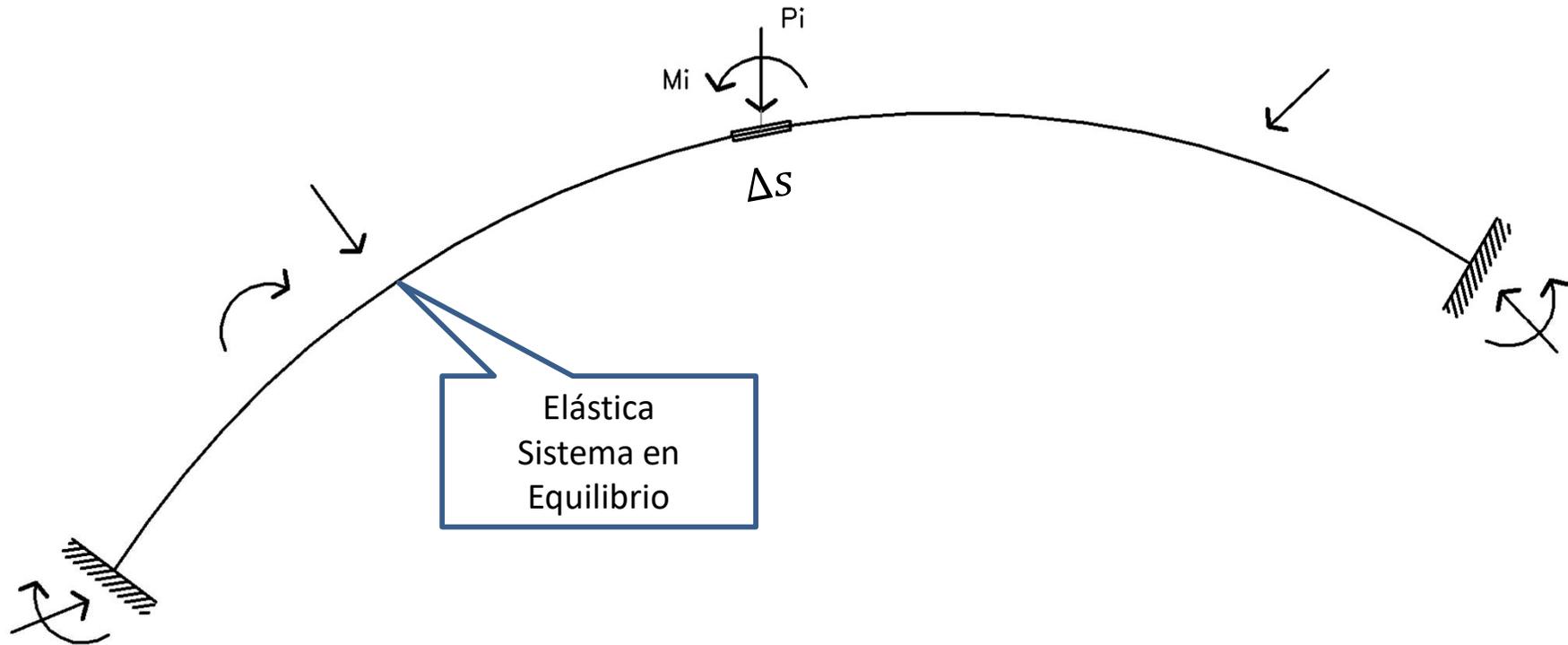
$$W = \theta \sum_{i=1}^n P_i d_i$$

$$W = 0$$



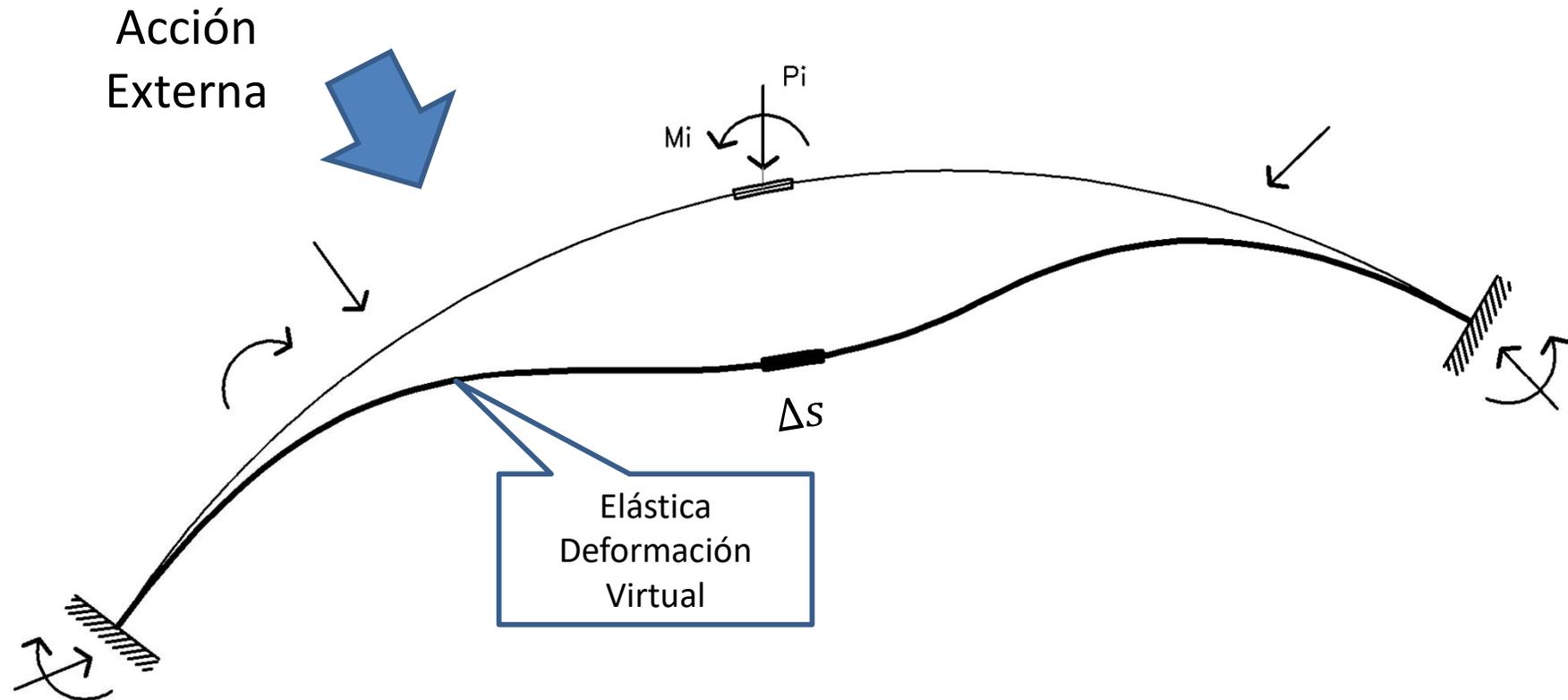
# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



*Elástica Deformación Virtual*



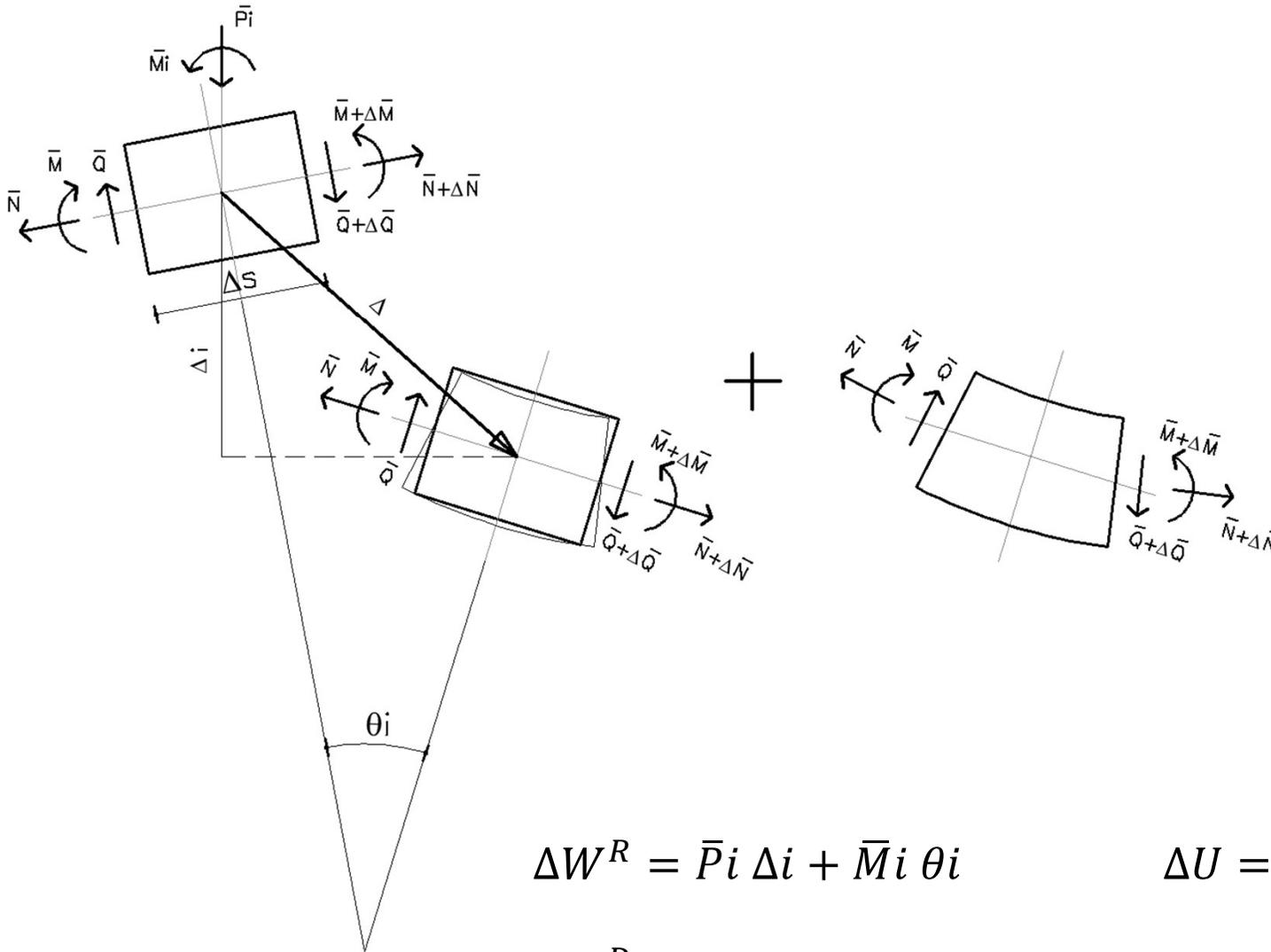
*Mov. Rígido*

+

*Deformación*

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



$$\Delta W = \Delta W^R + \Delta W^D$$

$$\Delta U = \Delta U^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^R + \Delta U^R = 0$$

$$\Delta U^R = -\Delta W^R$$

$$\Delta W^R = \bar{P}_i \Delta i + \bar{M}_i \theta_i$$

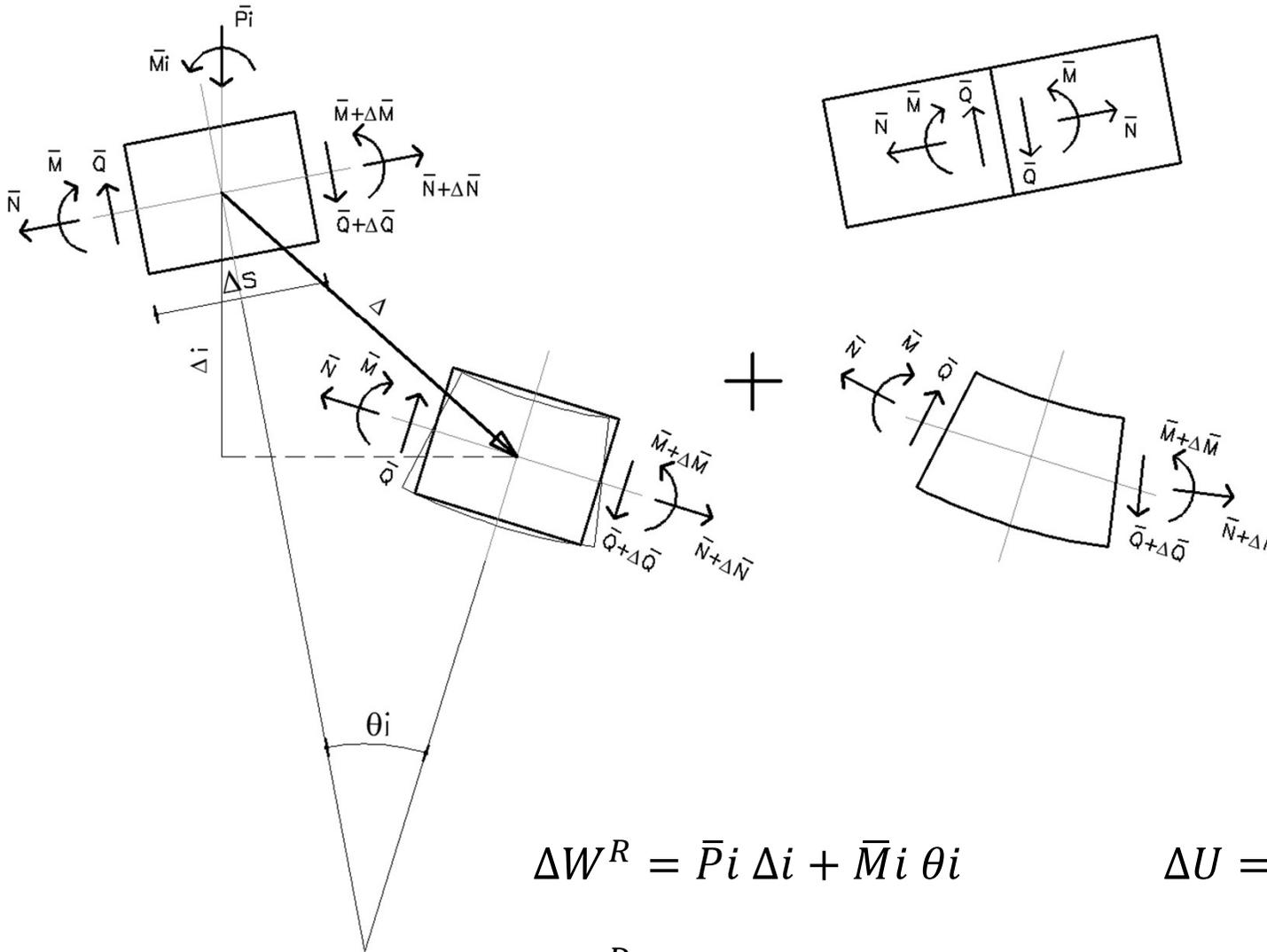
$$\Delta U = -\Delta W^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^D = 0$$

$$\Delta W = \Delta W^R$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



$$\Delta W = \Delta W^R + \Delta W^D$$

$$\Delta U = \Delta U^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^R + \Delta U^R = 0$$

$$\Delta W^R = \bar{P}_i \Delta i + \bar{M}_i \theta_i$$

$$\Delta U = -\Delta W^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^D = 0$$

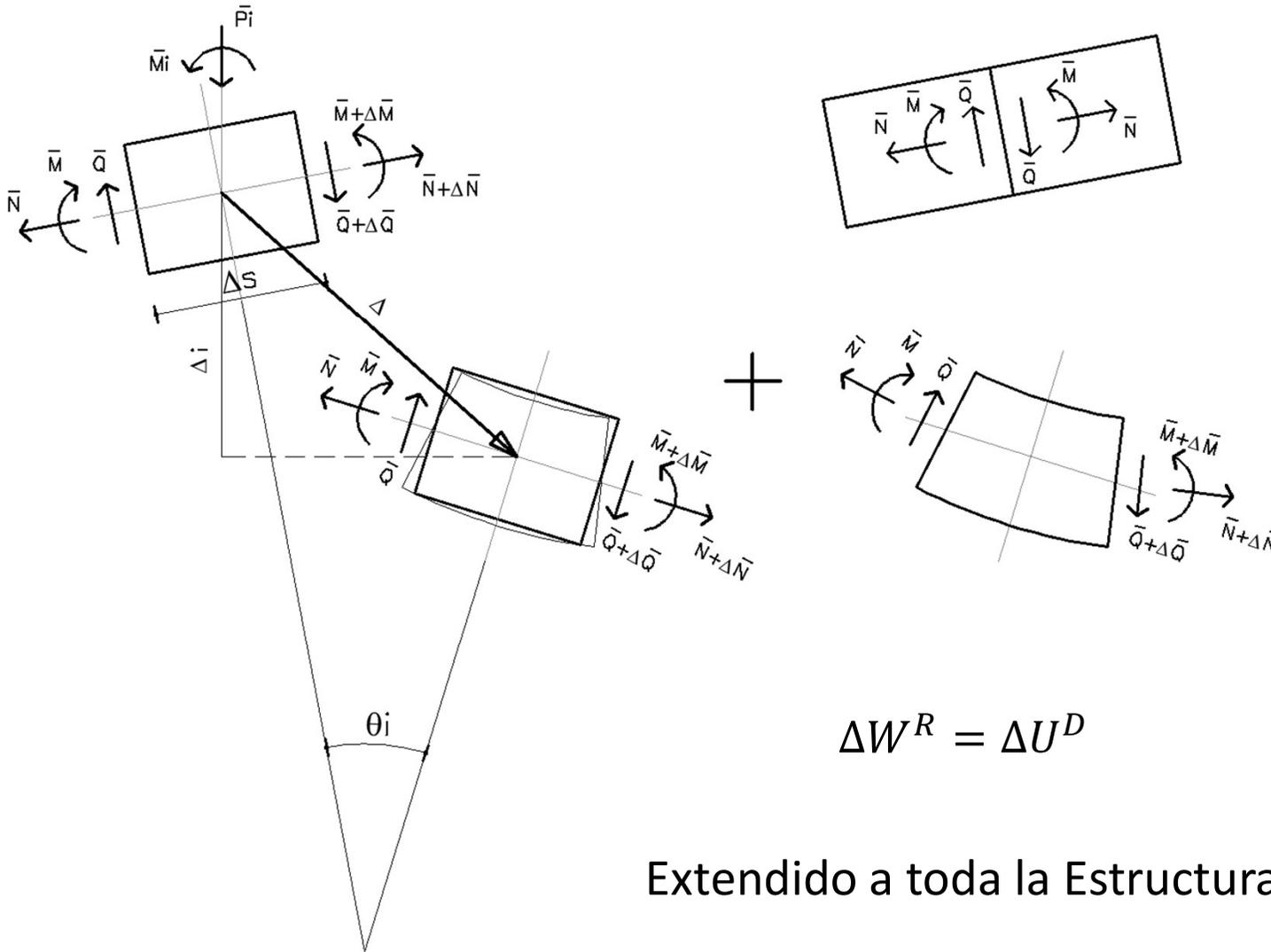
$$\Delta U = 0$$

$$\Delta W = \Delta W^R$$

$$\Delta W^R = \Delta U^D$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



$$\Delta W = \Delta W^R + \Delta W^D$$

$$\Delta U = \Delta U^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^R + \Delta U^R = 0$$

$$\Delta W^R = \Delta U^D$$

Extendido a toda la Estructura

$$W^R = U^D$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV

*En todo sistema equilibrado sujeto a una deformación virtual, el trabajo de las acciones externas es igual al trabajo de las acciones internas.*

$$W^R = U^D$$

$$T_e = T_i$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Aplicación TTV

$$T_e = T_i$$

$$W^R = T_e = \sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i$$

$$dU^D = \bar{N}d\xi + \bar{M}d\theta + \bar{Q}d\eta$$

$$U^D = T_i = \int \bar{N}d\xi + \int \bar{M}d\theta + \int \bar{Q}d\eta$$

$$\sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{N}d\xi + \int \bar{M}d\theta + \int \bar{Q}d\eta$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Aplicación TTV

$$\sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{N} d\xi + \int \bar{M} d\theta + \int \bar{Q} d\eta$$

$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$

$$d\xi = \alpha \Delta T ds$$

$$d\xi_c = \frac{\alpha (\Delta T_i + \Delta T_s) ds}{2}$$

$$d\theta = \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s) ds}{h}$$

$$d\xi_c = \frac{\alpha (\Delta T_i h_1 + \Delta T_s h_2) ds}{h}$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Aplicación TTV

Expresión General de aplicación de TTV

$$\begin{aligned} \sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i = & \int \bar{N} \frac{N}{EA} ds + \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds + \psi \int \bar{Q} \frac{Q}{GA} ds + \\ & + \int \bar{N} \frac{\alpha (\Delta T_i h_1 + \Delta T_s h_2)}{h} ds + \int \bar{M} \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} ds + \int \bar{M}_t \frac{M_t}{GJt} ds \end{aligned}$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Método de la Carga Unitaria

Se consideran dos sistemas:

- La estructura real, con su geometría, materiales, cargas y vínculos.
- La misma estructura, sobre la que actúa una sola carga unitaria en la dirección del desplazamiento que se desea calcular. Es una carga ficticia o virtual.

**SD**

**SE**

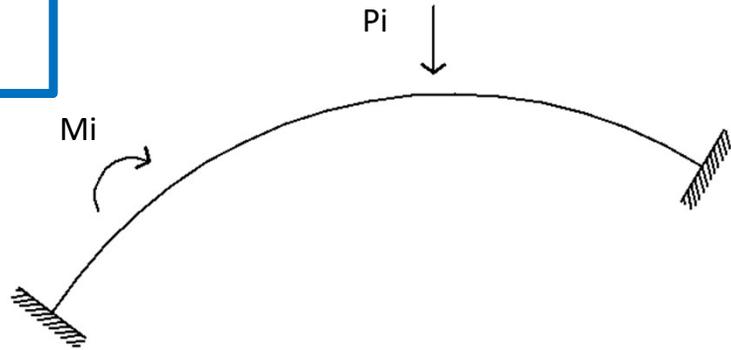
El término desplazamiento es general, puede ser:

- Corrimiento de un punto.
- La rotación de una sección (eje miembro estructural).
- El corrimiento relativo entre dos puntos.
- El giro relativo entre dos secciones.

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Método de la Carga Unitaria

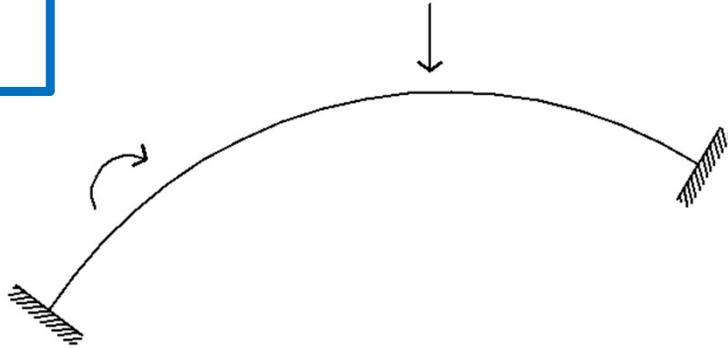
SD



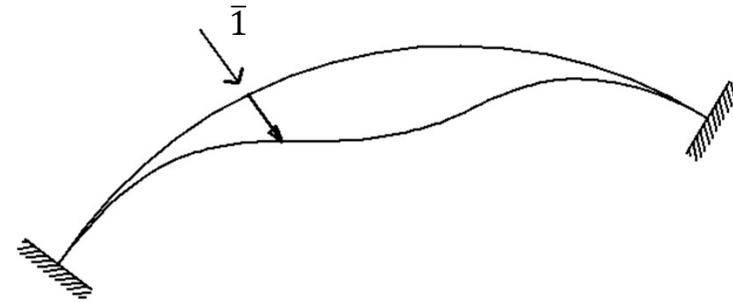
# TEOREMAS ENERGETICOS

## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Método de la Carga Unitaria

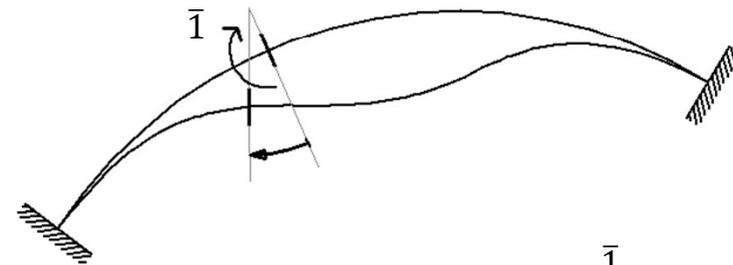
SD



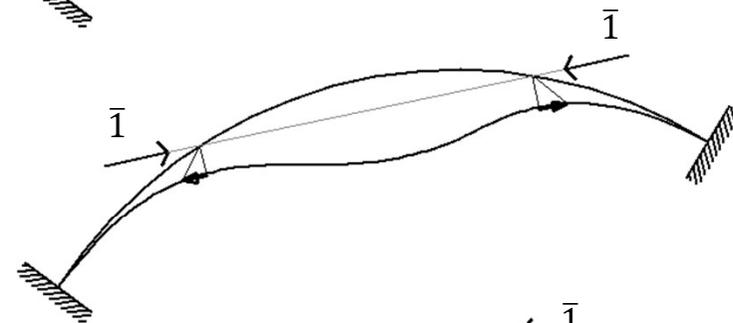
SE



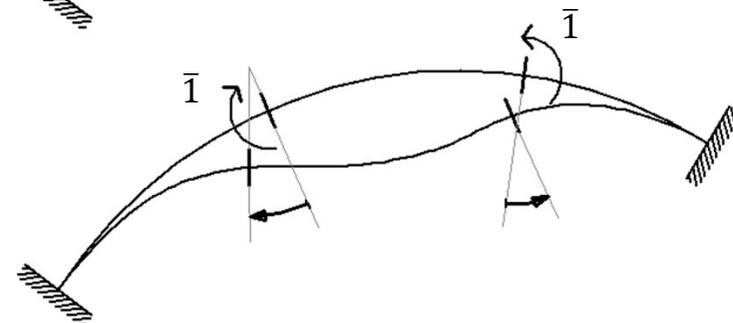
Corrimiento



Giro



Corrimiento relativo



Giro relativo

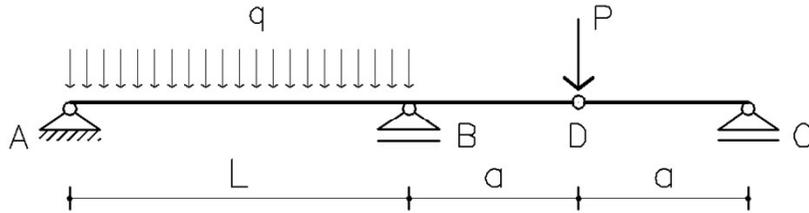
La carga  $\bar{1}$  se aplica con sentido arbitrario.

Luego de realizar los cálculos si el signo resultante para el corrimiento es positivo, el sentido supuesto para  $\bar{1}$  coincide con el sentido del corrimiento.

Si el signo resultante para el corrimiento es negativo, el sentido del corrimiento es opuesto al de  $\bar{1}$ .

# TEOREMAS ENERGETICOS

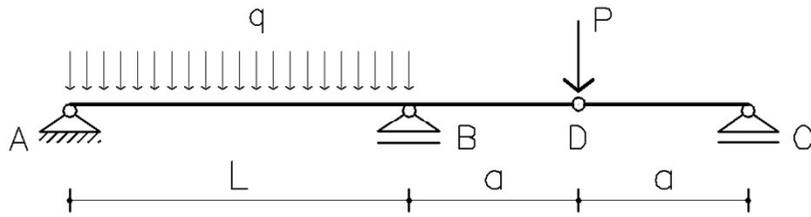
## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



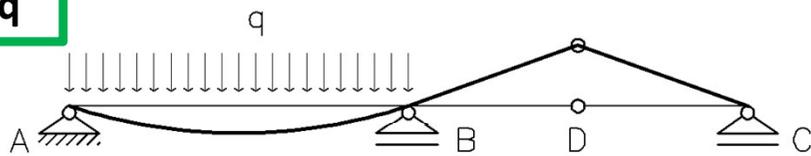
1. Calcular el corrimiento vertical del punto D.
2. Calcular el giro relativo de las secciones en D.

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

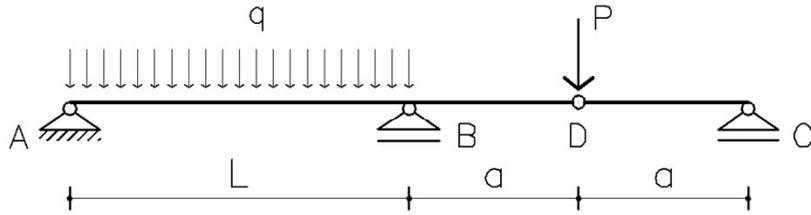


EL q

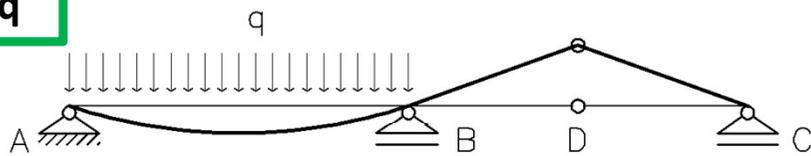


# TEOREMAS ENERGETICOS

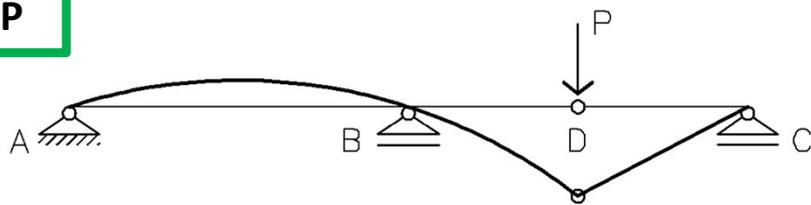
## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



EL  $q$

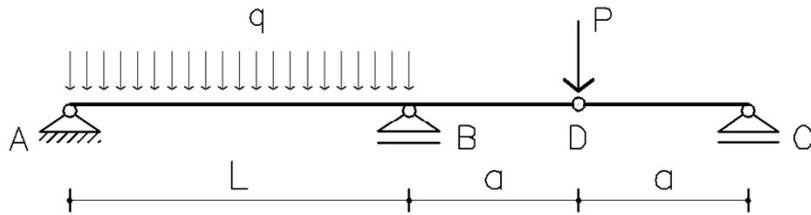


EL  $P$

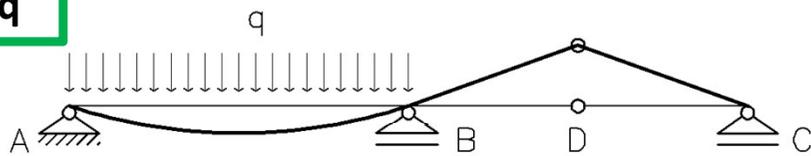


# TEOREMAS ENERGETICOS

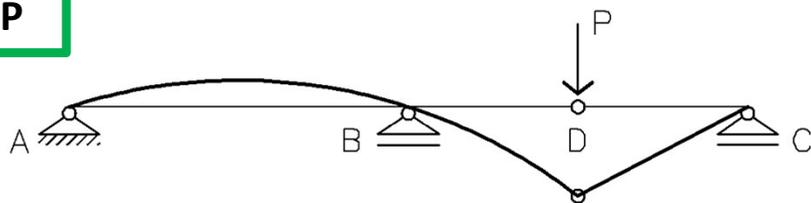
## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



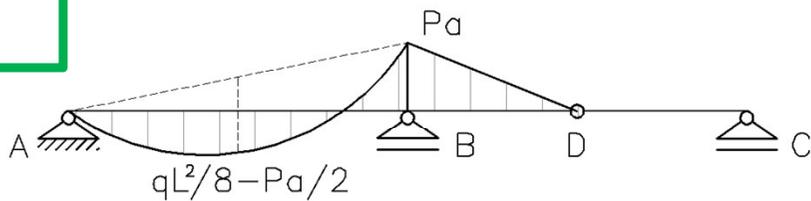
EL q



EL P



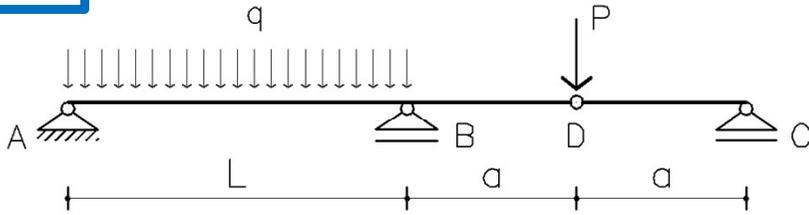
M



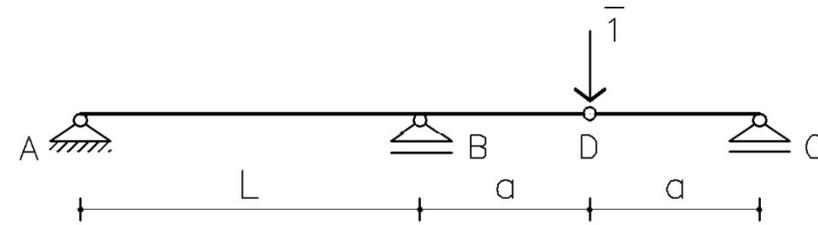
# TEOREMAS ENERGETICOS

## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

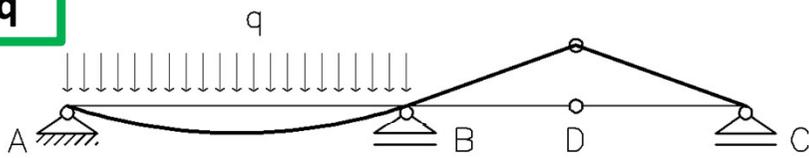
**SD**



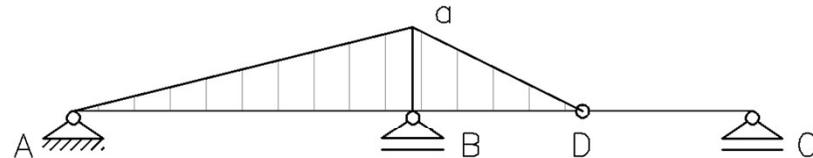
**SE**



**EL q**

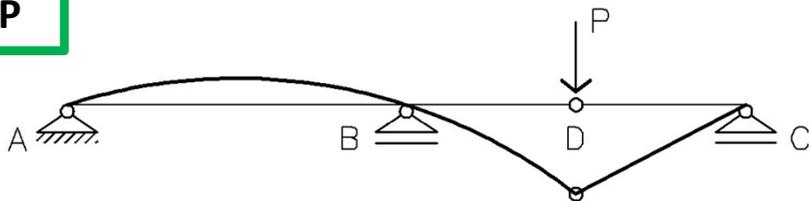


Corrimiento

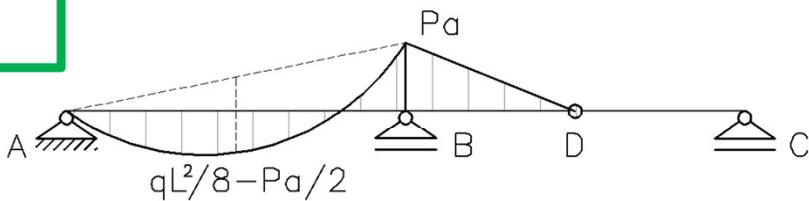


**M**

**EL P**



**M**

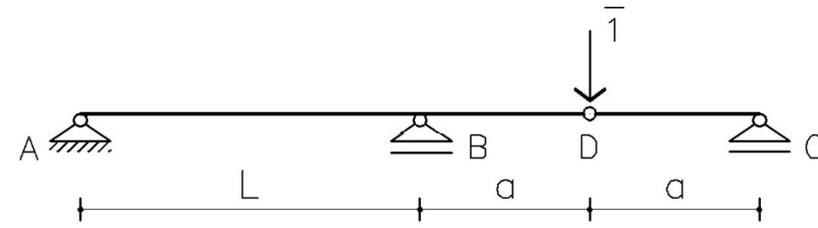
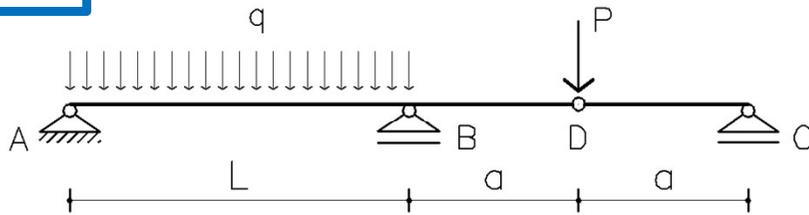


# TEOREMAS ENERGETICOS

## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

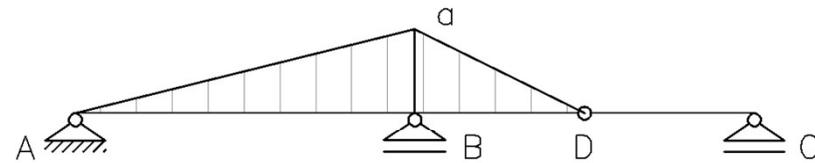
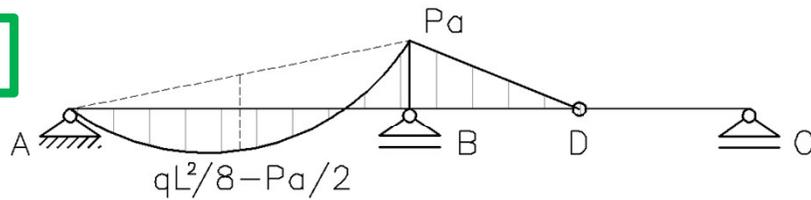
**SD**

**SE**



**M**

**M̄**



Corrimiento

$$\sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{N} \frac{N}{EA} ds + \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds + \psi \int \bar{Q} \frac{Q}{GA} ds + \int \bar{N} \frac{\alpha (\Delta T_i h_1 + \Delta T_s h_2)}{h} ds + \int \bar{M} \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} ds + \int \bar{M} t \frac{M}{GJt} ds$$

$$\sum \bar{P}_i \Delta i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds$$

$$\Delta D = \frac{1}{EI} \int \bar{M} M ds$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

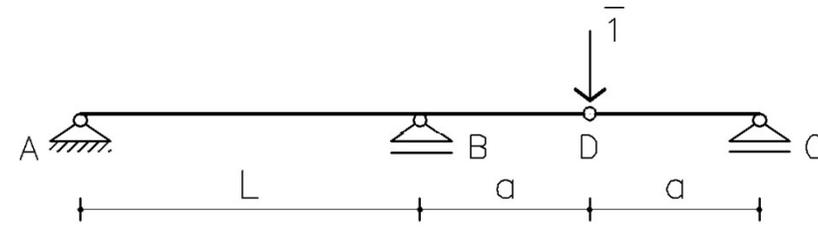
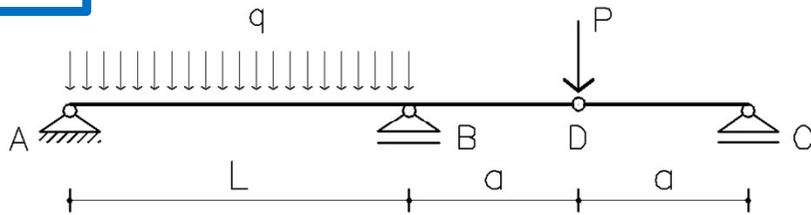
	$l' M \bar{M}$	$\frac{1}{2} l' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{2} l' M (\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{2}{3} l' M \bar{M}_m$	$\frac{2}{3} l' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{2} l' M \bar{M}$
	$\frac{1}{2} l' M_B \bar{M}$	$\frac{1}{3} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' M_B (\bar{M}_A + 2\bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} l' M_B \bar{M}_m$	$\frac{5}{12} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{4} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' (1+\alpha) M_B \bar{M}$
	$\frac{1}{2} l' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{6} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' M_A (2\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} l' M_A \bar{M}_m$	$\frac{1}{4} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' (1+\beta) M_A \bar{M}$
	$\frac{1}{2} l' (M_A + M_B) \bar{M}$	$\frac{1}{6} l' (M_A + 2M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' [M_A (2M_A + M_B) + M_B (2M_B + M_A)]$	$\frac{1}{3} l' (M_A + M_B) \bar{M}_m$	$\frac{1}{12} l' (3M_A + 5M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (M_A + 3M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' \bar{M} [M_A(1+\beta) + M_B(1+\alpha)]$
	$\frac{2}{3} l' M_m \bar{M}$	$\frac{1}{3} l' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M_m (\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{8}{15} l' M_m \bar{M}_m$	$\frac{7}{15} l' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{5} l' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' (1+\alpha\beta) M_m \bar{M}$
	$\frac{2}{3} l' M_B \bar{M}$	$\frac{5}{12} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_B (3\bar{M}_A + 5\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} l' M_B \bar{M}_m$	$\frac{8}{15} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{3}{10} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (5 - \beta - \beta^2) \times M_B \bar{M}$
	$\frac{2}{3} l' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{4} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A (5\bar{M}_A + 3\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} l' M_A \bar{M}_m$	$\frac{11}{30} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{2}{15} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (5 - \alpha - \alpha^2) \times M_A \bar{M}$
	$\frac{1}{3} l' M_B \bar{M}$	$\frac{1}{4} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_B (\bar{M}_A + 3\bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} l' M_B \bar{M}_m$	$\frac{3}{10} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{5} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (1 + \alpha + \alpha^2) \times M_B \bar{M}$
	$\frac{1}{3} l' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{12} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A (3\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} l' M_A \bar{M}_m$	$\frac{2}{15} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{30} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (1 + \beta + \beta^2) \times M_A \bar{M}$
	$\frac{1}{2} l' M \bar{M}$	$\frac{1}{6} l' (1 + \alpha) \bar{M}_B M$	$\frac{1}{6} l' M [(1 + \beta) \bar{M}_A + (1 + \alpha) \bar{M}_B]$	$\frac{1}{3} l' (1 + \alpha\beta) M \bar{M}_m$	$\frac{1}{12} l' (5 - \beta - \beta^2) \times M \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (1 + \alpha + \alpha^2) \times M \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M \bar{M}$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

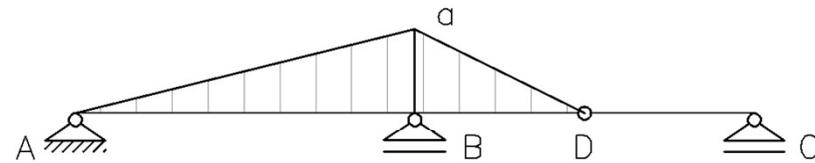
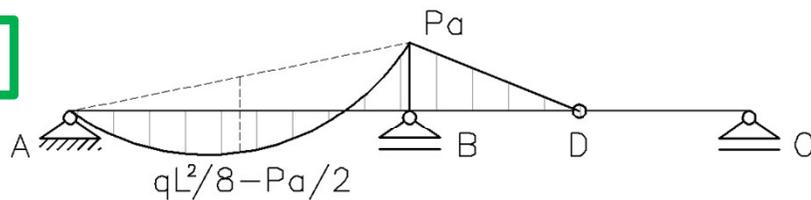
SD

SE



M

M-bar



Corrimiento

$$\sum \bar{P}_i \Delta i + \sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{N} \frac{N}{EA} ds + \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds + \psi \int \bar{Q} \frac{Q}{GA} ds + \int \bar{N} \frac{\alpha (\Delta T_i h_1 + \Delta T_s h_2)}{h} ds + \int \bar{M} \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} ds + \int \bar{M} t \frac{Mt}{GJt} ds$$

$$\sum \bar{P}_i \Delta i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds$$

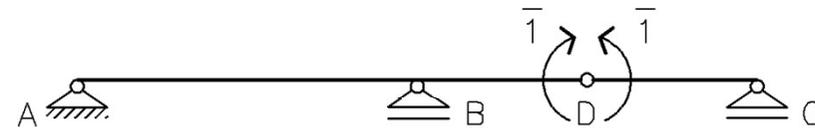
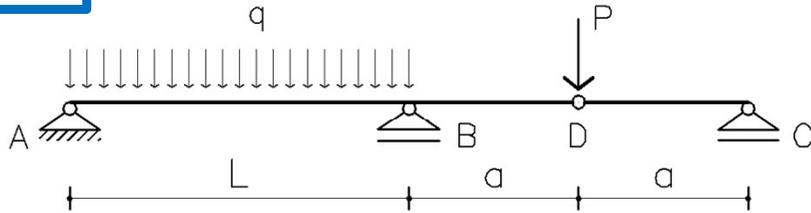
$$\Delta D = \frac{1}{EI} \int \bar{M} M ds$$
$$\frac{1}{3} \frac{qL^2}{8} a L \quad + \quad \frac{1}{3} Pa a L \quad + \quad \frac{1}{3} Pa a a$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

SD

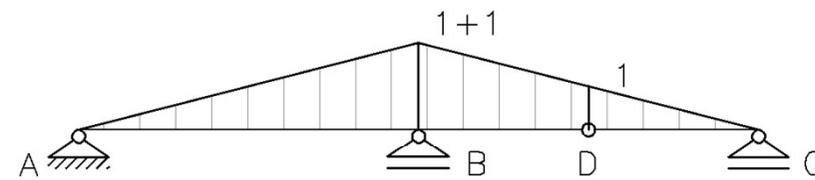
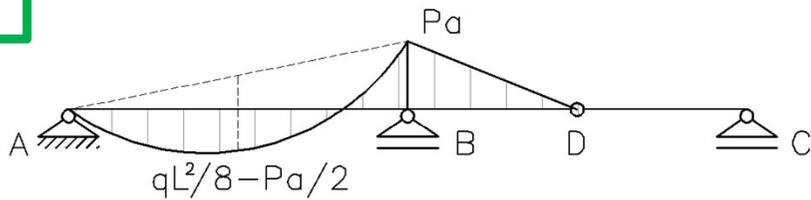
SE



M

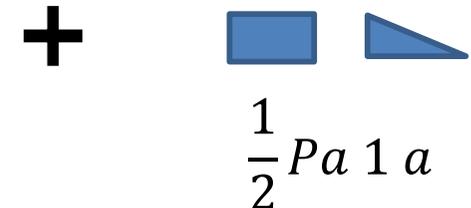
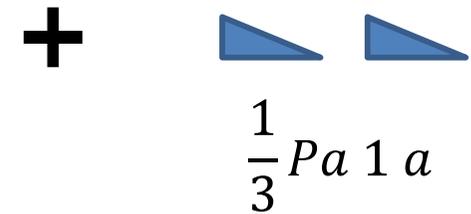
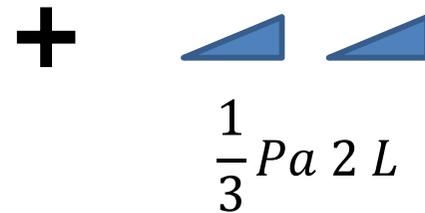
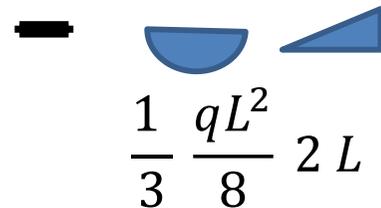
Giro relativo

M-bar



$$\sum \bar{M}_i \theta_i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} ds$$

$$\theta_D = \frac{1}{EI} \int \bar{M} M ds$$

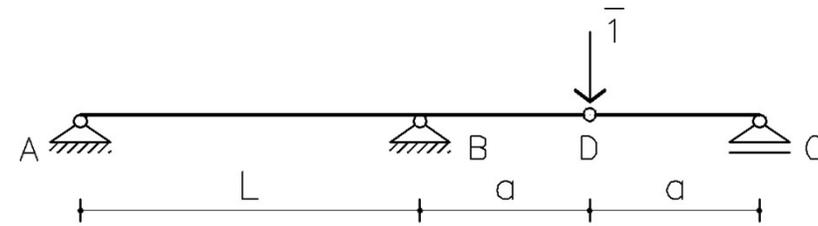
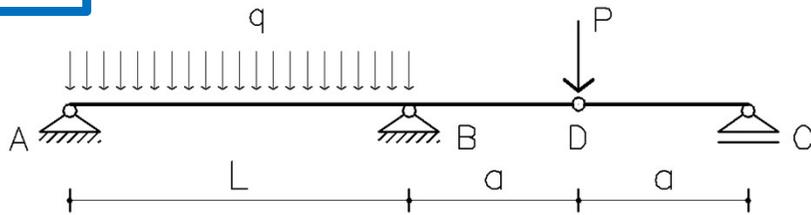


# TEOREMAS ENERGETICOS

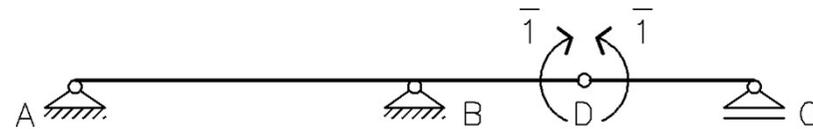
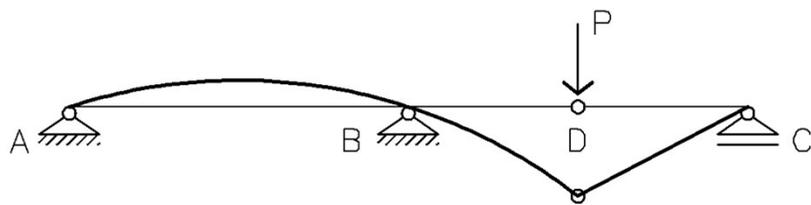
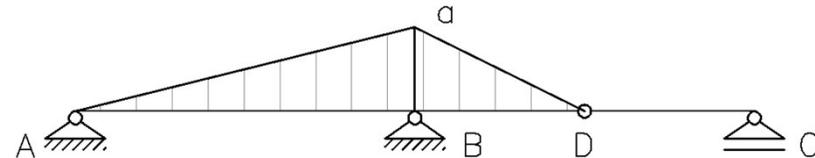
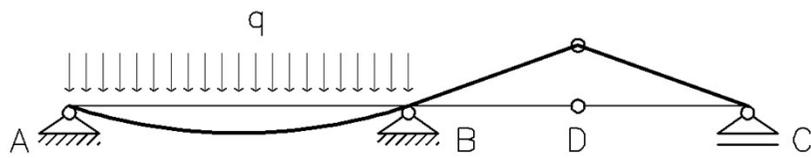
## Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

**SD**

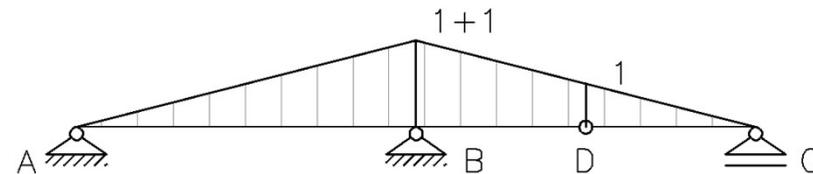
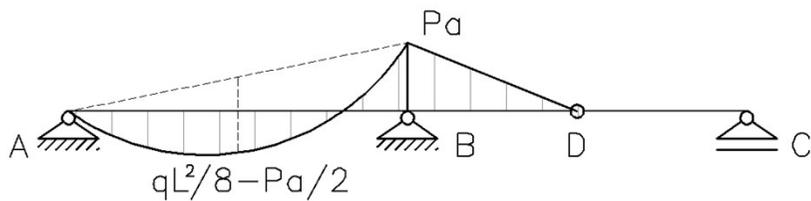
**SE**



Corrimiento



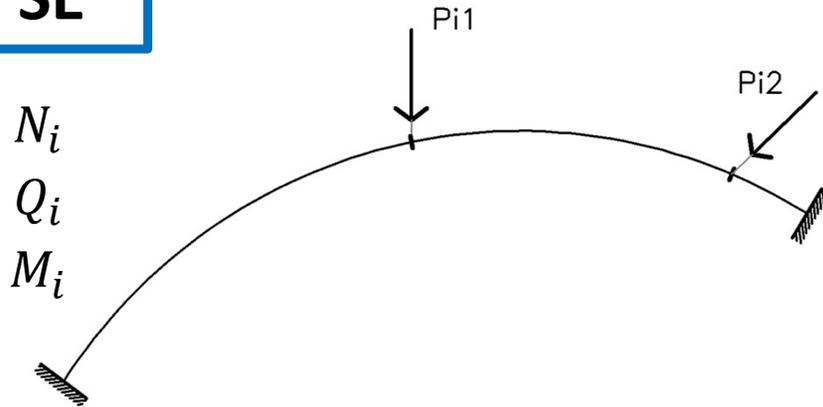
Giro relativo



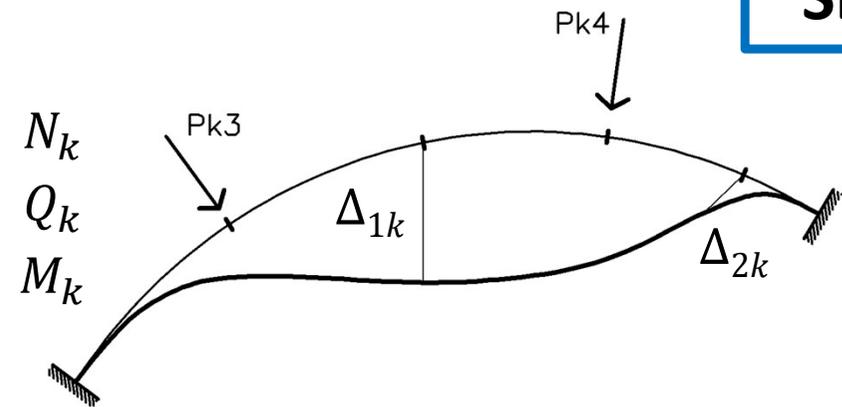
# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de Betti

SE



SD



$$\sum P_i \Delta_{ik} = \int N_i \frac{N_k}{EA} ds + \int M_i \frac{M_k}{EI} ds + \psi \int Q_i \frac{Q_k}{GA} ds$$

$$\sum P_k \Delta_{ki} = \int N_k \frac{N_i}{EA} ds + \int M_k \frac{M_i}{EI} ds + \psi \int Q_k \frac{Q_i}{GA} ds$$

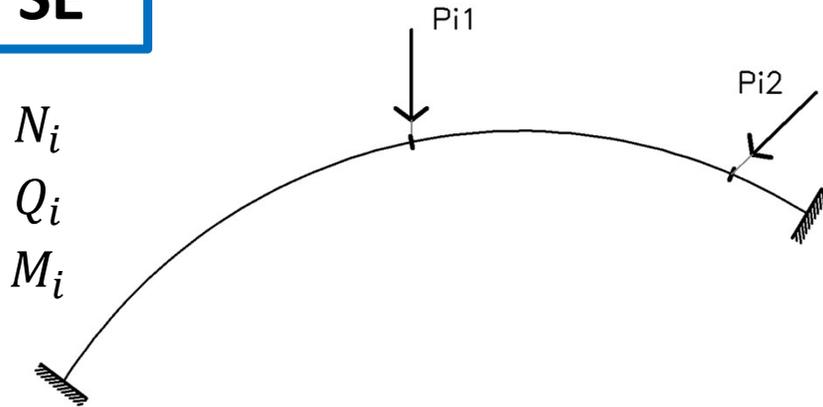
$$\sum P_i \Delta_{ik} = \sum P_k \Delta_{ki}$$

$$W_{ik} = W_{ki}$$

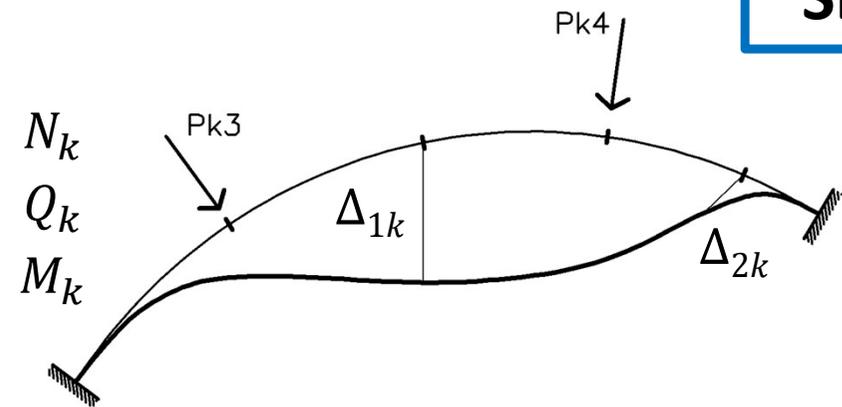
# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de Betti

SE



SD



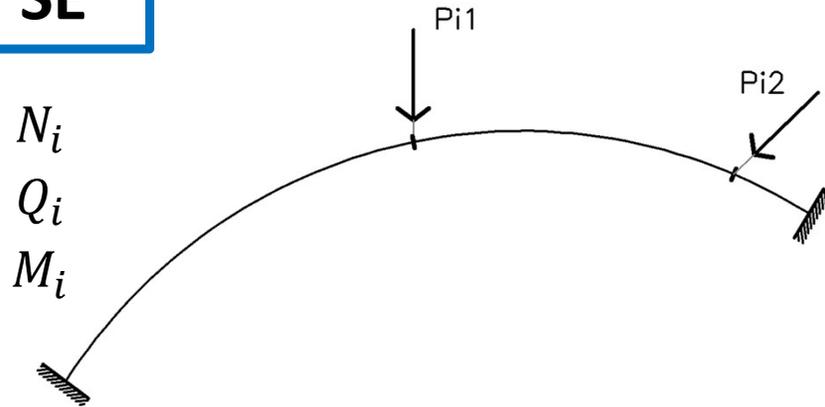
*El trabajo virtual de sistema de fuerzas  $P_i$  en la deformación virtual debida a otro sistema de fuerzas  $P_k$ , es igual el trabajo de  $P_k$  en las deformaciones virtuales provocadas por  $P_i$ .*

$$W_{ik} = W_{ki}$$

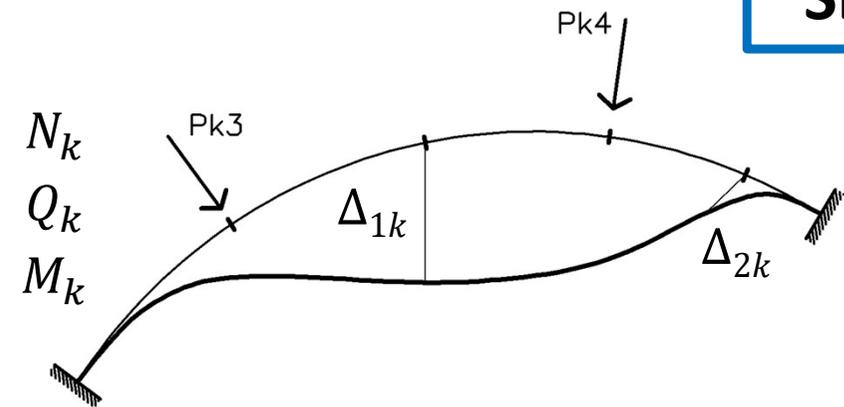
# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de Maxwell

SE



SD



$$\sum P_i \Delta_{ik} = \sum P_k \Delta_{ki}$$

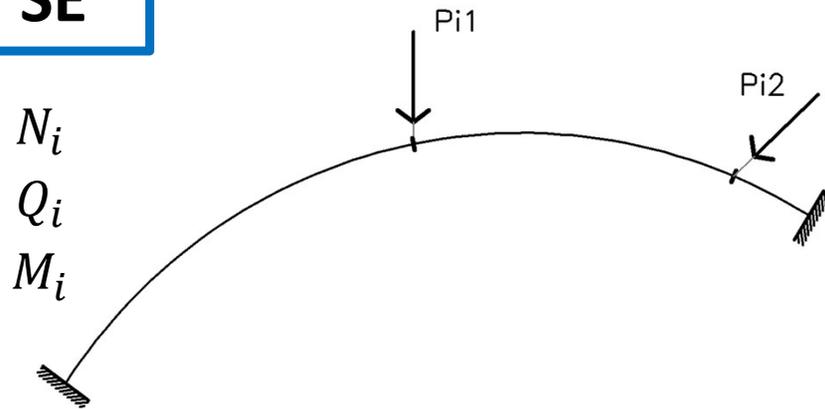
Si  $P_i$  en una sola fuerza unitaria y  $P_k$  también esta formado por una única fuerza unitaria

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

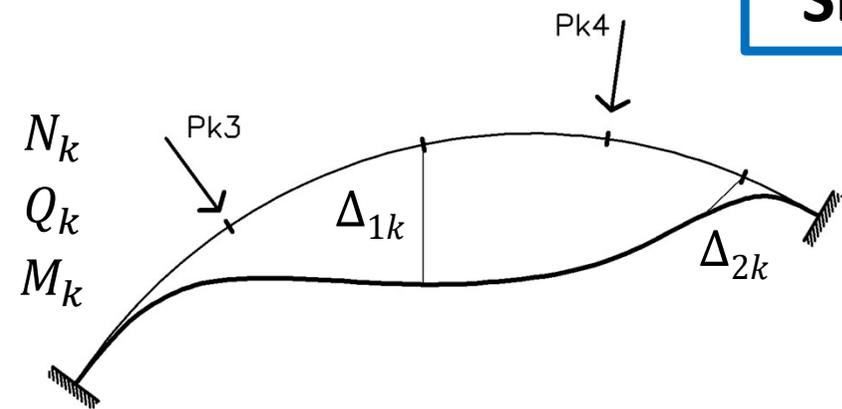
# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teorema de Maxwell

SE



SD



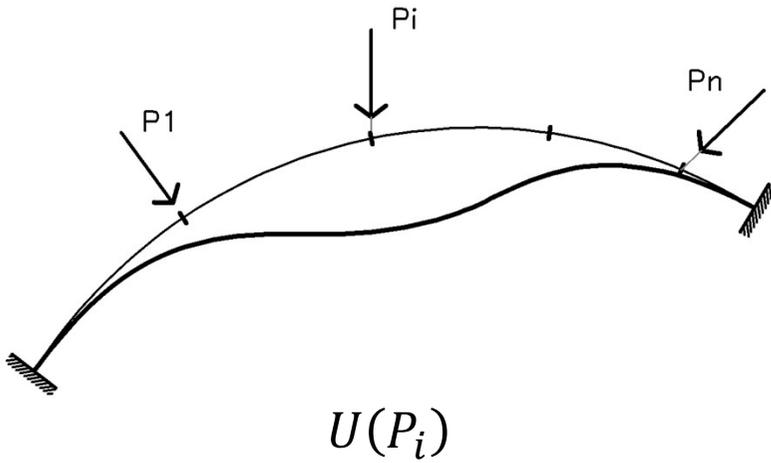
*El desplazamiento en la dirección de una acción (fuerza o momento) que actúa en una sección A, debido a una acción unitaria actuando en una sección B, es igual al desplazamiento en B provocado por una acción unitaria actuando en A.*

*También se denomina Teorema de reciprocidad de deformaciones .*

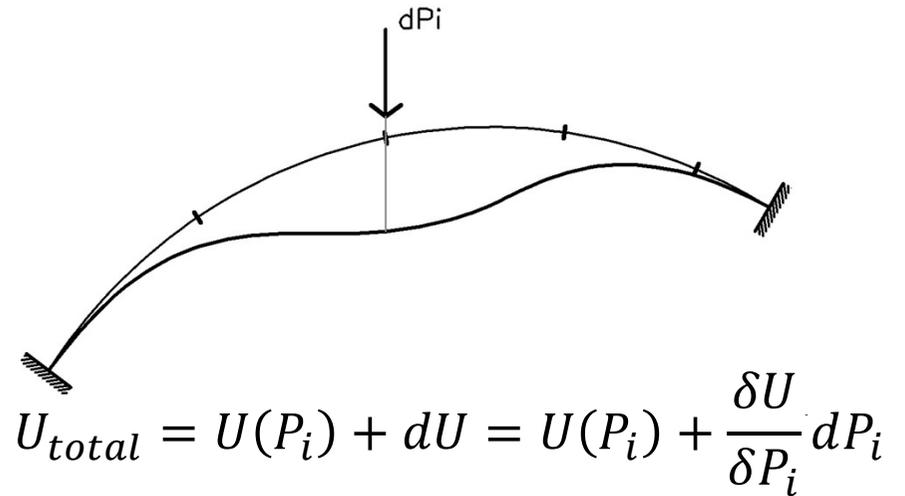
$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## Teoremas de Castigliano



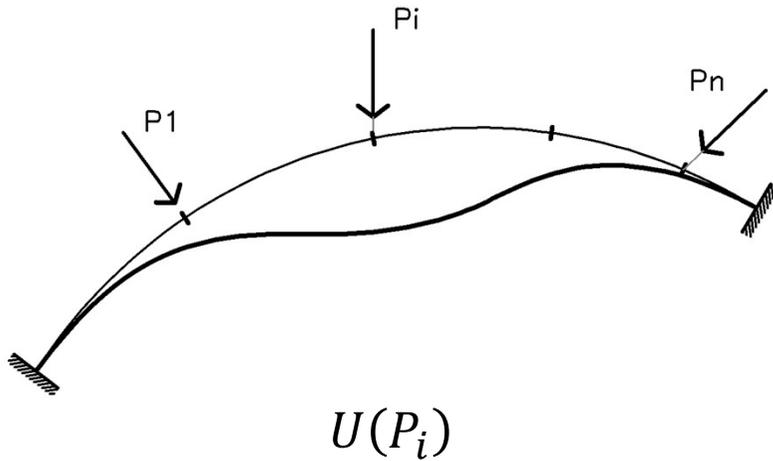
+  $dP_i$



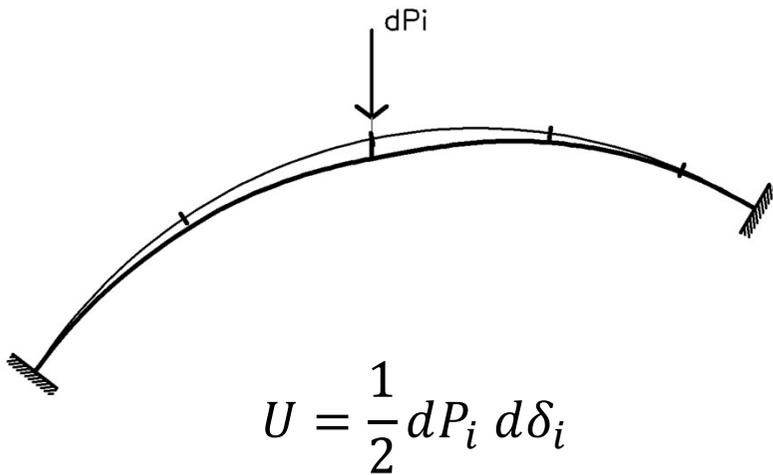
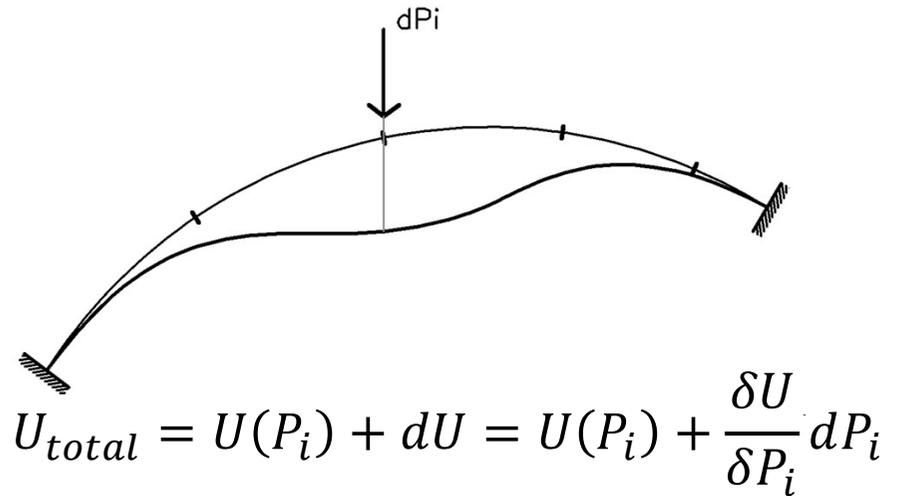
$$\frac{\delta U}{\delta P_i} = \int \left( \frac{N}{EA} \frac{\delta N}{\delta P_i} + \frac{M}{EI} \frac{\delta M}{\delta P_i} + \psi \frac{Q}{GA} \frac{\delta Q}{\delta P_i} \right) ds$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

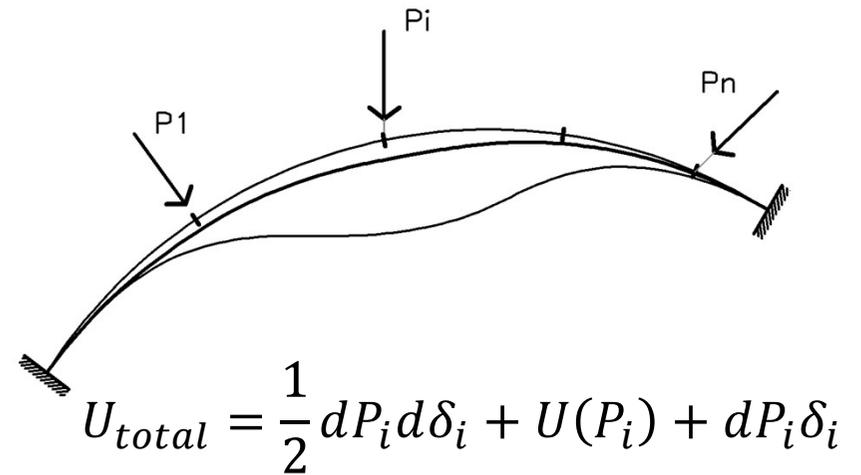
## Teoremas de Castigliano



$$+ dP_i$$



$$+ (P_1 \dots P_n)$$

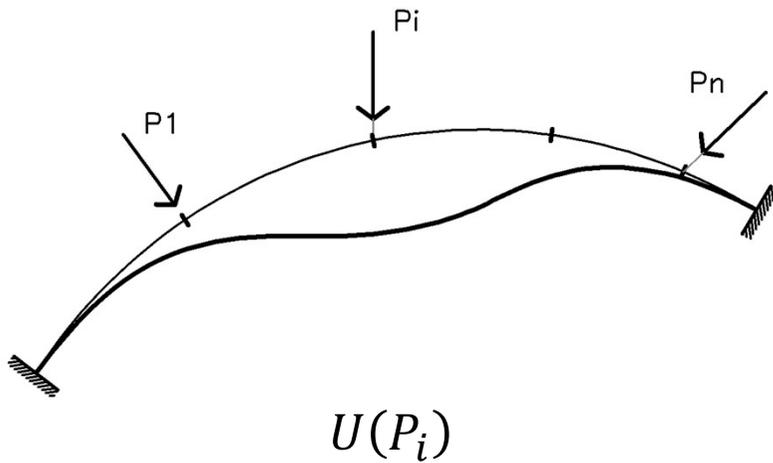


$$U(P_i) + \frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i = \frac{1}{2} dP_i d\delta_i + U(P_i) + dP_i \delta_i$$

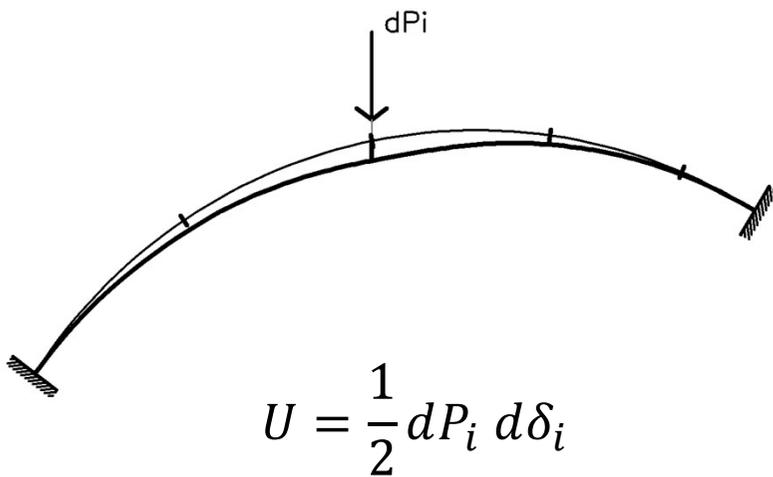
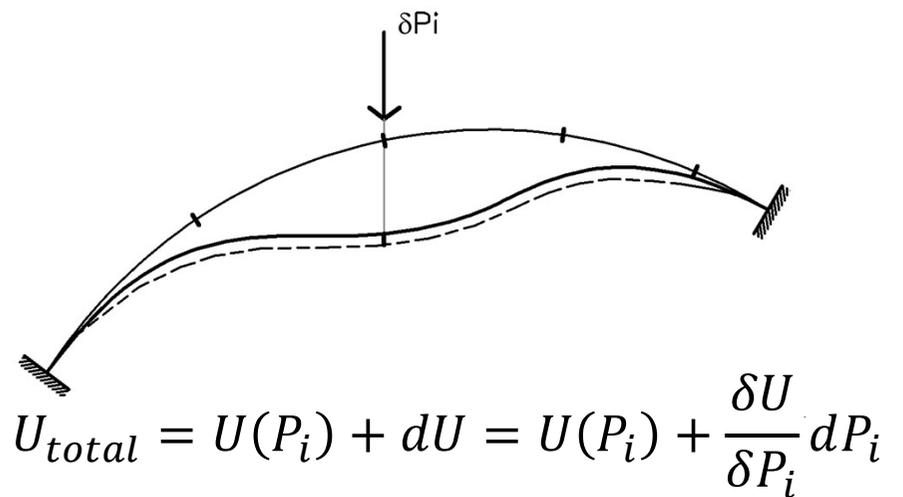
$$\frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i = dP_i \delta_i$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

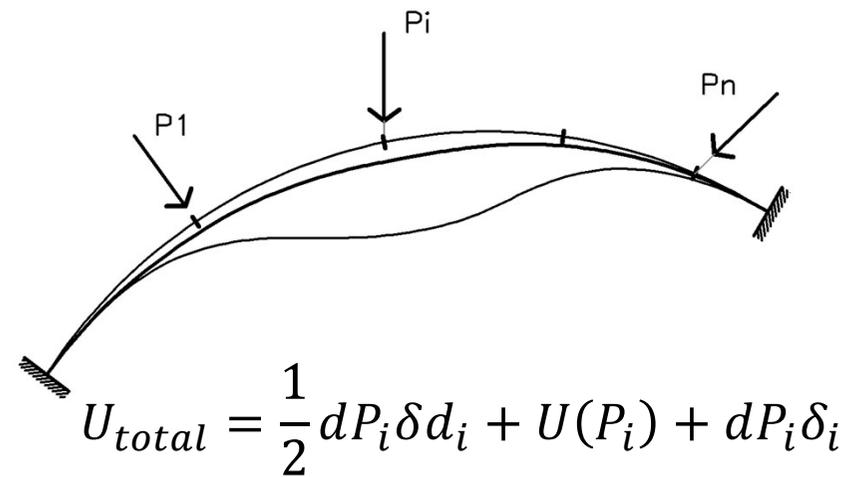
## Teoremas de Castigliano



$$+ dP_i$$



$$+ (P_1 \dots P_n)$$



$$\frac{\delta U}{\delta P_i} = \delta_i$$

# TEOREMAS ENERGETICOS

## 1° Teorema de Castigliano

*La derivada de la energía de deformación de una estructura (sobre la que actúan  $n$  cargas) respecto de cualquier desplazamiento es igual a la carga que actúa en la dirección de ese desplazamiento.*

$$\frac{\delta U}{\delta d_i} = P_i$$

$$U = U(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

## 2° Teorema de Castigliano

*La derivada de la energía de deformación de una estructura (sobre la que actúan  $n$  cargas) respecto de cualquier carga es igual al desplazamiento en la dirección de esa carga.*

$$\frac{\delta U}{\delta P_i} = \delta_i$$

$$U = U(P_1, P_2, \dots, P_n)$$