ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 2: Teoremas Energéticos y Cálculo de desplazamientos – Parte 2

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de Cuyo

Abril de 2022

Temario

4. Teoremas Energéticos

5. Teorema de Trabajos Virtuales (TTV)

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Clapeyron

Enuncia que el trabajo de deformación de un sólido sometido a una carga puntual P, que produce un desplazamiento δ en el punto de aplicación de la misma resulta:

$$W = \frac{P.\delta}{2}$$

siempre que el sistema sea lineal y no haya variaciones térmicas o inerciales.

En el caso en que exista un número n de cargas P_i, y que cada una de dichas fuerzas causa un desplazamiento δ_i, el trabajo total viene dado por:

$$W = \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} P_i.\delta_i$$

5. Teoremas Energéticos: Teoremas de Castigliano

Primer Teorema de Castigliano

La derivada parcial de la energía de deformación U de una estructura con respecto a cualquier desplazamiento δ_i del punto de aplicación de una carga genérica P_i, da el valor de dicha carga:

$$\frac{\partial U_{(P_1;P_2;\ldots;P_i;\ldots;P_n)}}{\partial \delta_i} = P_i$$

donde la derivada parcial se debe a que U es función de todas las cargas del sistema.

Segundo Teorema de Castigliano

La derivada parcial de la energía de deformación U de una estructura con respecto a cualquier carga P_i es igual al valor del desplazamiento δ_i correspondiente a dicha carga en su punto de aplicación:

$$\frac{\partial U_{(P_1;P_2;\ldots;P_i;\ldots;P_n)}}{\partial P_i} = \delta_i$$

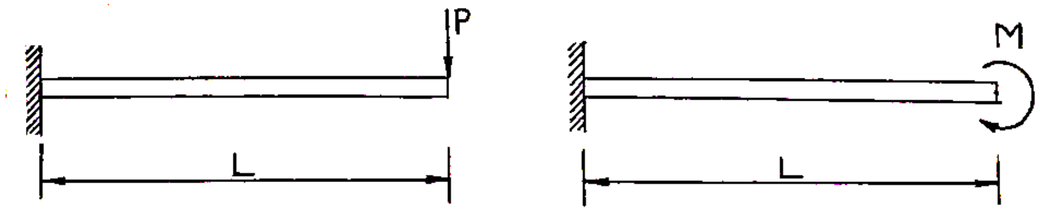
A partir de este teorema se puede deducir el Método de la Fuerza Unitaria para el cálculo de desplazamientos.

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Betti

Dado un sólido sometido a la acción de dos sistemas de carga P y Q. Si se denomina δ_{PQ} al desplazamiento en la dirección de P producido por Q; y δ_{QP} al desplazamiento en la dirección de Q producido por P, el trabajo recíproco es igual:

$$W_{\delta_{PQ}} = W_{\delta_{QP}}$$

Por ejemplo para una viga en voladizo, sometida a dos estados de carga diferentes: Una carga P y un par M



$$\delta_{MP} = \theta_B^P = \frac{P.L^2}{2EI} \quad ; \quad \delta_{PM} = \nu_B^M = \frac{M.L^2}{2EI}$$

$$W_{\delta_{MP}} = M.\left(\frac{P.L^2}{2EI}\right) \quad ; \quad W_{\delta_{PM}} = P.\left(\frac{M.L^2}{2EI}\right)$$

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Maxwell

El Teorema de Maxwell es un caso particular del Teorema de Betti en donde las cargas P y Q son unitarias:

$$\delta_{PQ} = \delta_{QP}$$

Para el caso de la Viga en voladizo, utilizada como ejemplo para ilustrar el Teorema de Betti y haciendo M=P=1 resulta:

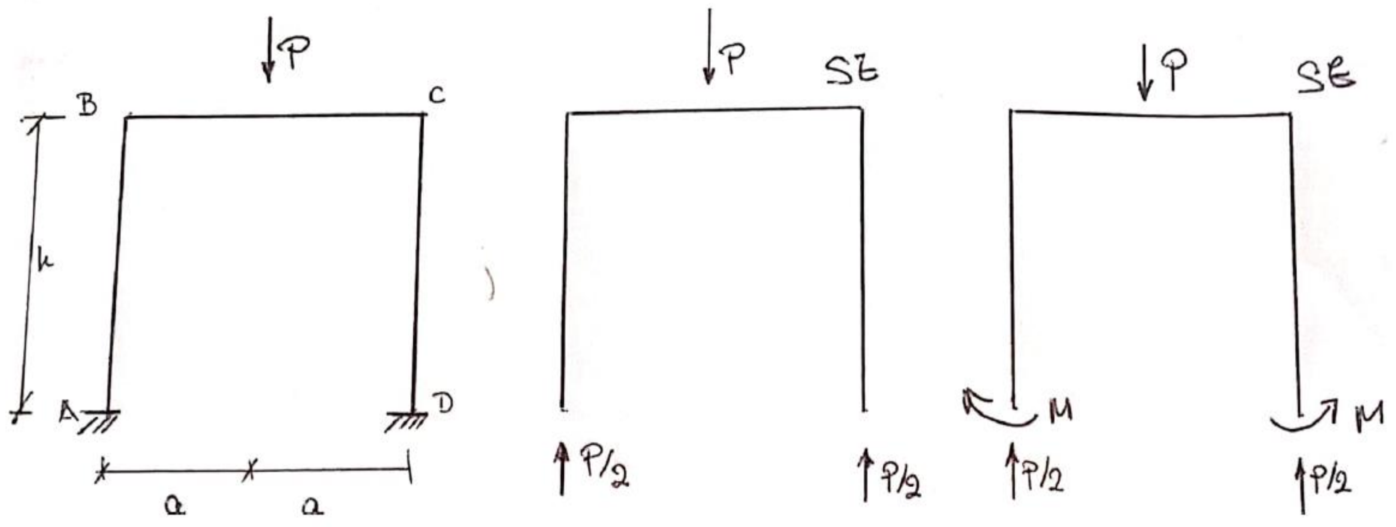
$$\delta_{MP} = \theta_B^P = \frac{L^2}{2EI} = \nu_B^M = \delta_{PM}$$

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Para definir la idea o noción de Trabajos Virtuales deben definirse algunos conceptos previos, muy importantes y que juegan un rol muy importante en la práctica:

Sistema Equilibrado

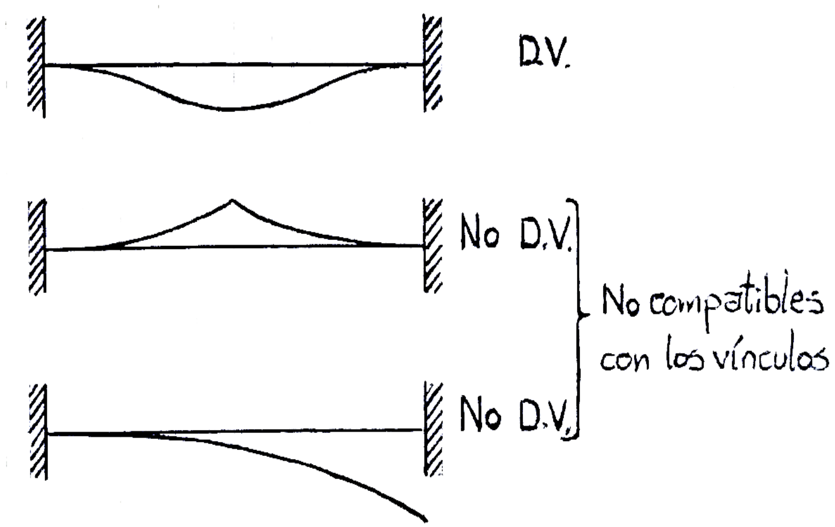
Un *Sistema Equilibrado* SE, simplemente es un *sistema que está en equilibrio*, es la única exigencia que tiene.



5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Deformación Virtual DV

Se denomina *Deformación Virtual* DV a un conjunto de desplazamientos (de un sólido) *pequeños y compatibles con los vínculos* (externos e internos).



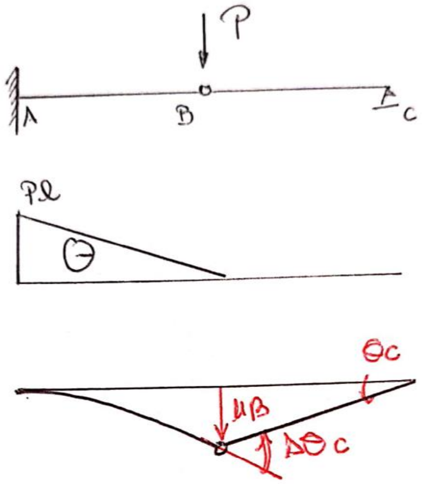
La Deformación Virtual es arbitraria, puede ser una deformación real de la estructura u otra de interés. Luego es independiente de la carga.

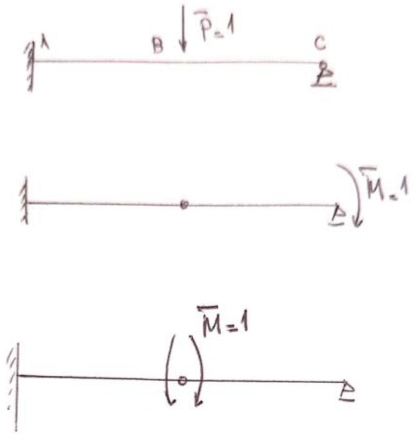
5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Términos Complementarios de Trabajo

Esta noción es un concepto muy útil en la práctica para. No se emplea solamente en el caso del TTV.

Por ejemplo, el término complementario de trabajo de una fuerza F es un desplazamiento propiamente dicho, en la dirección de la Fuerza. Análogamente el término complementario de trabajo de un par M es una rotación, aplicados ambos en el mismo punto.





La carga concentrada P, el par M y el Momento flector M son los términos complementarios de trabajo de u_B, θ_c y $\Delta\theta_B$, respectivamente.

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Noción de Trabajos Virtuales, Trabajo Virtual Externo y Trabajo Virtual Interno

Dado un sólido de interés que está en equilibrio, luego cumple con las condiciones de Sistema Equilibrado SE, al cual se le superpone una Deformación Virtual DV.

Se denomina Trabajo Virtual δW al trabajo que realizan las acciones y solicitaciones del Sistema Equilibrado con los desplazamientos y deformaciones de la Deformación Virtual.

En particular se habla de Trabajo Virtual de las Fuerzas exteriores δW_E al que realizan las cargas del Sistema Equilibrado con el movimiento de sus puntos de aplicación definidos en la Deformación Virtual.

Análogamente se introduce la noción de Trabajo Virtual de las fuerzas interiores δW_I al que realizan las solicitaciones del Sistema Equilibrado con las deformaciones complementarias de trabajo propias de la deformación virtual.

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Enunciado del TTV para Sólidos Rígidos

Para cualquier sólido rígido sometido a la acción de un *sistema de fuerzas en equilibrio* (SE), el Trabajo Virtual de las Fuerzas Externas es nulo:

$$\delta W_E = 0$$

Enunciado del TTV para Sólidos Deformables

Dado un *Sistema Equilibrado* (SE) al cual se le superpone una *Deformación Virtual* (DV), se debe cumplir que el *Trabajo Virtual de la Fuerzas Internas* δW_I debe ser igual al *Trabajo Virtual de las Fuerzas Externas* δW_E**:**

$$\delta W_E = \delta W_I$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_i}.\,\delta u_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{M_j}.\,\delta\theta_j = \int \overline{M} d\theta + \int \overline{N} dL + \int \overline{Q} dC$$

Donde $d\theta$, dL y dC son las deformaciones por flexión, esfuerzo normal y corte del sólido. La deducción del TTV para sólidos deformables, excepto por las simplificaciones que se introdujeron en la demostración, es general y no depende del material del sólido.

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Enunciado del TTV para Sólidos Rígidos

Para cualquier sólido rígido sometido a la acción de un *sistema de fuerzas en equilibrio* (SE), el Trabajo Virtual de las Fuerzas Externas es nulo:

$$\delta W_E = 0$$

Enunciado del TTV para Sólidos Deformables

Dado un *Sistema Equilibrado* (SE) al cual se le superpone una *Deformación Virtual* (DV), se debe cumplir que el *Trabajo Virtual de la Fuerzas Internas* δW_I debe ser igual al *Trabajo Virtual de las Fuerzas Externas* δW_E**:**

$$\delta W_E = \delta W_I$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_i}.\,\delta u_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{M_j}.\,\delta\theta_j = \int \overline{M} d\theta + \int \overline{N} dL + \int \overline{Q} dC$$

Donde $d\theta$, dL y dC son las deformaciones por flexión, esfuerzo normal y corte del sólido. La deducción del TTV para sólidos deformables, excepto por las simplificaciones que se introdujeron en la demostración, es general y no depende del material del sólido.

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Aplicación del Teorema de Trabajos Virtuales para Teoría de Estructuras.

- Los elementos diferencias dθ, dL y dC son los correspondientes a la *Teoría de Estructuras*, que se definen de manera similar a lo visto en Resistencia de Materiales:

$$d\theta = \frac{Mdx}{EI} \quad ; \quad dL = \frac{Ndx}{EA} \quad ; \quad dC = \chi \frac{Qdx}{GA}$$

- La Deformación Virtual DV coincide con la deformación real de la estructura

Luego la expresión general $\sum_{i=1}^{n} \overline{P_i}.\delta u_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{M_j}.\delta\theta_j = \int \overline{M} d\theta + \int \overline{N} dL + \int \overline{Q} dC$ se reescribe como:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_i}.\delta u_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{M_j}.\delta\theta_j = \int \overline{M} \left(\frac{Mdx}{EI}\right) + \int \overline{N} \left(\frac{Ndx}{EA}\right) + \chi. \int \overline{Q} \left(\frac{Qdx}{GA}\right)$$

Los términos que están con una línea superior corresponden al SE y los términos que no tienen la línea superior corresponden a la deformación virtual DV, que para el caso de interés coincide con la deformación real.

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Aplicación del Teorema de Trabajos Virtuales para Teoría de Estructuras.

Luego, es simple calcular desplazamientos de interés mediante el empleo del Teorema de los Trabajos Virtuales. Para ello se debe elegir el Sistema Equilibrado, que debe elegirse teniendo en cuenta la noción de término complementario de trabajo.

Si uno desea calcular un movimiento dado, sea un desplazamiento δu_i o una rotación $\delta\theta_j$, entonces se debe elegir una carga $\overline{P_i}$ o un par $\overline{M_j}$, respectivamente, que junto con los desplazamientos que se pretende calcular definen el el trabajo externo δW_E.

$$\overline{P_i}.\,\delta u_i = \int \overline{M}\left(\frac{Mdx}{EI}\right) + \int \overline{N}\left(\frac{Ndx}{EA}\right) + \chi.\int \overline{Q}\left(\frac{Qdx}{GA}\right)$$

$$\overline{M_j}.\,\delta\theta_j = \int \overline{M}\left(\frac{Mdx}{EI}\right) + \int \overline{N}\left(\frac{Ndx}{EA}\right) + \chi.\int \overline{Q}\left(\frac{Qdx}{GA}\right)$$

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Aplicación del Teorema de Trabajos Virtuales para Teoría de Estructuras.

Las cargas $\overline{\mathrm{P}} = 1$ o pares $\overline{\mathrm{M}} = 1$ se hacen unitarias así las integrales del segundo miembro directamente dan el valor del desplazamiento buscado.

Además, para el caso de estructuras sometidas preponderantemente a flexión, el trabajo virtual del esfuerzo de corte y del esfuerzo normal pueden despreciarse. Luego los cálculos anteriores se reducen a:

$$\overline{1}\,.\,\delta u_i = \int \overline{M}\left(\frac{Mdx}{EI}\right)$$

$$\overline{1}\,.\,\delta\theta_j = \int \overline{M}\left(\frac{Mdx}{EI}\right)$$

La integral $\int \overline{M}\left(\frac{Mdx}{EI}\right)$ del producto de las funciones $\overline{M}$ y M se calcula fácilmente mediante el uso de Tablas.

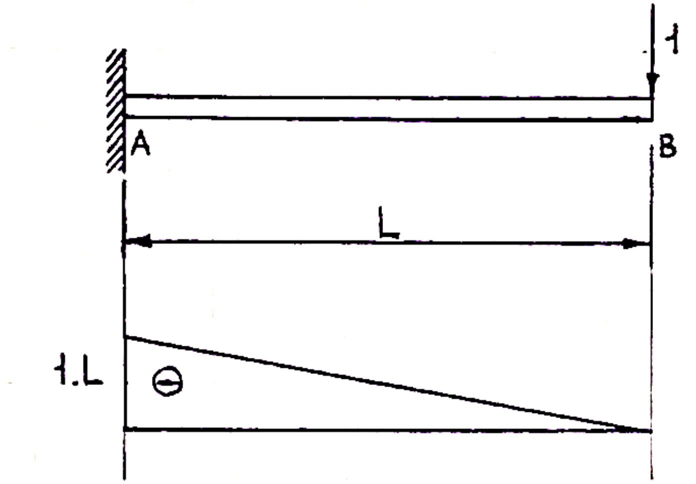
5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Tablas para el cálculo de las Integrales $\int \bar{M}\left(\frac{\mathrm{M}dx}{\mathrm{EI}}\right)$

	$\bar M$	$\bar M_B$	$\bar M_A$ $\bar M_B$	par. 2º grau $\bar M_m$	par. 2º grau $\bar M_B$ tang. horiz.	par. 2º grau $\bar M_B$ tang. horiz.	$\bar M$ αl βl
M	$l' M\bar M$	$\frac{1}{2} l' M\bar M_B$	$\frac{1}{2} l' M(\bar M_A + \bar M_B)$	$\frac{2}{3} l' M\bar M_m$	$\frac{2}{3} l' M\bar M_B$	$\frac{1}{3} l' M\bar M_B$	$\frac{1}{2} l' M\bar M$
M_B	$\frac{1}{2} l' M_B\bar M$	$\frac{1}{3} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{6} l' M_B(\bar M_A+2\bar M_B)$	$\frac{1}{3} l' M_B\bar M_m$	$\frac{5}{12} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{4} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{6} l'(1+\alpha) M_B\bar M$
M_A	$\frac{1}{2} l' M_A\bar M$	$\frac{1}{6} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{6} l' M_A(2\bar M_A+\bar M_B)$	$\frac{1}{3} l' M_A\bar M_m$	$\frac{1}{4} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{6} l'(1+\beta) M_A\bar M$
M_A M_B	$\frac{1}{2} l'(M_A+M_B)\bar M$	$\frac{1}{6} l'(M_A+2M_B)\bar M_B$	$\frac{1}{6} l'[\bar M_A(2M_A+M_B)+\bar M_B(2M_B+M_A)]$	$\frac{1}{3} l'(M_A+M_B)\bar M_m$	$\frac{1}{12} l'(3M_A+5M_B)\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(M_A+3M_B)\bar M_B$	$\frac{1}{6} l'\bar M[M_A(1+\beta)+M_B(1+\alpha)]$
par. 2º grau M_m	$\frac{2}{3} l' M_m\bar M$	$\frac{1}{3} l' M_m\bar M_B$	$\frac{1}{3} l' M_m(\bar M_A+\bar M_B)$	$\frac{8}{15} l' M_m\bar M_m$	$\frac{7}{15} l' M_m\bar M_B$	$\frac{1}{5} l' M_m\bar M_B$	$\frac{1}{3} l'(1+\alpha\beta)M_m\bar M$
par. 2º grau M_B tang. horiz.	$\frac{2}{3} l' M_B\bar M$	$\frac{5}{12} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_B(3\bar M_A+5\bar M_B)$	$\frac{7}{15} l' M_B\bar M_m$	$\frac{8}{15} l' M_B\bar M_B$	$\frac{3}{10} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{12} l(5-\beta-\beta^2)\times M_B\bar M$
M_A par. 2º grau tang. horiz.	$\frac{2}{3} l' M_A\bar M$	$\frac{1}{4} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_A(5\bar M_A+3\bar M_B)$	$\frac{7}{15} l' M_A\bar M_m$	$\frac{11}{30} l' M_A\bar M_B$	$\frac{2}{15} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(5-\alpha-\alpha^2)\times M_A\bar M$
par. 2º grau M_B tang. horiz.	$\frac{1}{3} l' M_B\bar M$	$\frac{1}{4} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_B(\bar M_A+3\bar M_B)$	$\frac{1}{5} l' M_B\bar M_m$	$\frac{3}{10} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{5} l' M_B\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(1+\alpha+\alpha^2)\times M_B\bar M$
M_A par. 2º grau tang. horiz.	$\frac{1}{3} l' M_A\bar M$	$\frac{1}{12} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l' M_A(3\bar M_A+\bar M_B)$	$\frac{1}{5} l' M_A\bar M_m$	$\frac{2}{15} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{30} l' M_A\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(1+\beta+\beta^2)\times M_A\bar M$
M αl βl	$\frac{1}{2} l' M\bar M$	$\frac{1}{6} l'(1+\alpha)\bar M_B M$	$\frac{1}{6} l' M[(1+\beta)\bar M_A+(1+\alpha)\bar M_B]$	$\frac{1}{3} l'(1+\alpha\beta)M\bar M_m$	$\frac{1}{12} l'(5-\beta-\beta^2)\times M\bar M_B$	$\frac{1}{12} l'(1+\alpha+\alpha^2)\times M\bar M_B$	$\frac{1}{3} l' M\bar M$

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Ejemplo: Cálculo del desplazamiento del extremo libre de una Viga empotrada con una carga P en su extremo libre



El Sistema equilibrado, de acuerdo a los conceptos discutidos es igual a una carga concentrada unitaria aplicada en el punto B

¿Porqué? Porque dicha carga unitaria es el complementario de trabajo del desplazamiento buscado

Recordemos que el SE es arbitrario!

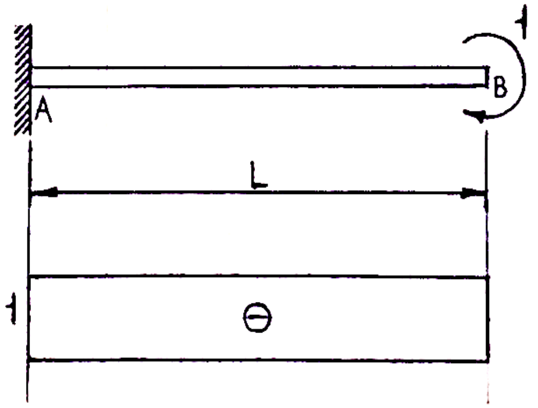
Luego el cálculo consiste en resolver:

$$1.\nu_B = \int \frac{\bar{M}\,M}{EI}\,dx \qquad \nu_B = \frac{1}{EI}\int \bar{M}.Mdx$$

Mediante el uso de la tabla resulta: $\nu_B = \frac{1}{EI}.\left[\frac{1}{3}.(-P.L).(-1.L).L\right] = \frac{P.L^3}{3EI}$

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Ejemplo: Cálculo de la rotación del extremo libre de una Viga empotrada con una carga P en su extremo libre



El Sistema equilibrado, de acuerdo a los conceptos discutidos es igual a un par concentrado unitario aplicada en el punto B

¿Porqué? Porque dicha carga unitaria es el complementario de trabajo del desplazamiento buscado

Recordemos que el SE es arbitrario!

Luego el cálculo consiste en resolver:

$$1.\ \theta_B = \int \frac{\bar{M}\,M}{EI}\,dx \qquad \nu_B = \frac{1}{EI}\int \bar{M}.Mdx$$

Mediante el uso de la tabla resulta: $\theta_B = \frac{1}{EI}.\left[\frac{1}{2}.(-P.L).(-1).L\right] = \frac{P.L^2}{2EI}$

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Aplicación del Teorema de Trabajos Virtuales para el caso de Acciones Térmicas.

En este caso la Deformación Virtual DV se debe a la acción térmica. Luego los diferenciales de la dilataciones dL y rotaciones $\mathrm{d\theta}$ resultan:

$$\mathrm{dL} = \alpha . \mathrm{t} . \mathrm{dx} \quad ; \quad \text{(Alargamiento Térmica)}$$

$$\mathrm{d\theta} = \frac{\mathrm{dL_i} - \mathrm{dL_s}}{\mathrm{h}} = \alpha . \left(\frac{\mathrm{t_i} - \mathrm{t_s}}{\mathrm{h}} \right) . \mathrm{dx} \text{ (Rotación Termica)}$$

Las dilataciones y rotaciones definidas de esta manera, se deben emplear en vez de las rotaciones y dilataciones *mecánicas* $\mathrm{d\theta} = \frac{\mathrm{Mdx}}{\mathrm{EI}} \quad ; \quad \mathrm{dL} = \frac{\mathrm{Ndx}}{\mathrm{EA}}$. Recordemos que las acciones térmicas consideradas no producen deformaciones por corte.

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Aplicación del Teorema de Trabajos Virtuales para el caso de Acciones Térmicas.

Luego para el caso de Teoría de Estructuras, en presencia de acciones térmicas las integrales de cálculo del TTV resultan:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_i}.\delta u_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{M_j}.\delta\theta_j = \int \overline{M}\,\alpha.\left(\frac{t_i - t_s}{h}\right).dx + \int \overline{N}\,\alpha.t.dx$$

Teniendo en cuenta que los términos relacionados con la temperatura son constantes y salen fuera de la integral queda:

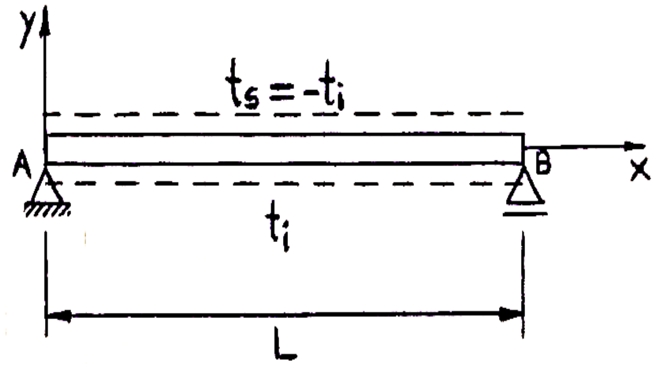
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_i}.\delta u_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{M_j}.\delta\theta_j = \alpha.\left(\frac{t_i - t_s}{h}\right)\int \overline{M}\,.dx + \alpha.t\int \overline{N}\,.dx$$

Luego, en la práctica el cálculo es muy sencillo. Se reduce a calcular los términos asociados a la rotación y a la dilatación, producidos respectivamente por la acción térmica y calcular el área de los diagramas de Momento $\overline{M}$ y Esfuerzo Normal $\overline{N}$ del Sistema Equilibrado.

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Cálculo de desplazamientos mediante el TTV en una viga simplemente apoyada bajo acciones térmicas

Para la viga simplemente apoyada con un incremento de temperatura t_i en la parte inferior y una disminución en la temperatura $t_s = -t_i$ en la parte superior (ambas iguales en módulo):



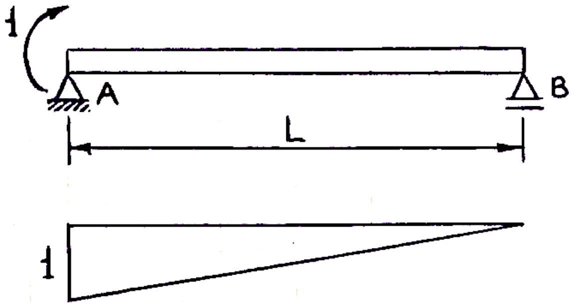
Partiendo de la expresión general deducida en el apartado anterior, observando que la temperatura uniforme resulta nula $t = 0$ y el salto térmico $\Delta t = t_i - t_s = 2t$ resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_i}.\,\delta u_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{M_j}.\,\delta\theta_j = \alpha.\frac{2t}{h}\int \overline{M} \;\; dx$$

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Cálculo de desplazamientos mediante el TTV en una viga simplemente apoyada bajo acciones térmicas

Para calcular el giro θ_A el Sistema Equilibrado consiste en imponer un para unitario en el punto A:



La expresión de cálculo se reduce A

$$\theta_A = \left(\frac{2.\alpha.t_i}{h}\right)\int \overline{M}dx$$

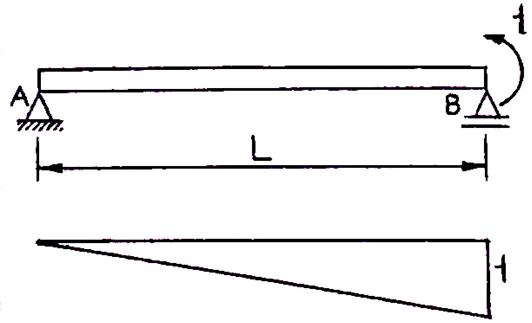
donde $\int \overline{M}dx$ representa el área del diagrama de Momento Flector del Sistema Equilibrado, en correspondencia con la zona de la viga afectada por el cambio de temperatura. En este caso toda la longitud de la viga:

$$\theta_A = \frac{\alpha.t_i.L}{h}$$

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Cálculo de desplazamientos mediante el TTV en una viga simplemente apoyada bajo acciones térmicas

Para calcular el giro θ_B el Sistema Equilibrado consiste en imponer un para unitario en el punto B:



La expresión de cálculo se reduce a

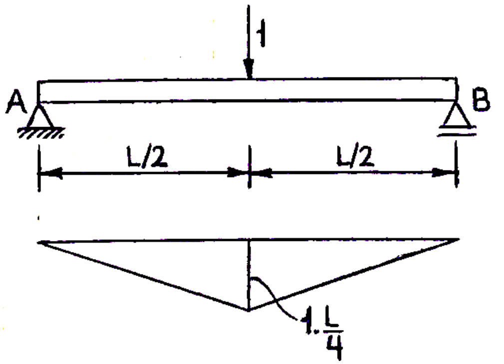
$$\theta_B = \left(\frac{2.\alpha.t_i}{h}\right)\int \overline{M}dx$$

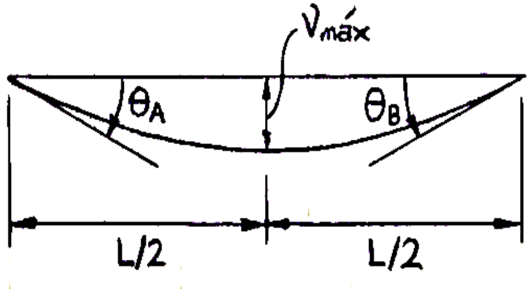
$$\theta_B = \frac{\alpha.t_i.L}{h}$$

5. Teoremas Energéticos: Teorema de Trabajos Virtuales TTV

Cálculo de desplazamientos mediante el TTV en una viga simplemente apoyada bajo acciones térmicas

La deflexión máxima en el centro del vano, se calcula imponiendo un SE con una carga $\overline{\mathrm{P}} = 1$ en el centro del vano





Luego el cálculo se expresa como:

$$1.\nu_{\text{máx}} = \int \overline{\mathrm{M}}.\left(\frac{2.\alpha.t_i}{h}\right)dx = \left(\frac{2.\alpha.t_i}{h}\right)\int \overline{\mathrm{M}}dx = \frac{2.\alpha.t_i}{h}\left[\left(\frac{1}{2}.1.\frac{L}{4}.\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}.1.\frac{L}{4}.\frac{L}{2}\right)\right]$$

$$\nu_{\text{máx}} = \frac{\alpha.t_i.L^2}{4h}$$