ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 3: Método de las Fuerzas

Parte 2

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
Abril de 2022

Temario

1. Justificación del Método de las Fuerzas

2. Cálculo de desplazamientos en Estructuras Hiperestáticas utilizando el Teorema de Trabajos Virtuales (TTV)

Justificación del Método de las Fuerzas

Las estructuras que tratamos en la asignatura se reducen a problemas de materiales elásticos lineales y, además y, además la geometría es lineal (pequeños desplazamientos y rotaciones y pequeñas deformaciones. Luego la respuesta de los problemas es elástico y lineal, los sistemas son conservativos y se puede plantear la existencia de la función energía de deformación U.

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_{(\mathrm{P};\mathrm{X}_1;\mathrm{X}_2;\ldots;\mathrm{X}_n)}$$

De acuerdo al Segundo Teorema de Castigliano el desplazamiento δ_i se puede obtener mediante:

$$\delta_i = \frac{\partial \mathrm{U}_{(\mathrm{P};\mathrm{X}_1;\mathrm{X}_2;\ldots;\mathrm{X}_n)}}{\partial \mathrm{X}_i}$$

Justificación del Método de las Fuerzas (continuación)

Por compatibilidad resulta $\delta_i = 0$

$$\delta_i = \frac{\partial U_{(P;X_1;X_2;\ldots;X_n)}}{\partial X_i} = 0$$

Luego del segundo Teorema de Castigliano y de la condición de compatibilidad, surge que la energía de deformación se hace estacionaria en este caso, que es un planteo equivalente al equilibrio. Por consideraciones puramente geométricas, la condición de mínimo de la función Energía de Deformación conduce al equilibrio estable.

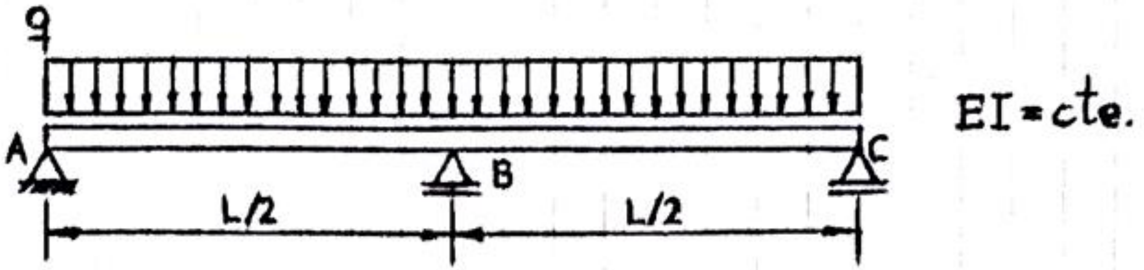
De esta manera se justifica el Método de las fuerzas, que satisface equilibrio y compatibilidad a la vez.

Cálculo de Desplazamientos en Sistemas Hiperestáticos mediante el TTV

Para calcular desplazamientos mediante el TTV se necesita una Deformación Virtual DV, que en este caso es la real y que, en el caso de una estructura hiperestática, es la solución de dicho problema. Hasta ahora la única técnica que conocemos el Método de las Fuerzas. Luego, en el caso del TTV, para la DV, se debe emplear el diagrama de momentos final de la estructura hiperestática.

¿Qué sucede en el caso del Sistema Equilibrado, SE? A primera vista debemos aplicar sobre la estructura hiperestática una carga unitaria, en la dirección del desplazamiento que estamos calculando. Luego se debería calcular otro sistema hiperestático, en este caso para la carga unitaria.

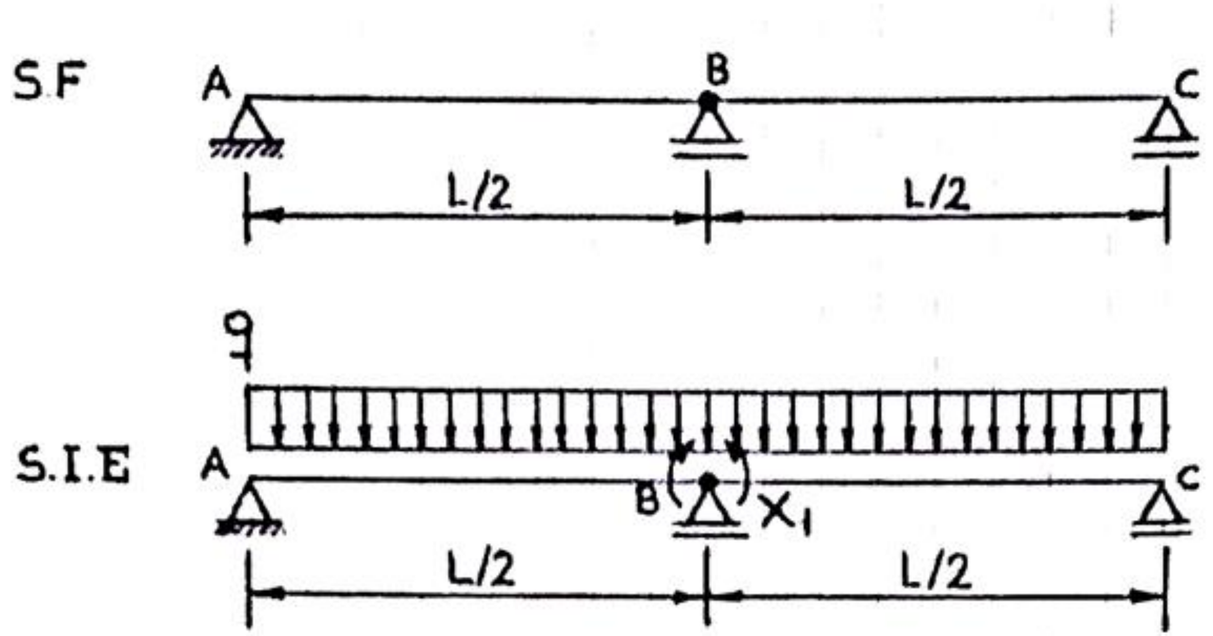
Puede verse que no es necesario resolver el hiperestático para la carga unitaria y basta con conocer el diagrama de momentos de dicha carga en el sistema fundamental. Para ello se parte de un sistema muy sencillo.



Unidad III AEI: Método de las Fuerzas

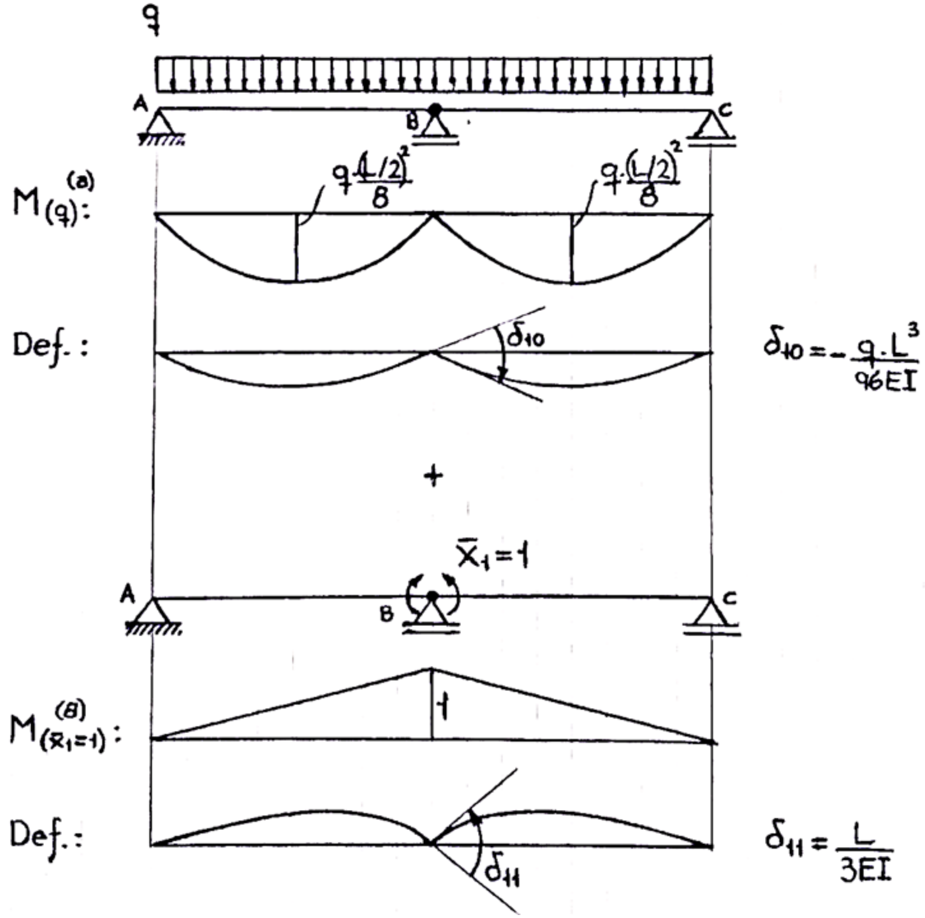
Cálculo de Desplazamientos en Sistemas Hiperestáticos   mediante el TTV

El GH del sistema es 1 y se emplea una viga Gerber como sistema fundamental, para lo cual se impone una articulación en el apoyo B. Luego los SF y SIE resultan, respectivamente:



Cálculo de Desplazamientos en Sistemas Hiperestáticos mediante el TTV

El SH se resuelve siguiendo el procedimiento de los ejemplos que ya hemos visto. Se muestran los diagramas de Momento debido a la incógnita X1=1 y la carga repartida q. También las elásticas respectivas, la flexibilidad y el término independiente. A la derecha se muestran la ecuación de compatibilidad y la solución del problema.

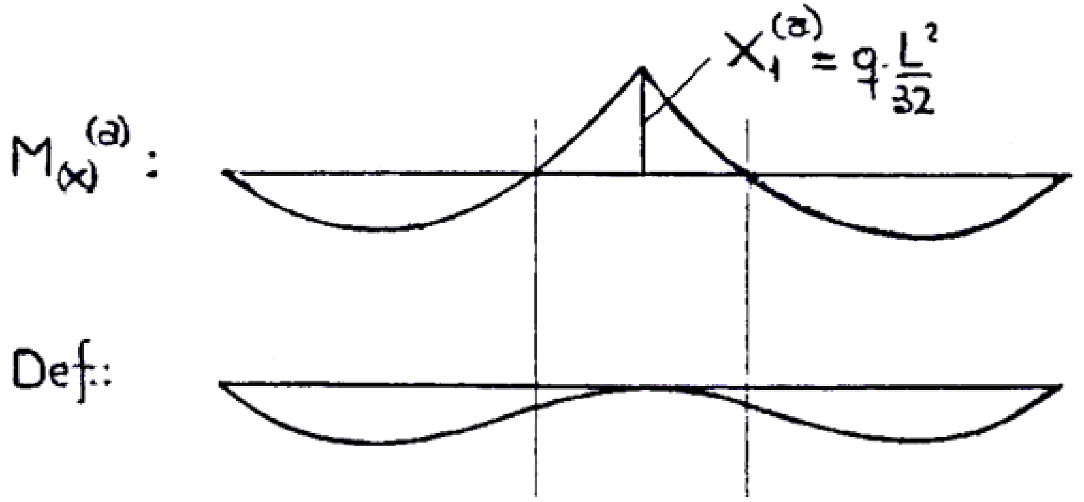


$$\delta_{10} + \delta_{11}.X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{q.L^2}{32}$$

Cálculo de Desplazamientos en Sistemas Hiperestáticos mediante el TTV

El diagrama de momentos y la elástica finales se obtienen por superposición y se muestran en la figura.



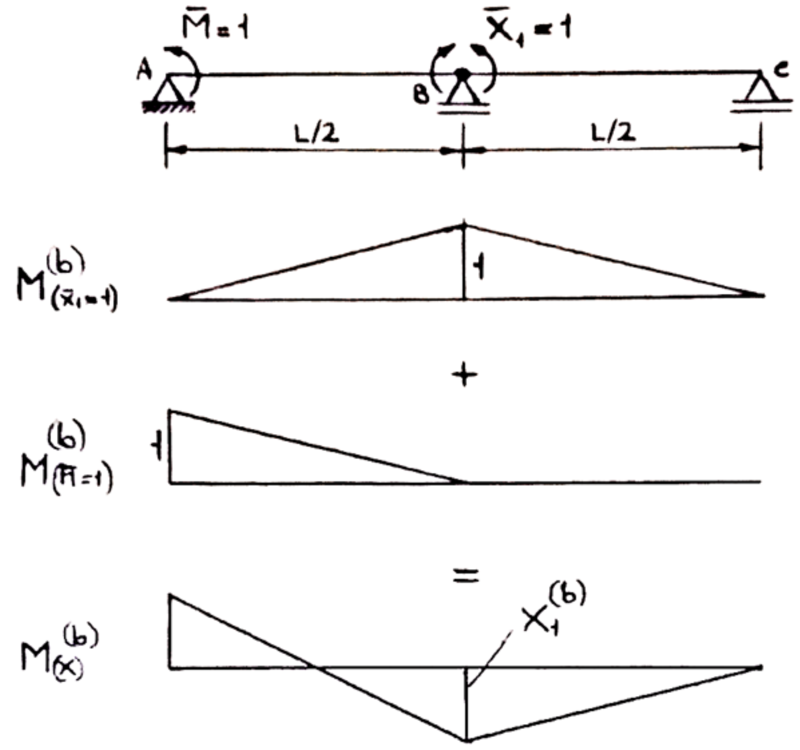
La ecuación de superposición es la ya discutida, en la cual se basa el Método de las Fuerzas:

$$M_{(x)}{}^{(a)} = M_{(q)}{}^{(a)} + M_{(\overline{X}_1=1)}{}^{(a)} . X_1{}^{(a)}$$

Observemos que hemos indicado con un superíndice (a) a la solución de la DV

Cálculo de Desplazamientos en Sistemas Hiperestáticos mediante el TTV

Ahora se plantea calcular el giro θ_A del apoyo A. Para ello se debe calcular el SE aplicando un momento unitario M=1 en el punto A. La solución del sistema hiperestático resulta en este caso:



La ecuación de superposición es la ya discutida, en la cual se basa el Método de las Fuerzas:

$$M_{(x)}{}^{(b)} = M_{(\bar{M}=1)}{}^{(b)} + M_{(\bar{X}_1=1)}{}^{(b)} . X_1{}^{(b)}$$

Observemos que hemos indicado con un superíndice (b) a la solución del SE

Cálculo de Desplazamientos en Sistemas Hiperestáticos mediante el TTV

Para calcular el giro θ_A deben integrarse las soluciones de la DV y del SE, indicadas con los superíndices (a) y (b), respectivamente.

$$\bar{M}.\theta_A = 1.\theta_A = \int \left[{M_{(x)}}^{(b)}\right].\left[{M_{(x)}}^{(a)}\right]dx$$

$$\theta_A = \int \left[{M_{(\bar{M}=1)}}^{(b)} + {M_{(\bar{X}_1=1)}}^{(b)}.{X_1}^{(b)}\right].\left[{M_{(q)}}^{(a)} + {M_{(\bar{X}_1=1)}}^{(a)}.{X_1}^{(a)}\right]dx$$

Aplicando la propiedad distributiva resulta:

$$\theta_A = \int \left[{M_{(\bar{M}=1)}}^{(b)}.\left({M_{(q)}}^{(a)} + {M_{(\bar{X}_1=1)}}^{(a)}.{X_1}^{(a)}\right)\right] dx + \int \left[{M_{(\bar{X}_1=1)}}^{(b)}.\left({M_{(q)}}^{(a)} + {M_{(\bar{X}_1=1)}}^{(a)}.{X_1}^{(a)}\right).{X_1}^{(b)}\right]dx$$

La segunda integral calcula el giro relativo en el punto B para la viga continua. Dicho giro relativo es nulo, luego dicha integral es nula. Conceptualmente sucede así cualquiera sea el grado de hiperestaticidad de la estructura. Luego para calcular los desplazamientos, es suficiente calcular el diagrama de momentos del SE en el Sistema Fundamental SF.

$$\int \left[{M_{(\bar{X}_1=1)}}^{(b)}.\left({M_{(q)}}^{(a)} + {M_{(\bar{X}_1=1)}}^{(a)}.{X_1}^{(a)}\right).{X_1}^{(b)}\right]dx = 0$$