ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 2: Teoremas Energéticos y Cálculo de desplazamientos

Dr. Ing. Carlos García Garino

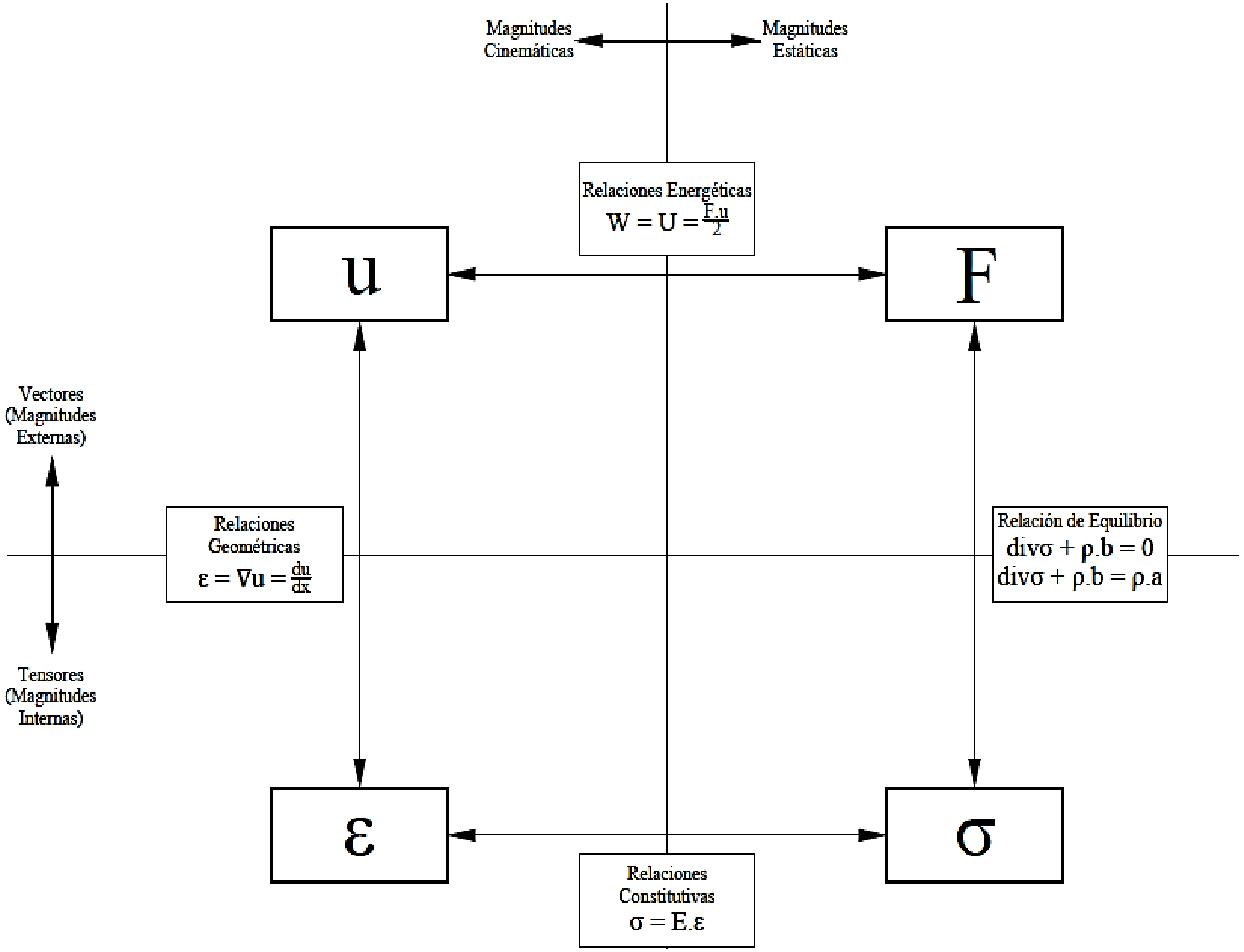
Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de Cuyo

Abril de 2022

Temario

1. Introducción
2. Trabajo y Energía
3. Elástica de Deformación
4. Teoremas Energéticos
5. Teorema de Trabajos Virtuales (TTV)

1. Introducción



2. Trabajo y Energía

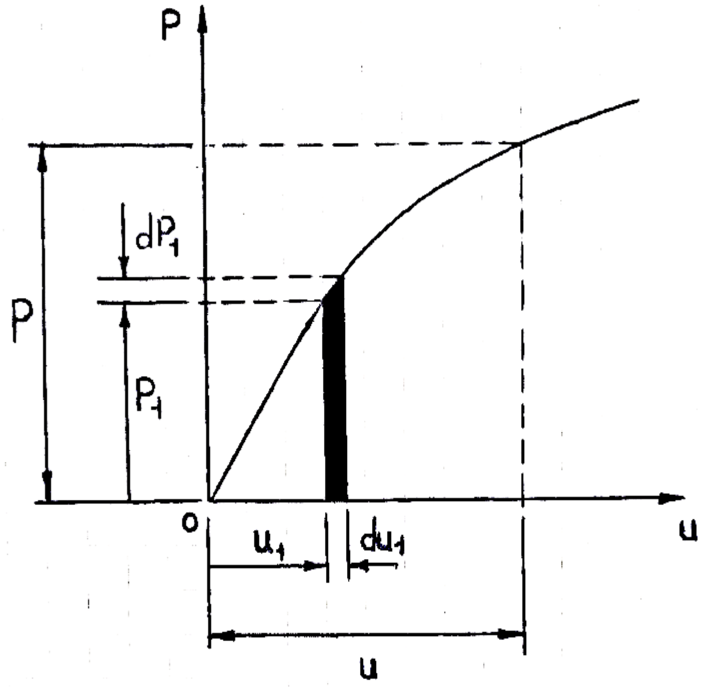
Dado un sólido sometido a una carga puntual de intensidad máxima P, carga es del tipo *CuasiEstático*.

Durante el proceso de carga, que se gráfica en la Figura, se genera un desplazamiento u, a través del cual P efectúa un trabajo de deformación W.

$$W = \int_0^u P_1 . du_1$$

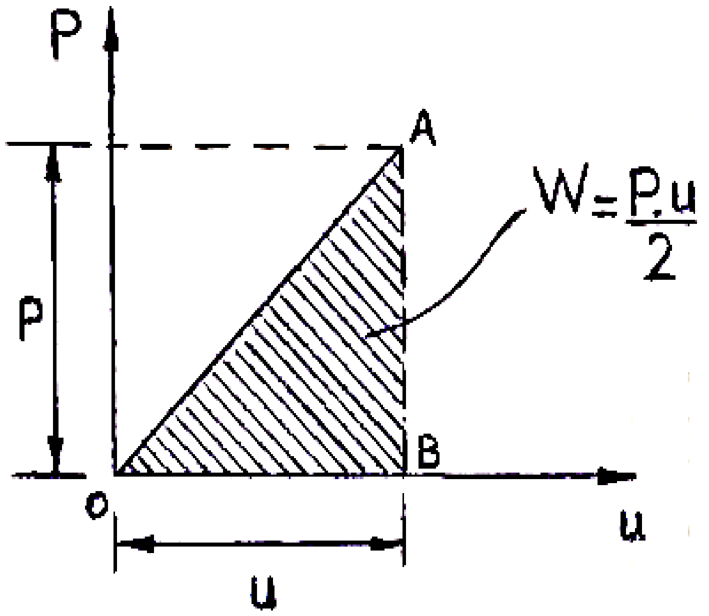
Por el *Principio de Conservación de la Energía*, la Energía de Deformación Interna U es igual al trabajo W entregado por P:

$$U = W = \int_0^u P_1 . du_1$$



2. Trabajo y Energía para materiales lineales

Una de las hipótesis de la asignatura planteada en la Unidad 1, propone que los materiales obedecen la *Ley de Hooke*. Luego, la curva Fuerza – Desplazamiento es una línea recta, como se muestra en la figura.



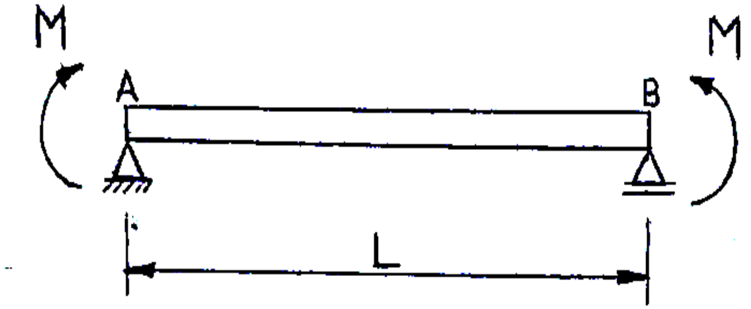
La energía de deformación y el trabajo externo, se miden por el área bajo la curva (triángulo AOB):

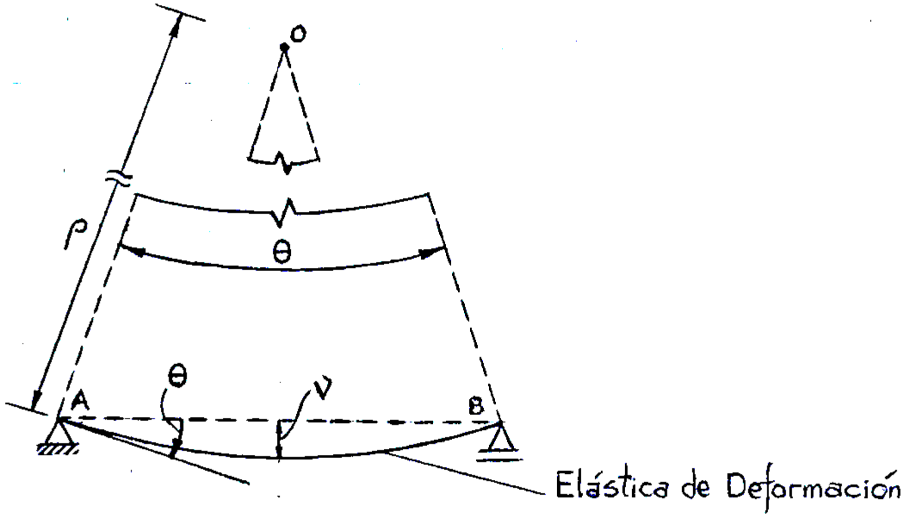
$$U = W = \frac{P.u}{2}$$

2. Energía de deformación en Flexión

Para la viga simplemente apoyada AB de longitud L, que se observa en la figura, sometida a flexión pura resulta:

$$\theta = \frac{L}{\rho} = \kappa . L = \frac{M . L}{EI}$$

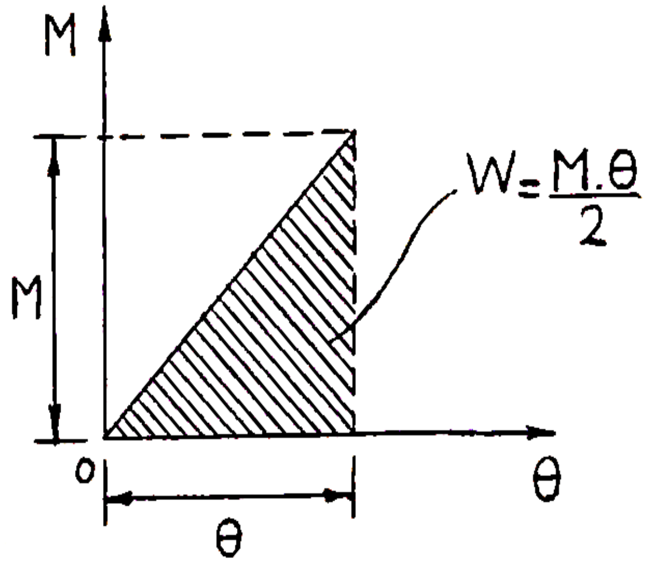




2. Energía de deformación en Flexión

Si la relación entre El Momento Flector M y el giro θ es lineal como se muestra en la figura, resulta

$$U = W = \frac{M.\theta}{2}$$



Al combinar esta ecuación con la correspondiente a θ

$$\theta = \frac{L}{\rho} = \kappa.L = \frac{M.L}{EI}$$

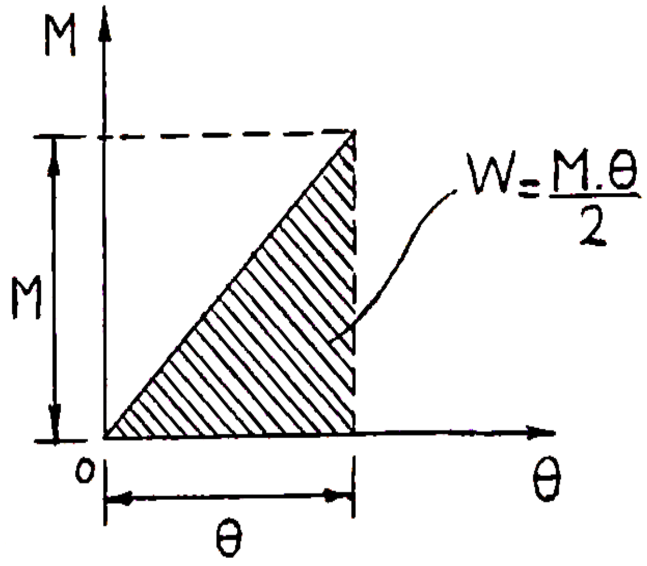
Se obtienen dos expresiones en función de M o de θ

$$U = \frac{M^2.L}{2EI} \quad ; \quad U = \frac{EI.\theta^2}{2L}$$

2. Energía de deformación en Flexión

Si la relación entre El Momento Flector M y el giro θ es lineal como se muestra en la figura, resulta

$$U = W = \frac{M.\theta}{2}$$



Al combinar esta ecuación con la correspondiente a θ

$$\theta = \frac{L}{\rho} = \kappa.L = \frac{M.L}{EI}$$

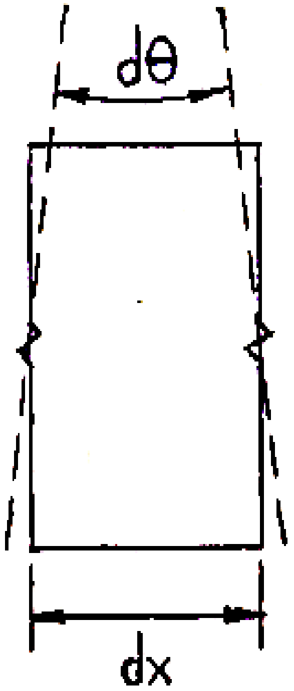
Se obtienen dos expresiones en función de M o de θ

$$U = \frac{M^2.L}{2EI} \quad ; \quad U = \frac{EI.\theta^2}{2L}$$

2. Energía de deformación en Flexión

Si el momento flector interno $M_{(x)}$ varía a lo largo de la viga, las ecuaciones obtenidas se plantean para un elemento de viga de longitud dx:

$$d\theta = \kappa . dx = \frac{d^2\nu}{dx^2} . dx$$



El cambio en la energía interna vendrá dado por:

$$dU = \frac{M_{(x)}}{2} . d\theta$$

Luego, reemplazando, se obtiene:

$$dU = \frac{{M_{(x)}}^2}{2EI} . dx \quad ; \quad dU = \frac{EI(d\theta)^2}{2dx} = \frac{EI}{2dx} . \left(\frac{d^2\nu}{dx^2} . dx\right)^2 = \frac{EI}{2} . \left(\frac{d^2\nu}{dx^2}\right)^2 . dx$$

Integrando en toda la longitud de la viga se obtiene la Energía de Deformación Total:

$$U = \int \frac{\left[M_{(x)}\right]^2}{2EI} dx \quad ; \quad U = \int \frac{EI}{2} . \left(\frac{d^2\nu}{dx^2}\right)^2 dx$$

2. **Cálculo de giros y desplazamientos a través de la energía de deformación:**

Viga empotrada con una carga P en su extremo libre

Si La variación de momento flector interno viene dada por:

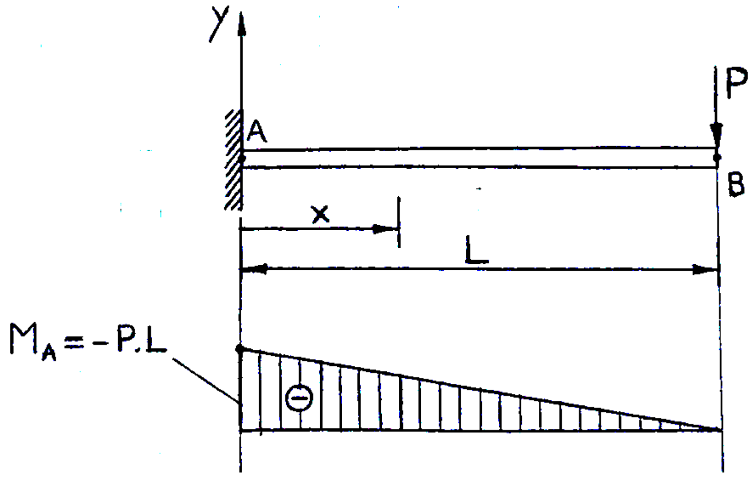
$$M_{(x)} = -P.(L - x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq L$$

Integrando, se obtiene la energía de deformación según:

$$U = \int \frac{\left[M_{(x)}\right]^2}{2EI} dx$$

$$U = \int_0^L \frac{[-P.(L - x)]^2}{2EI} dx = \frac{P^2}{2EI} \int_0^L (L^2 - 2Lx + x^2) dx$$

$$U = \frac{P^2.L^3}{6EI}$$

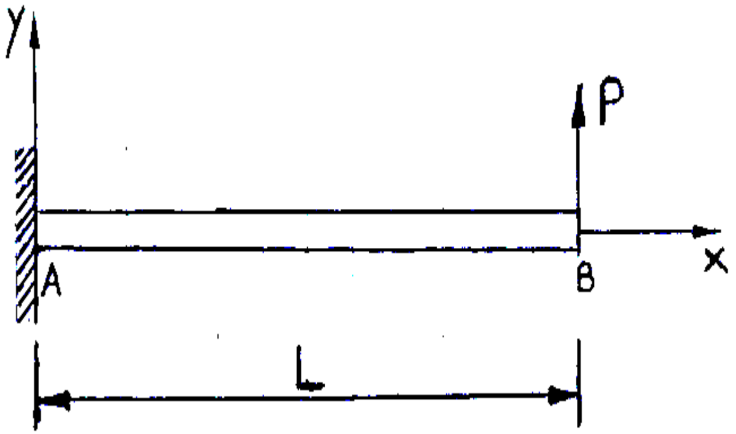


Dado que el trabajo W resulta $U = P.\nu/2$, considerando U = W, el desplazamiento en el punto B de aplicación de la carga P resulta:

$$U = \frac{P^2.L^3}{6EI} = P.\frac{\nu}{2}$$

$$\nu_B^P = -\frac{P.L^3}{3EI}$$

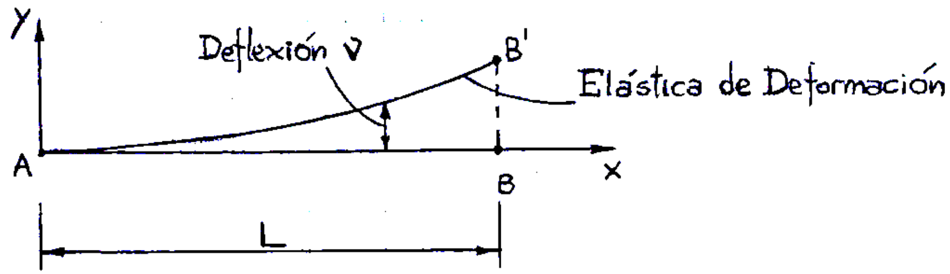
3. Elástica de deformación:



Para un elemento estructural, como la viga en voladizo de la figura superior, con cargas que actúan de forma perpendicular al eje longitudinal del mismo, como se sabe de cursos previos aparecen esfuerzos de flexión.

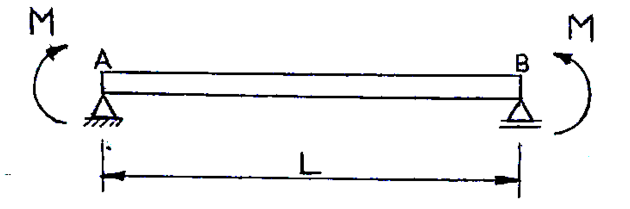
Luego la pieza se flexiona o deforma, y el eje de la misma, antes recto, se curva. Dicha curva se denomina *Elástica de Deformación* o elástica o deformada a secas, y representa, para las estructuras sometidas a flexión, los desplazamientos perpendiculares al eje de la pieza considerada.

Por ejemplo, para la viga en voladizo AB de longitud L sometida a una carga P en su extremo libre, la figura inferior representa de manera aproximada la deformada.



3. Elástica de deformación: ecuación diferencial de la elástica

En la práctica resulta de interés obtener la función que representa la elástica. Por ejemplo, para viga simplemente apoyada de la figura, sometida a flexión simple:



Recordando la definición de la curvatura $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$, las relaciones de la curvatura con la la Tasa de Cambio de Giro $d\theta/dx$ y con la tasa de cambio de los desplazamientos perpendiculares al eje de la pieza $d\nu/dx$, $\kappa = \frac{d\theta}{dx}$; $\theta = \frac{d\nu}{dx}$, relacionando dichas ecuaciones resulta:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\nu}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Que expresa la *Ecuación Diferencial de la Elástica de Deformación*. Conocida la función que representa el diagrama de Momentos, integrando pueden obtenerse las funciones que representan los giros y los desplazamientos. A partir de estas funciones pueden calcularse los giros y desplazamientos en los puntos de interés.

3. Elástica de deformación: viga en voladizo

Se expresa la Relación Momento – Curvatura en función del momento flector $M_{(x)}$, y se integra para obtener la expresión del giro :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_{(x)}}{EI} = \frac{P.(L-x)}{EI}$$

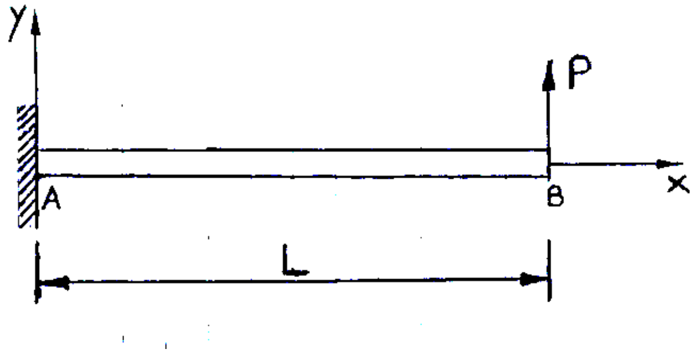
$$\theta_{(x)} = \int \frac{P.(L-x)}{EI} dx = \frac{P}{EI}.\left(L.x - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

Aplicando la condición de borde $\theta_{(0)} = 0$, se obtiene $C_1 = 0$, luego queda:

$$\theta_{(x)} = \frac{P}{EI}.\left(L.x - \frac{x^2}{2}\right)$$

El *giro máximo* se produce en $x = L$:

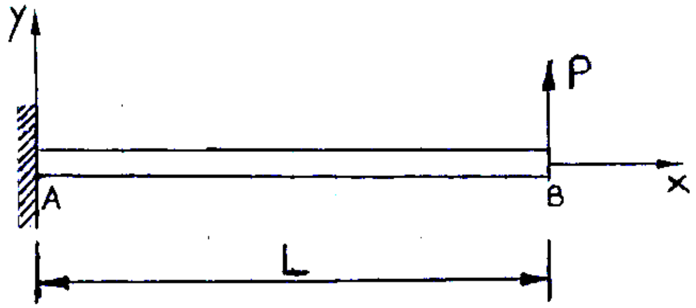
$$\theta_B^P = \theta_{máx} = \theta_{(L)} = \frac{P.L^2}{2EI}$$



La función del momento flector viene dada por:

$$M_{(x)} = P.(L-x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq L$$

3. Elástica de deformación: Viga en voladizo



A partir de la expresión del giro $\theta_{(x)} = \frac{P}{EI}.\left(L.x - \frac{x^2}{2}\right)$, recordando $\frac{d\nu}{dx} = \theta_{(x)}$ e integrando se obtiene:

$$\nu_{(x)} = \int \frac{P}{EI}.\left(L.x - \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{P}{EI}.\left(L.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_2$$

Aplicando la condición de borde $\nu_{(0)} = 0$, se obtiene $C_2 = 0$ y así la Ecuación de la Elástica queda expresada como:

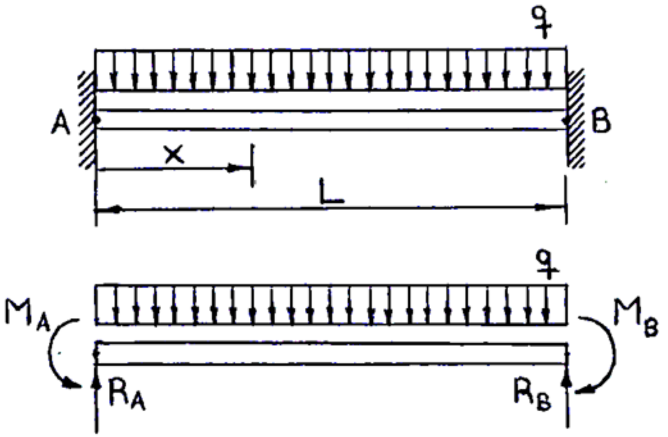
$$\nu_{(x)} = \frac{P}{EI}.\left(L.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

El desplazamiento máximo o *flecha* se produce en $x = L$ y es igual a:

$$\nu_B^P = \nu_{máx} = \nu_{(L)} = \frac{P.L^3}{3EI}$$

3. Elástica de deformación: Viga doblemente empotrada

De manera análoga al problema interior la expresión del giro se obtiene integrando el diagrama de momentos $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_{(x)}}{EI}$:



$$\theta_{(x)} = \frac{1}{EI} . \int \left(-X_1 + q . \frac{L}{2} . x - q . \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$\theta_{(x)} = \frac{1}{EI} . \left(-X_1 . x + q . \frac{L}{4} . x^2 - q . \frac{x^3}{6} \right) + C_1$$

Aplicando la condición de contorno $\theta_{(0)} = 0$, se obtiene $C_1 = 0$ y así:

$$\theta_{(x)} = \frac{1}{EI} . \left(-X_1 . x + q . \frac{L}{4} . x^2 - q . \frac{x^3}{6} \right)$$

$$R_A = R_B = q . \frac{L}{2} \ ,$$

$$M_A = M_B = X_1$$

$$M_{(x)} = -X_1 + q . \frac{L}{2} . x - q . \frac{x^2}{2}$$

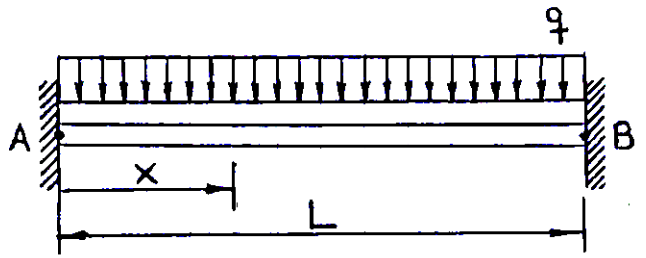
Por razones de simetría se tiene que $\theta_{(L/2)} = 0$:

$$\theta_{(L/2)} = \frac{1}{EI} . \left[-X_1 . \frac{L}{2} + q . \frac{L}{4} . \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{q}{6} . \left(\frac{L}{2} \right)^3 \right] = 0$$

3. Elástica de deformación: Viga doblemente empotrada

Para cumplir con la condición de nulidad de giros que impone la simetría es suficiente hacer:

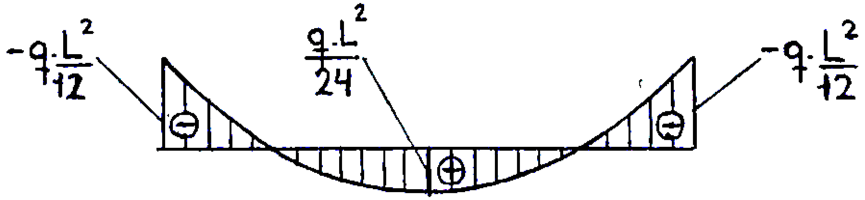
$$-X_1.\frac{L}{2}+q.\frac{L^3}{24}=0$$



Luego se pueden obtener los pares de empotramiento y el diagrama de momentos flexores que se muestra en la figura inferior:

$$X_1=M_A=M_B=q.\frac{L^2}{12}$$

La ecuación de la elástica se obtiene integrando $\frac{d\nu}{dx}=\theta_{(x)}$:

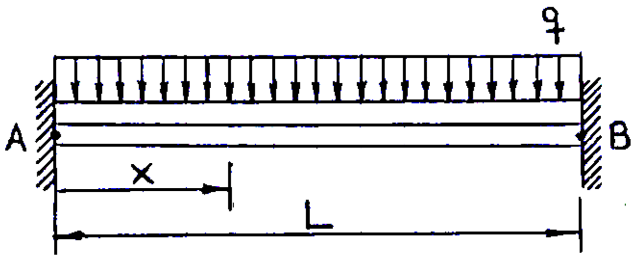


$$\nu_{(x)}=\frac{1}{EI}.\int\left(-X_1.x+q.\frac{L}{4}.x^2-q.\frac{x^3}{6}\right)dx$$

$$\nu_{(x)}=\frac{1}{EI}.\left(-\frac{X_1}{2}.x^2+\frac{q.L}{12}.x^3-\frac{q}{24}x^4\right)+C_2$$

3. Elástica de deformación: Viga doblemente empotrada

Aplicando la condición de borde $\nu_{(0)} = 0$, se obtiene $C_2 = 0$ y así la Ecuación de la Elástica queda expresada como:

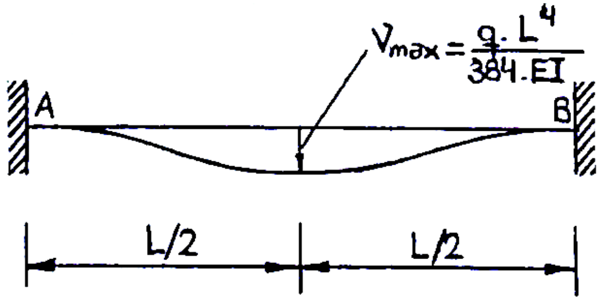


$$\nu_{(x)} = \frac{1}{EI} . \left(-q . \frac{L^2}{24} . x^2 + \frac{q . L}{12} . x^3 - \frac{q}{24} x^4 \right)$$

donde su valor máximo se presenta en x = L/2:

$$\nu_{máx} = \nu_{(L/2)} = -\frac{q . L^4}{384EI} \quad ; \quad \text{(Hacia abajo)}$$

En la figura inferior se muestra un gráfico de la deformada obtenida



3. Elástica de deformación debida a Acciones Térmicas

En muchos casos de interés hay que analizar la respuesta de las estructuras debida a las llamadas *Acciones Térmicas*.

Por ejemplo, si una estructura de hormigón se construye en noviembre, el hormigón habrá fraguado para unas condiciones de temperatura y humedad dadas. En pleno invierno, para temperaturas mucho más bajas, la diferencia de temperatura respecto de la época de la construcción provocará dilataciones y giros en los componentes de las estructuras y, dependiendo del tipo de estructura considerada también pueden originarse esfuerzos, como es el caso de las estructuras hiperestáticas.

Para calcular los desplazamientos generalizados y, si corresponde, los esfuerzos en una barra sometida a la acción térmica es necesario calcular la expresión de la dilatación y el giro de una sección y de sus tasas de cambio.

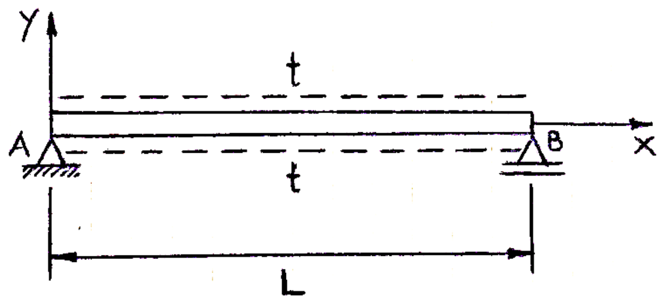
3. Cálculo de giros y dilataciones debidas a Acciones Térmicas

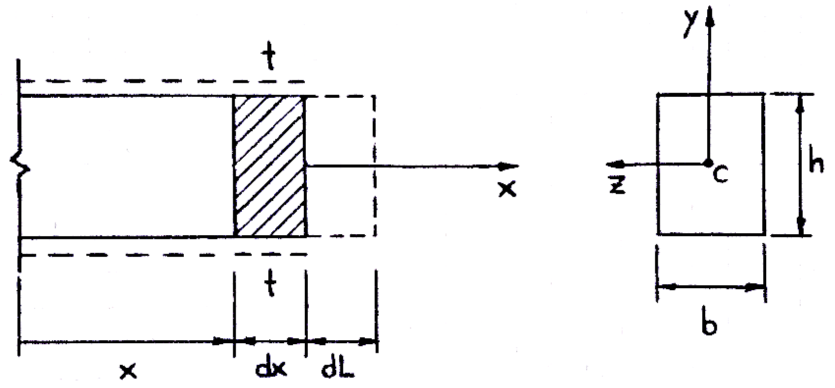
Para analizar la dilatación debido a temperatura puede Considerarse una viga simplemente apoyada sometida a temperatura uniforme. Un trozo de dicha viga de longitud dx se dilata según:

$$\frac{dL}{dx} = \alpha.t \quad ; \quad \text{(Deformación térmica)}$$

$$dL = \alpha.t.dx \quad ; \quad \text{(Alargamiento Térmico)}$$

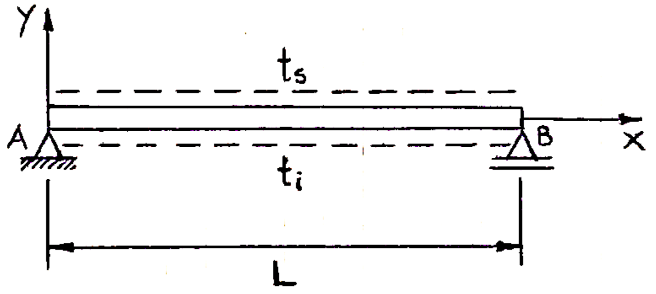
donde α es el *Coeficiente de Dilatación Térmica*, que es una propiedad del material considerado y para el caso de aceros y hormigones resulta $\alpha = 10^{-5}$.





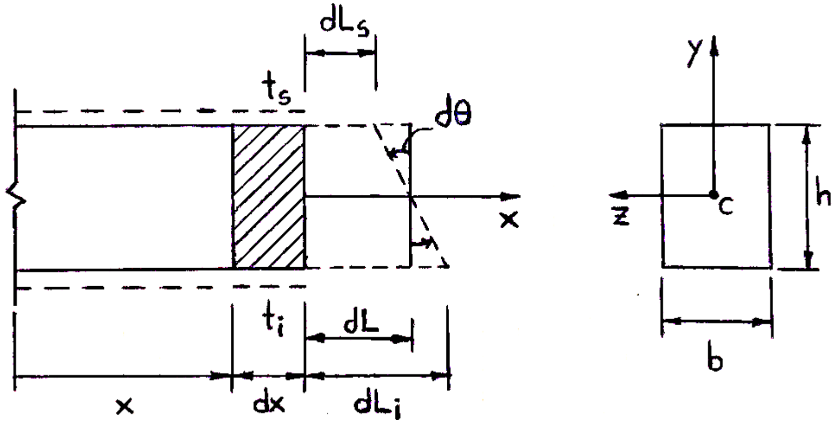
3. Cálculo de giros y dilataciones debidas a Acciones Térmicas

Cuando la temperatura varía linealmente en el espesor de la sección, la sección se alarga y gira. Para calcular dichos movimientos se sigue un análisis similar al anterior.



$$dL = \frac{dL_i + dL_s}{2} = \alpha.\left(\frac{t_i + t_s}{2}\right).dx \quad ; \quad \text{(Alargamiento Térmico)}$$

$$d\theta = \frac{dL_i - dL_s}{h} = \alpha.\left(\frac{t_i - t_s}{h}\right).dx$$

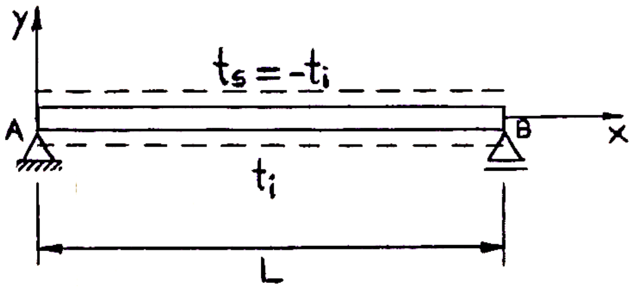


La Curvatura debida a la acción térmica resulta:

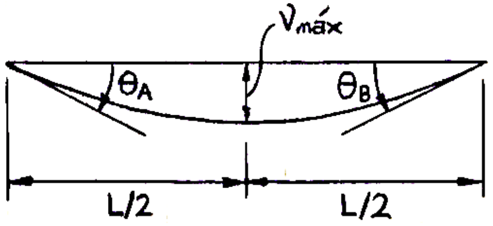
$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha.\left(\frac{t_i - t_s}{h}\right)$$

3. Elástica de deformación de una viga simplemente apoyada debido a acción térmica no uniforme

Se estudia una viga simplemente apoyada con un incremento de temperatura t_i en la parte inferior y una disminución en la temperatura $t_s = -t_i$ en la parte superior



La deformada tiene aproximadamente la siguiente forma:



3. Elástica de deformación de una viga simplemente apoyada debido a acción térmica no uniforme

Considerando los giros positivos tienen sentido anti horario, resulta:

$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha.\left(\frac{t_i + t_i}{h}\right) = \frac{2.\alpha.t_i}{h}$$

Integrando queda:

$$\theta_{(x)} = \int \frac{2.\alpha.t_i}{h} dx = \frac{2.\alpha.t_i}{h}.x + C_1$$

Aplicando la condición de borde $\theta_{(L/2)} = 0$ obtenemos:

$$\frac{2.\alpha.t_i}{h}.\left(\frac{L}{2}\right) + C_1 = 0\,;\ C_1 = -\frac{\alpha.t_i.L}{h}$$

$$\theta_{(x)} = \frac{2.\alpha.t_i}{h}.x - \frac{\alpha.t_i.L}{h} = \frac{\alpha.t_i}{h}.(2x - L)$$

$$\theta_A = \theta_{(0)} = -\frac{\alpha.t_i.L}{h} \quad ; \quad (\text{Horario});\ \theta_B = \theta_{(L)} = \frac{\alpha.t_i.L}{h} \quad ; \quad (\text{Antihorario})$$

3. Elástica de deformación de una viga simplemente apoyada debido a acción térmica no uniforme

La ecuación de la elástica se obtiene integrando $\frac{d\nu}{dx} = \theta_{(x)}$ .Los desplazamientos en el sentido del eje y (hacia arriba) se consideran positivos.

$$\frac{d\nu}{dx} = \theta = \frac{\alpha.t_i}{h}.(2x - L)$$

Integrando queda:

$$\nu_{(x)} = \int \frac{\alpha.t_i}{h}(2x - L)dx = \frac{\alpha.t_i}{h}(x^2 - L.x) + C_2$$

Aplicando la condición de borde $\nu_{(0)} = 0$ obtenemos que $C_2 = 0$ y la elástica se expresa como:

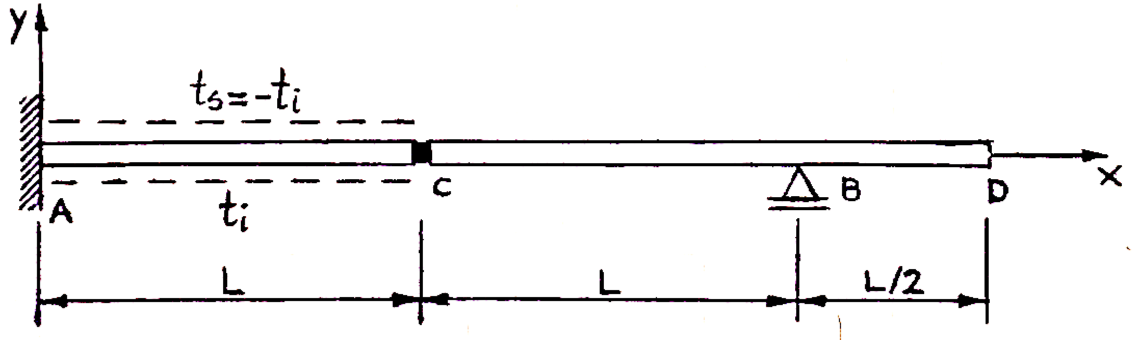
$$\nu_{(x)} = \frac{\alpha.t_i}{h}(x^2 - L.x)$$

La deflexión máxima se produce en $x = L/2$

$$\nu_{max} = \nu_{(L/2)} = \frac{\alpha.t_i}{h}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{L^2}{2}\right] = -\frac{\alpha.t_i.L^2}{4.h} \quad ; \quad (\text{Hacia abajo})$$

3. Elástica de deformación de una viga Gerber debido a acción térmica no uniforme

Se estudia una viga Gerber sometida a una acción térmica no uniforme, en el tramo AC de longitud L como se muestra en la figura:



Considerando los giros positivos en sentido antihorario, resulta para el tramo AC:

$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha.\left(\frac{t_i + t_i}{h}\right) = \frac{2.\alpha.t_i}{h}$$

Integrando se obtiene

$$\theta_{(x)} = \int \frac{2.\alpha.t_i}{h} dx = \frac{2.\alpha.t_i}{h}.x + C_1$$

Aplicando la condición de borde $\theta_{(0)} = 0$, surge $C_1 = 0$. Luego

$$\theta_{(x)} = \frac{2.\alpha.t_i}{h}.x$$

Expresión válida solo para el tramo AC ($0 \leq x \leq L$)

3. Elástica de deformación de una viga Gerber debido a acción térmica no uniforme

El giro a la izquierda del punto C (donde se encuentra la articulación) resulta para x = L:

$$\theta_C{}^{izq} = \theta_{(L)} = \frac{2.\alpha.t_i.L}{h} \quad ; \quad (\text{Antihorario})$$

Considerando ahora positivos los desplazamientos en el sentido del eje y (hacia arriba):

$$\frac{d\nu}{dx} = \theta = \frac{2.\alpha.t_i}{h}.x\,; \quad \nu_{(x)} = \frac{2.\alpha.t_i}{h}.\int x dx = \frac{\alpha.t_i}{h}.x^2 + C_2$$

Aplicando la condición de borde $\nu_{(0)} = 0,\ \text{surge}\ C_2 = 0$ y:

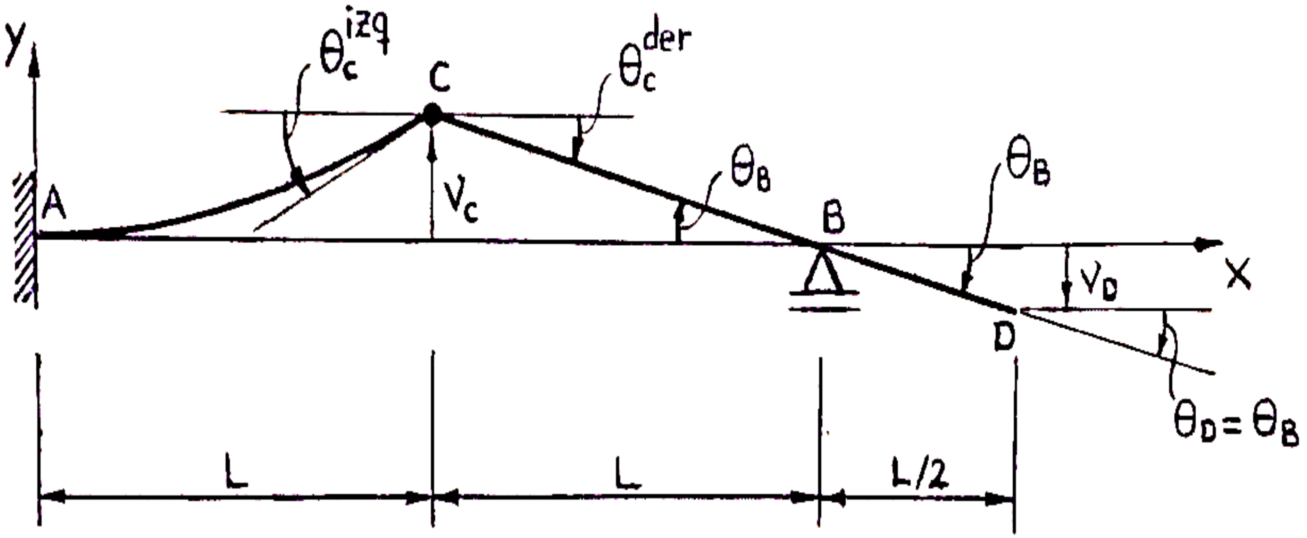
$$\nu_{(x)} = \frac{\alpha.t_i}{h}.x^2$$

también válida solo para el tramo AC ($0 \leq x \leq L$). El *desplazamiento del punto C* viene entonces dado por:

$$\nu_C = \nu_{(L)} = \frac{\alpha.t_i.L^2}{h} \quad ; \quad (\text{Hacia arriba})$$

3. Elástica de deformación de una viga Gerber debido a acción térmica no uniforme

No se pueden aplicar los conceptos propios de la elástica para para $x \geq L$, debido a que las acciones son nulas. Sin embargo se pueden obtener fácilmente valores de desplazamientos y giros en otros puntos de la viga aplicando *relaciones geométricas*, como se observa en la elástica de deformación graficada en la figura:



3. Elástica de deformación de una viga Gerber debido a acción térmica no uniforme

Por relación de triángulos, como surge del gráfico de la deformada, el desplazamiento del punto D se relaciona (en valor absoluto) con el del punto C según:

$$\frac{\nu_C}{L} = \frac{\nu_D}{(L/2)}$$

Al estar el punto D ubicado al otro lado del apoyo simple B) y al ser el tramo CD una línea recta (debido a que no está afectado por la acción térmica), los desplazamientos de los puntos C y D tienen sentidos opuestos. Por consiguiente:

$$\nu_D = -\frac{\nu_C}{2} = -\frac{\alpha.\, t_i.\, L^2}{2h} \quad ; \quad \text{(Hacia abajo)}$$

El giro en el punto D como:

$$\theta_D = \frac{\nu_D}{(L/2)} = -\frac{\alpha.\, t_i.\, L}{h} \quad ; \quad \text{(Horario)}$$

Por geometría:

$$\theta_D = \theta_B = \theta_C{}^{der} = -\frac{\alpha.\, t_i.\, L}{h} \quad ; \quad \text{(Horario)}$$

Por último, podemos calcular también el giro relativo de las secciones a la izquierda y a la derecha de C como:

$$\Delta\theta_C = \theta_C{}^{der} - \theta_C{}^{izq} = \left(-\frac{\alpha.\, t_i.\, L}{h}\right) - \left(\frac{2.\, \alpha.\, t_i.\, L}{h}\right) = -\frac{3.\, \alpha.\, t_i.\, L}{h}$$