ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 3

Resolución de problemas utilizando el Método de las Fuerzas – Problema 1

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

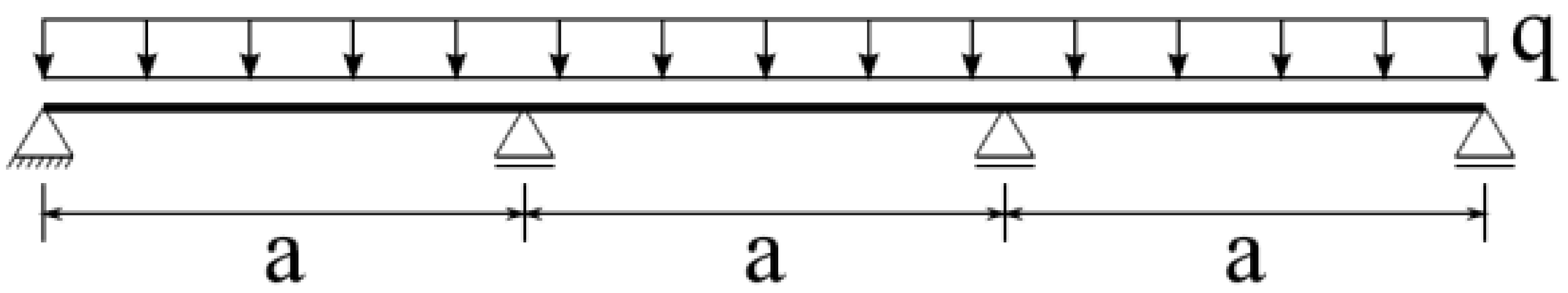
Abril de 2022

GUÍA DE CÁLCULO PARA RESOLVER UNA ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA APLICANDO EL MÉTODO DE LAS FUERZAS

- Determinar el *Grado de Hiperestaticidad* GH de la estructura.
- Plantear un *Sistema Fundamental* (SF) y, en base al mismo, expresar las Incógnitas Hiperestáticas $\mathrm{X_i}$ que aplicadas junto a las acciones y cargas exteriores en dicho SF conforman el *Sistema Isostático Equivalente* (SIE)**.**
- Plantear las *Ecuaciones de Compatibilidad*, calcular las flexibilidades δ_{ij} y términos de carga δ_{i0}, para obtener el *Sistema de Ecuaciones Lineales* (SEL), que representa a la estructura que se analiza**.**
- Resolver el SEL y determinar las incógnitas hiperestáticas.
- Aplicar el *Principio de Independencia de Acciones y Superposición de Esfuerzos* (PIASE) y calcular los Diagramas de Esfuerzos Característicos:

$$\mathrm{M_{(x)}} = \mathrm{M_{(\overline{p})}} + \mathrm{M_{(\overline{X}_1=1)}}.\mathrm{X_1} + \cdots + \mathrm{M_{(\overline{X}_n=1)}}.\mathrm{X_n}$$

Resolución de una viga continua de tres tramos. Empleo del Método de las Fuerzas



El primer paso es determinar el grado de hiperestaticidad GH.

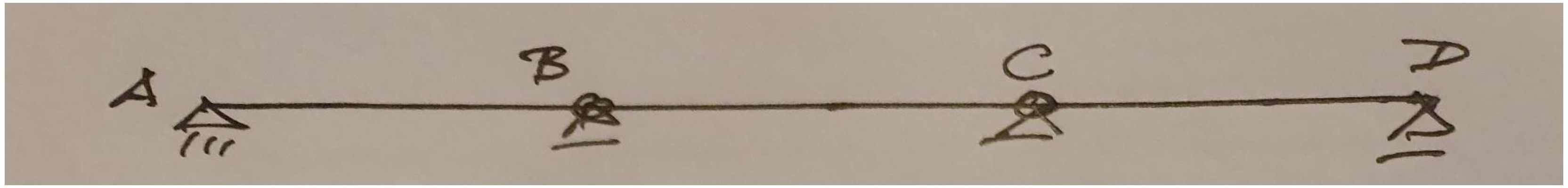
En este caso es una sola chapa. Hay que fijar tres condiciones de vínculo, pero hay un apoyo fijo y tres móviles, en total cinco condiciones de vínculo. Luego:

GH = Num Cond Vínculos – Eq. Equilibrio = 5 – 3 = 2

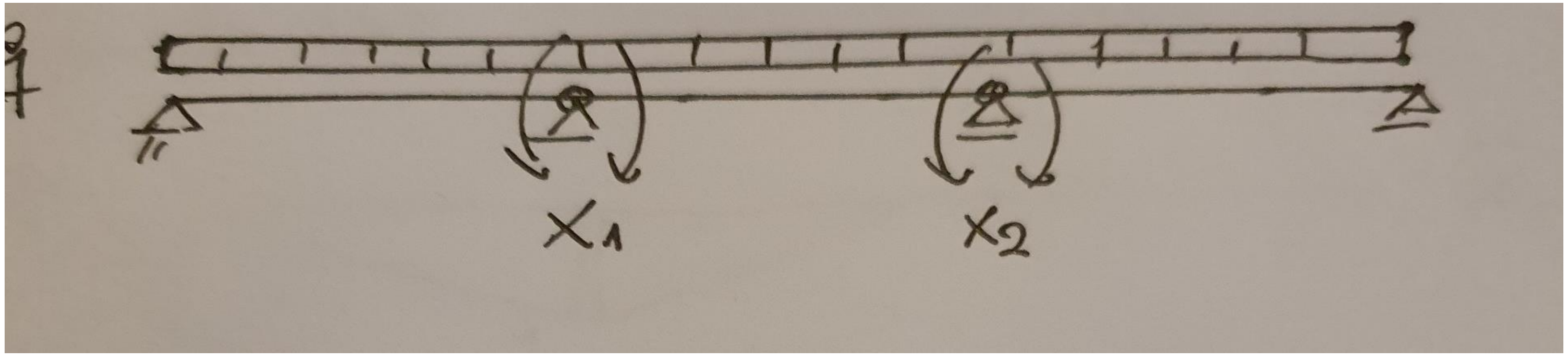
Entonces hay que elegir un Sistema Fundamental, para lo cual se deben eliminar dos vínculos

Elección del Sistema Fundamental SF

Para elegir el Sistema Fundamental SF, se deben eliminar dos vínculos. Hay más de una opción. Vamos a plantear una posible, que consiste en poner dos articulaciones sobre los apoyos centrales, como se observa en la figura:



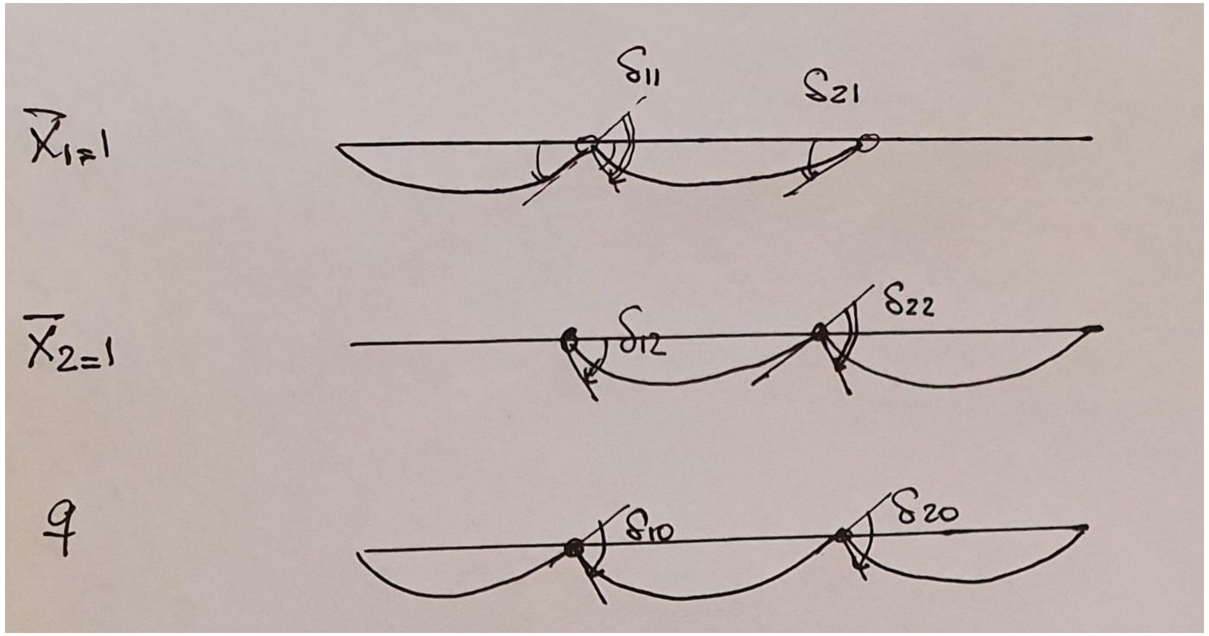
Si al Sistema Fundamental le agregamos las incógnitas y las cargas tenemos el Sistema Isostático equivalente



Ecuaciones de Compatibilidad

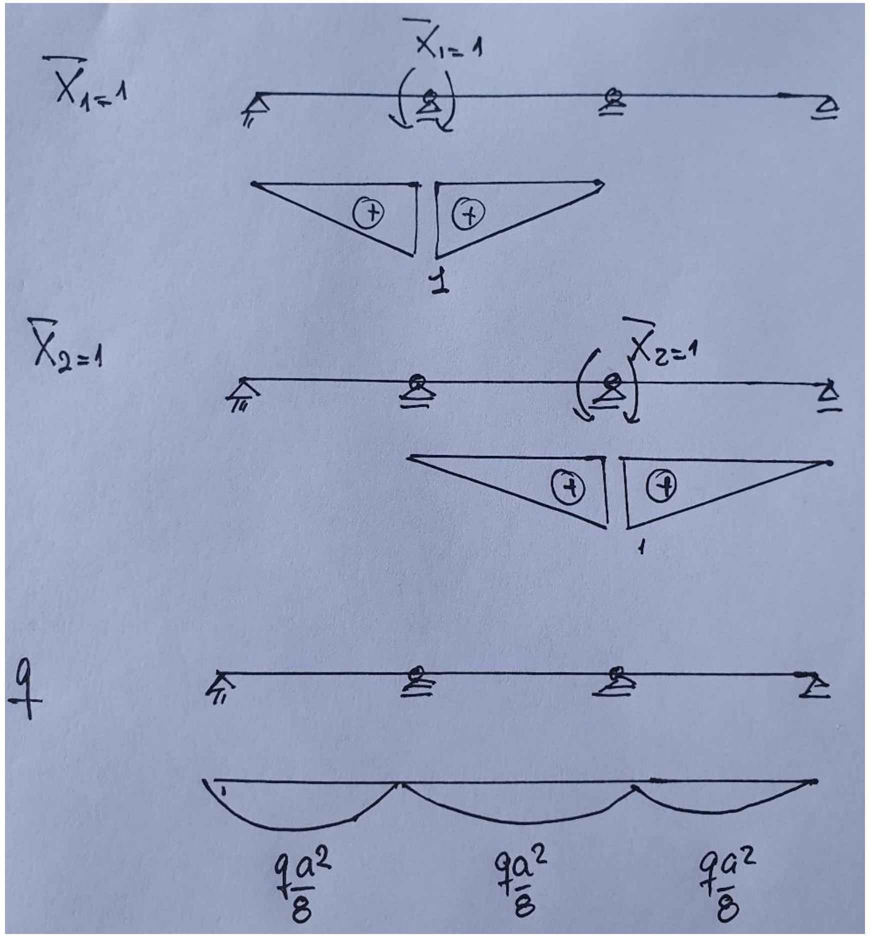
Al imponer las articulaciones en los apoyos centrales B y C, aparecen giros relativos en dichos apoyos. Los mismos se deben eliminar para que la estructura se comporte como el sistema hiperestático original.

Vamos a llamar δ_{ij} a las flexibilidades y δ_{i0} a los términos independientes. Así δ_{11} representa el giro relativo en el apoyo B, debido a un par unitario X_1=1, δ_{12} el giro en el apoyo B, debido a un par unitario X_2=1 y δ_{10} el giro relativo debido a la carga q. Análogamente sucede lo mismo con δ_{22}, δ_{21} y δ_{20} en el apoyo C, debido a las incógnitas X_2=1, X_1=1 y las cargas, respectivamente.



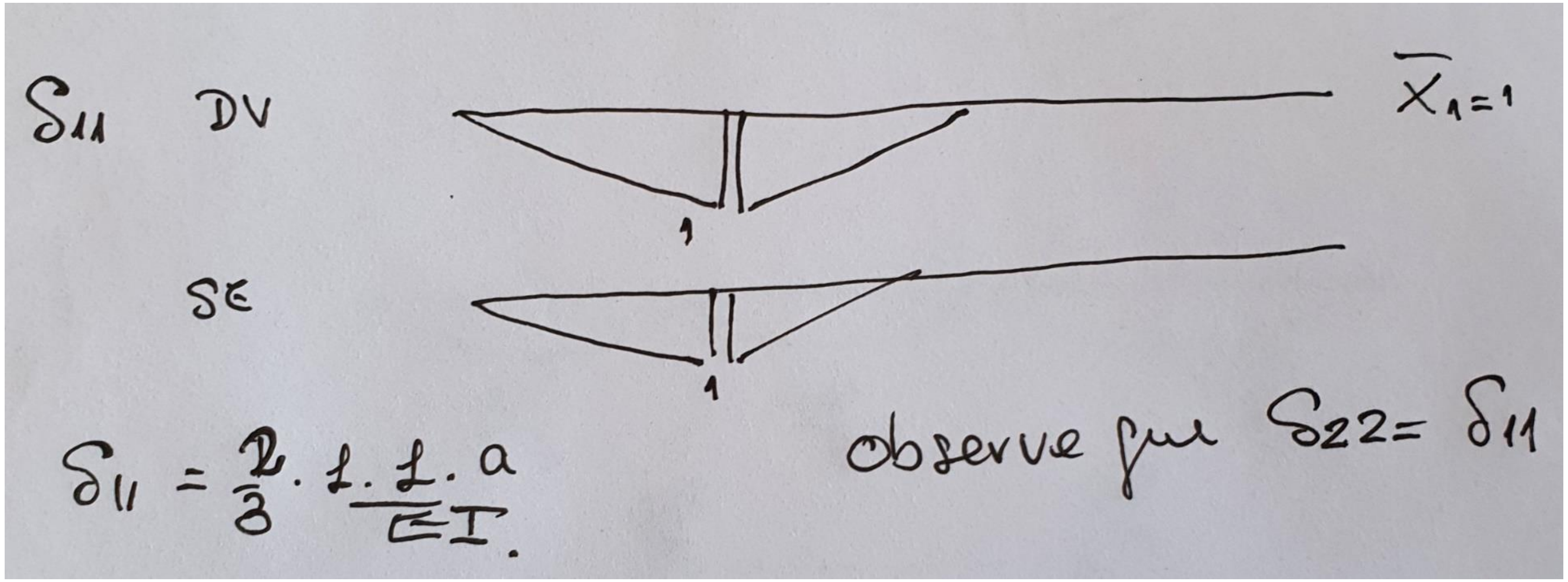
Cálculo de las flexibilidades y términos independientes

Para calcular las flexibilidades δ_{ij} y los términos independientes δ_{i0} se emplea el TTV. En primer lugar, debemos calcular los diagramas de momento para las cargas y las incógnitas unitarias, respectivamente.



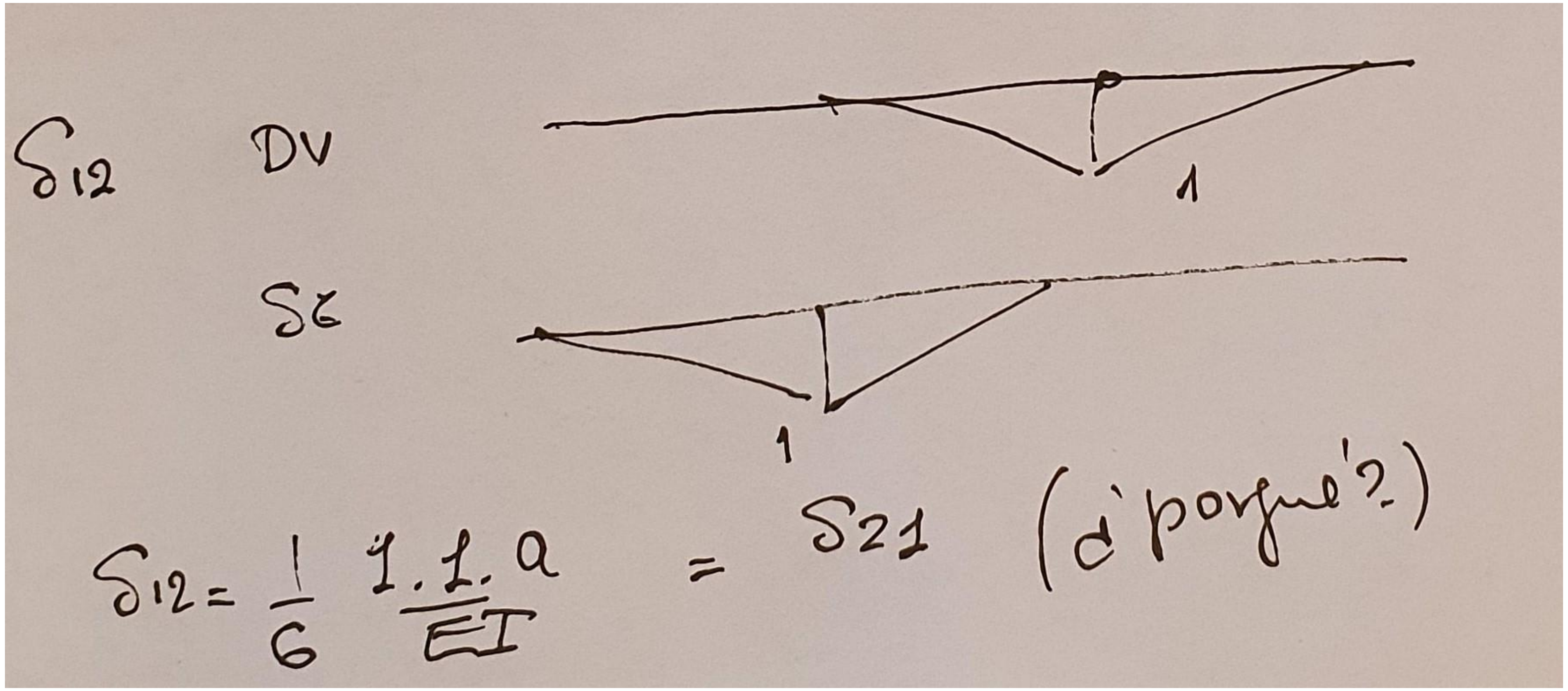
Cálculo de las flexibilidades directas δ_{11} y δ_{22}

Notemos que en este caso se debe calcular el giro relativo δ_{11} en el apoyo B, debido a X_1. Entonces tanto la DV como el SE están causados por $X_1 = 1$. Luego se debe integrar el diagrama de Momentos debido a $X_1 = 1$ consigo mismo. Se deben integrar dos tramos, en ambos casos hay dos triángulos con la misma pendiente (coeficiente 1/3), luego el coeficiente es 2/3. Los diagramas debidos a $X_2 = 1$ son idénticos a los debidos a $X_1 = 1$, entonces las flexibilidades directas son iguales, es decir $\delta_{11} = \delta_{22}$.



Cálculo de las flexibilidades cruzadas δ_{12} y δ_{21}

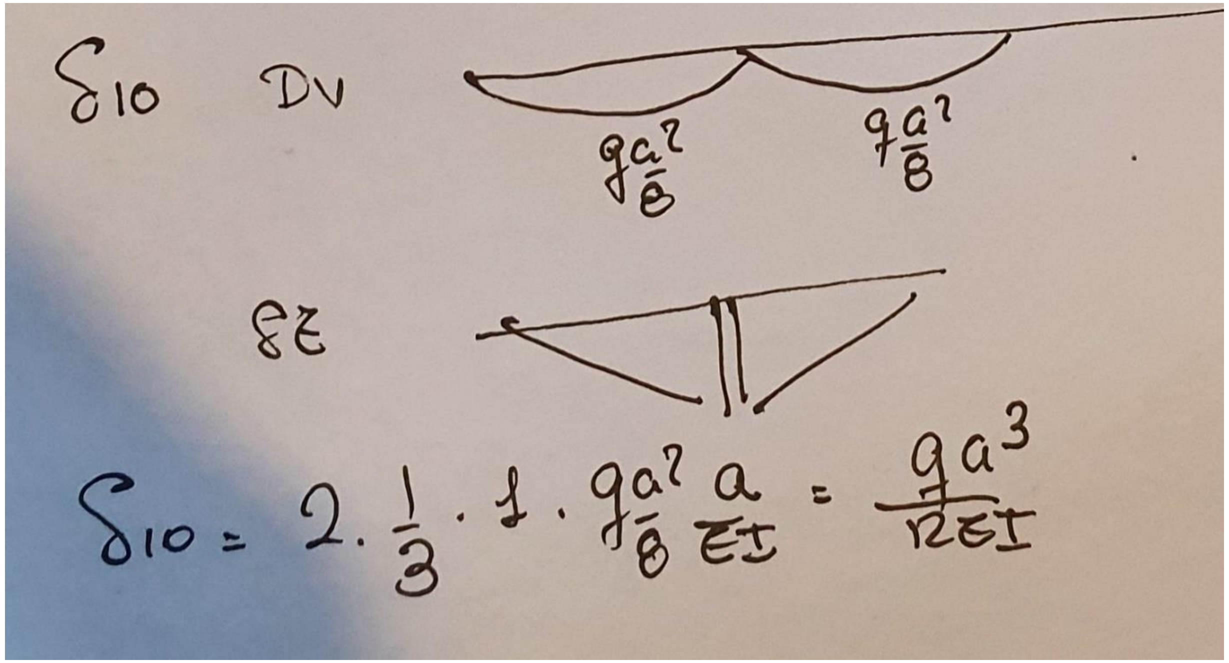
Notemos que en este caso se debe calcular el giro relativo δ_{12} en el apoyo B, debido a $X_2 = 1$. Entonces la DV es la causada por $X_2 = 1$, Y el SE se debe a $X_1 = 1$, porque se debe calcular el giro relativo en el apoyo B. Luego se deben integrar los diagramas de Momentos debidos a $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$. Como son dos triángulos con pendientes o vértices opuestos el coeficiente de integración es 1/6. Por un razonamiento análogo surge que $\delta_{12} = \delta_{21}$



Cálculo de los términos independientes δ_{10} y δ_{20}

Notemos que en este caso se debe calcular el giro relativo δ_{10} en el apoyo B y δ_{20} en el apoyo C, debido a la carga uniforme q, que actúa como DV. Los SE se deben a las cargas unitarias $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$, respectivamente. Los diagramas de Momento flector para los SE son dos triángulos con vértice en los apoyos y el diagrama de Momento flector debido a la carga es una parábola de flecha $\frac{q.a^2}{8}$. El coeficiente de la integración de un triángulo con una parábola es 1/3, luego el coeficiente final es 2/3 porque hay dos tramos iguales.

Pregunta ¿Por qué ambos términos de carga son iguales?



Cálculo de las incógnitas X1 y X2

Recordado las ecuaciones de compatibilidad:

$$\delta_{10} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 = 0$$
$$\delta_{20} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 = 0$$

Si se reemplazan los valores obtenidos para las flexibilidades, se obtiene el Sistema de Ecuaciones Lineales y su solución

$$\frac{qa^3}{12} + \frac{2a}{3EI}X_1 + \frac{a}{6EI}X_2 = 0$$
$$\frac{qa^3}{12} + \frac{aX_2}{6EI} + \frac{2aX_1}{3EI} = 0$$

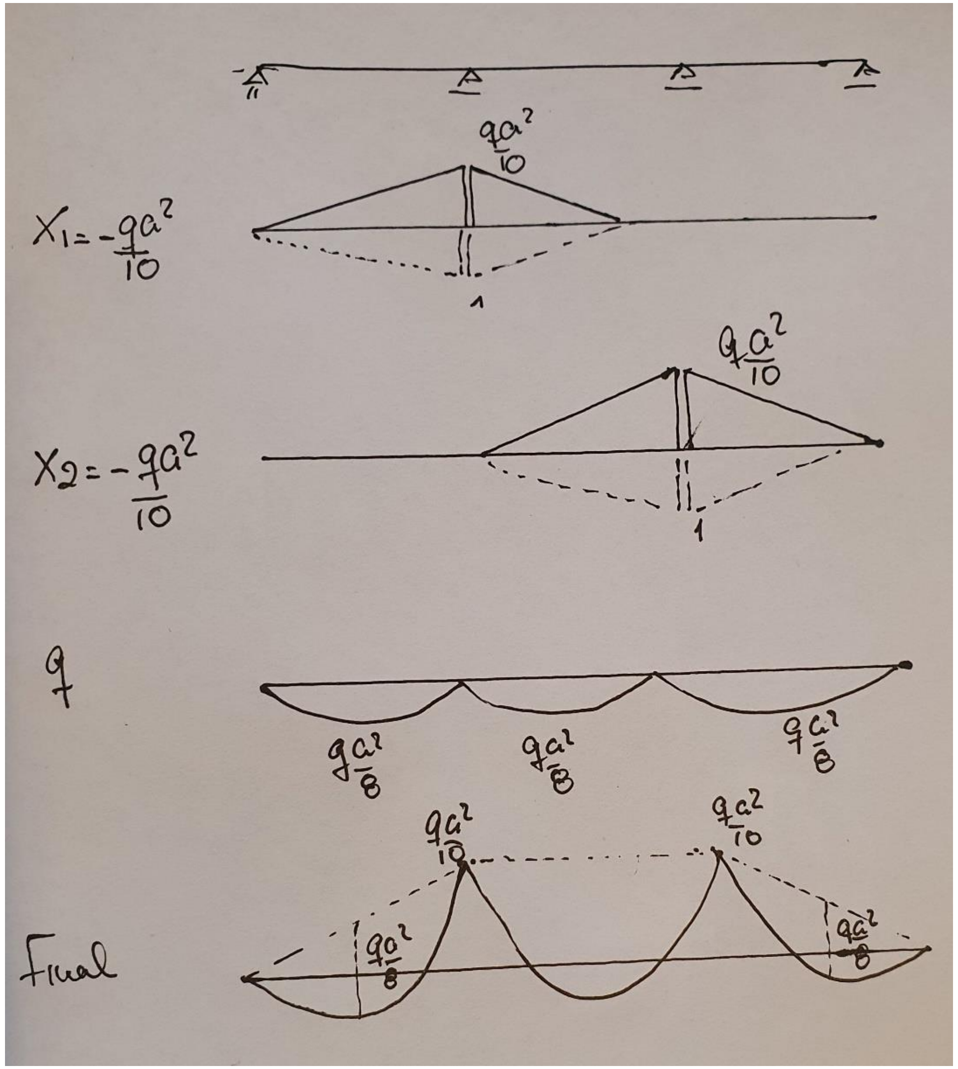
$$X_1 = X_2 = -\frac{qa^2}{10}$$

Observemos que los términos o flexibilidades cruzadas son iguales, luego la matriz es simétrica. Como ambos términos de carga son iguales, las dos incógnitas tienen el mismo valor. Este es un resultado que se debe a la simetría del problema, tema al cual volveremos más adelante.

Los valores obtenidos para las incógnitas X_1 y X_2 necesariamente son negativos ¿Porqué? Observe las elásticas debidas a $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ y la elástica debida a las cargas en el Sistema Fundamental y ensaye una explicación.

Diagrama de Momentos Final

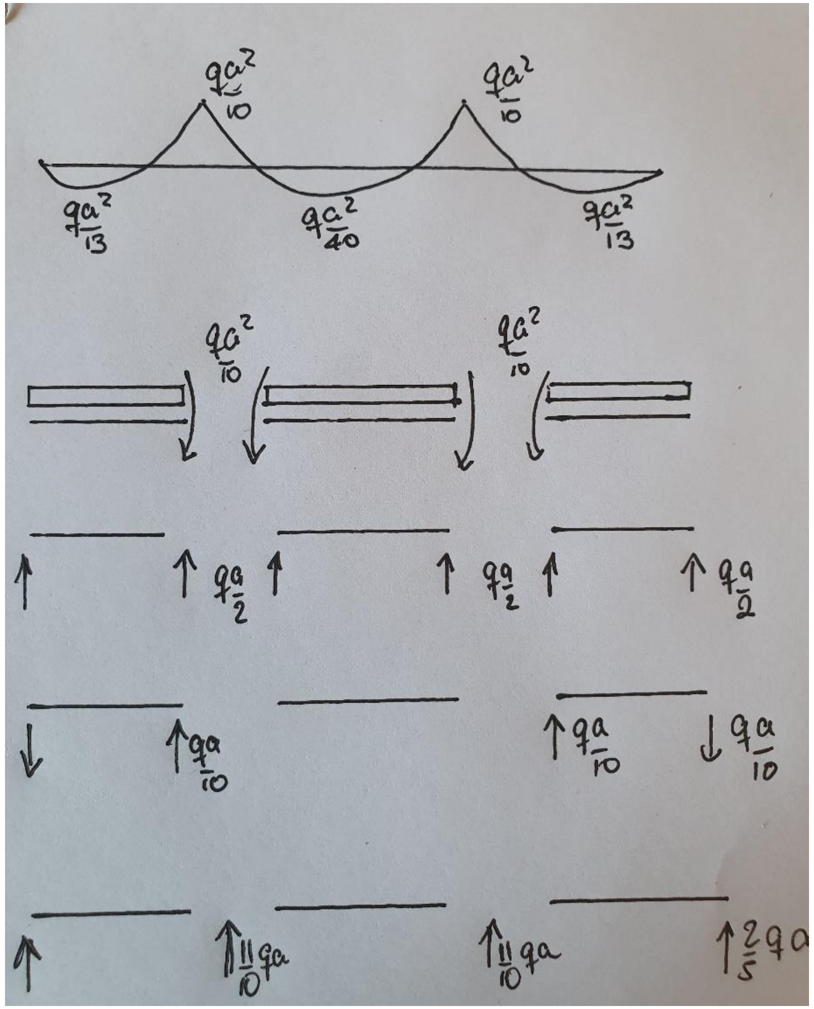
Sumando los diagramas de momentos unitarios, multiplicados por el verdadero valor de las incógnitas, más el diagrama de momentos debido a las cargas se obtiene el diagrama de momentos final.



En los diagramas de momento debidos a X_1 y X_2, se han trazado en línea de puntos los diagramas para las incógnitas unitarias. Notese que el sentido de los diagramas de momento finales debidos a X_1 y X_2 es opuesto al de los unitarios, porque las incógnitas tienen signo negativo.

Cálculo de Reacciones

Para calcular las reacciones y el esfuerzo de corte, procedemos a *desmembrar* la viga. La separamos en tramos y colocamos los pares extremos de pieza y las cargas que actúan sobre cada tramo. Por equilibrio obtenemos las fuerzas extremas de pieza.

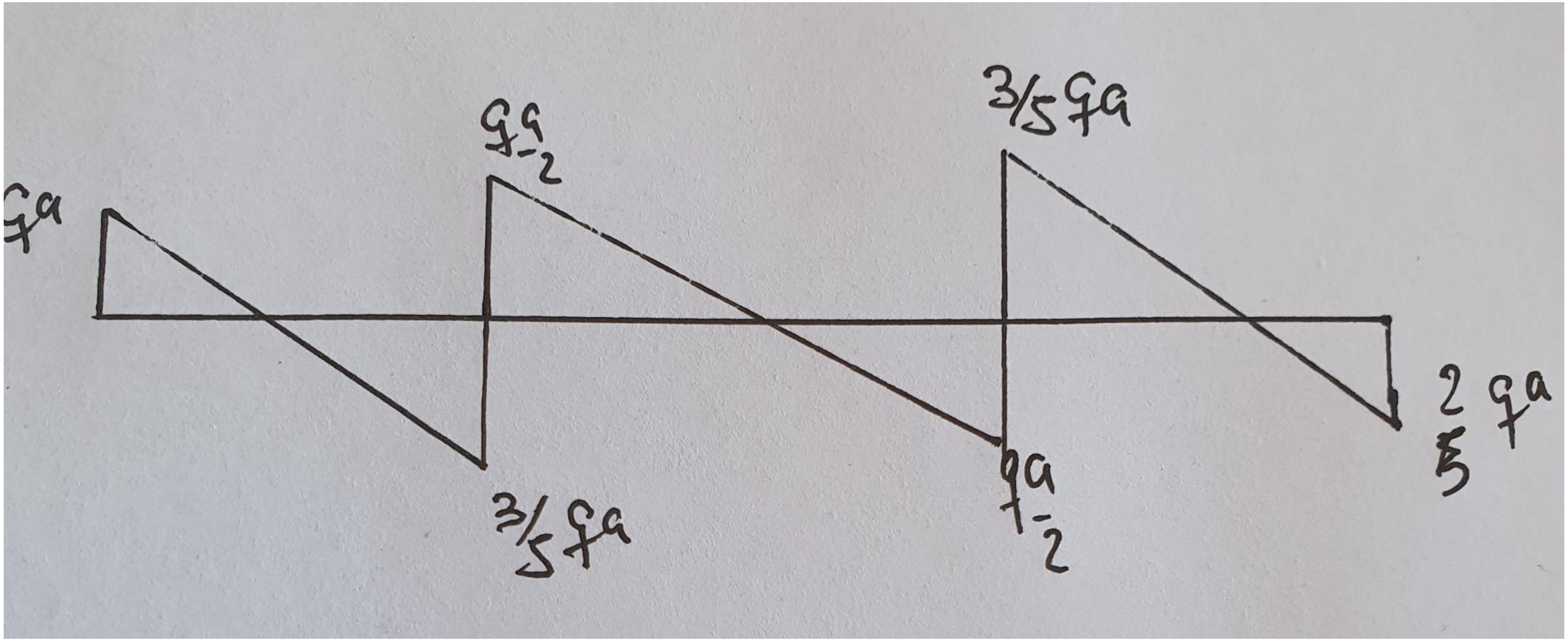


Debido a la carga uniforme q, todas las reacciones valen $\frac{q.a}{2}$. Debido a los pares negativos sobre los apoyos centrales, de valor $\frac{q.a^2}{10}$, en los tramos extremos hay reacciones de valor $\frac{q.a}{10}$ y $-\frac{q.a}{10}$, respectivamente. En el tramo central no hay reacciones debido a los pares porque se estos anulan entre sí.

Sumando las reacciones para q y M, se obtienen las reacciones finales para cada tramo y en base a estas, las reacciones en los apoyos. Estas reacciones de apoyo son igual a la suma de las reacciones de las barras que concurren al nudo.

Esfuerzo de Corte

El esfuerzo de corte se puede trazar a partir de las reacciones (esfuerzos) extremos de pieza para cada una de las vigas *desmembradas*. En los extremos de la viga el corte vale $\frac{2\ q.a}{5}$. El resto de los valores puede verse en el diagrama de la Figura.



Discusión de Resultados

Es importante discutir los resultados obtenidos con el fin de comprender como funcionan las estructuras hiperestáticas en general y una viga continua en particular.

- La existencia de momentos negativos de los apoyos, característicos de las vigas continuas y que también se verifican en las estructuras hiperestáticas disminuyen el valor máximo del momento flector en los vanos.

- Los momentos negativos de apoyo, que son iguales por simetría y de valor $\frac{\mathrm{q.a}^2}{10}$ toman un valor intermedio entre el valor del momento de una viga empotrada articulada que vale $\frac{\mathrm{q.a}^2}{8}$ y el de la viga empotrada empotrada que vale $\frac{\mathrm{q.a}^2}{12}$.

- Las reacciones de vínculo, por efecto de los pares de empotramiento tienden a concentrar carga en los apoyos centrales, en desmedro de los apoyos extremos.

- El esfuerzo de corte se puede trazar a partir de las reacciones (esfuerzos) extremos de pieza para cada una de las vigas *desmembradas*. En los extremos de la viga el corte vale $\frac{2\ \mathrm{q.a}}{5}$. El resto de los valores puede verse en el diagrama de la Figura.