ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 3

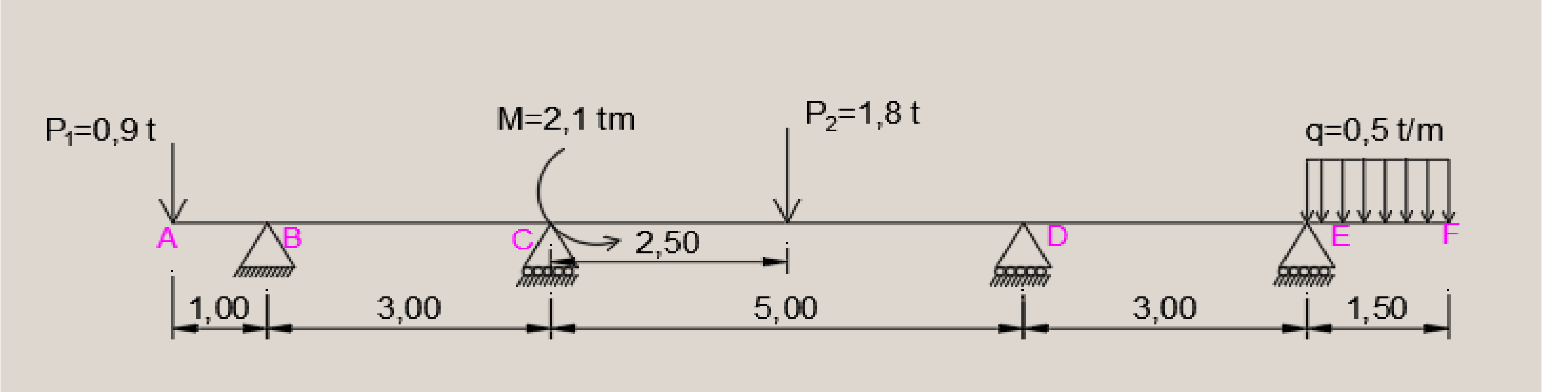
Resolución de problemas utilizando el Método de las Fuerzas – Problemas 3-5

Dr. Ing. Carlos García Garino

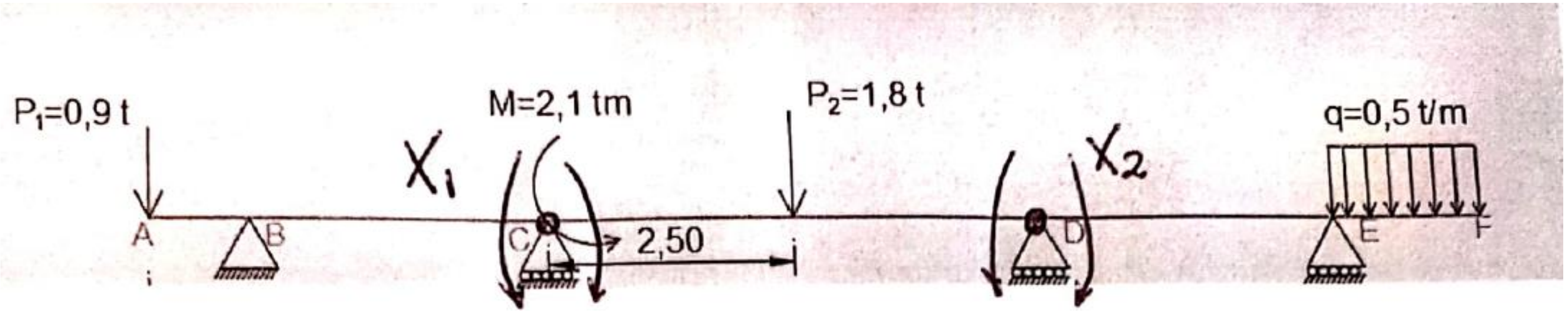
Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

Abril de 2022

P 3 -Resolución de una viga continua de tres tramos. Empleo del Método de las Fuerzas

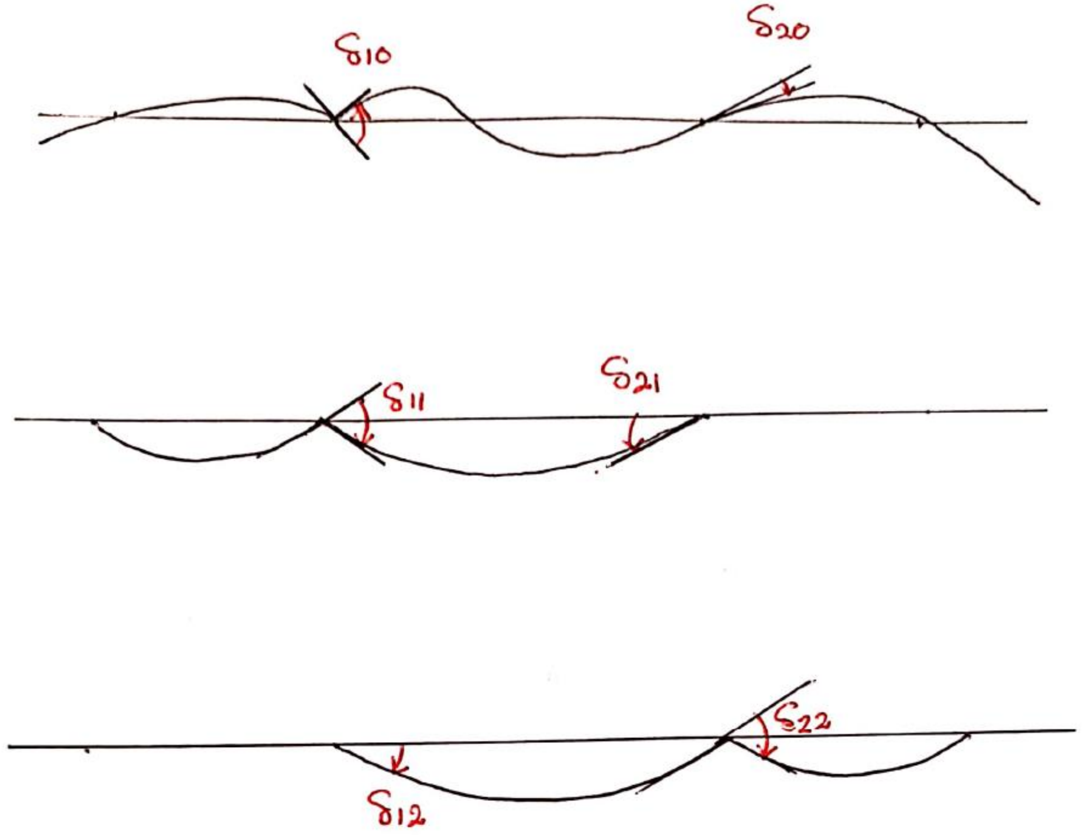


En este caso es una sola chapa. Hay cinco condiciones de vínculo, luego el GH = 2. El Sistema Fundamental y el Sistema Isostático Equivalente seleccionados son:



Ecuaciones de Compatibilidad

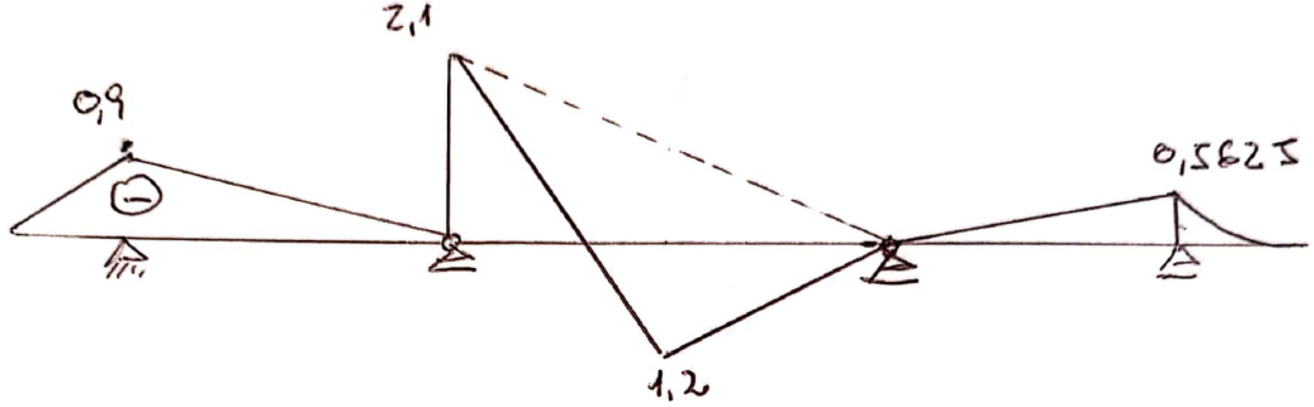
Se trabaja de manera similar a problemas anteriores. Se imponen articulaciones en los apoyos centrales C y D. La flexibilidad δ_{11} representa el giro relativo en el apoyo C, δ_{12} el giro en el apoyo C, debido a un par unitario X_2=1 en D y δ_{10} el giro relativo debido a la carga q. Análogamente sucede lo mismo con δ_{22}, δ_{21} y δ_{20} en el apoyo D, debido a las incógnitas X_2=1, X_1=1 y las cargas, respectivamente.



Cálculo de las flexibilidades y términos independientes

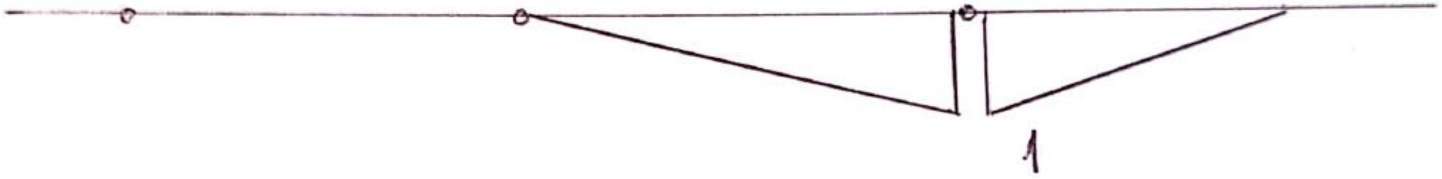
Para calcular las flexibilidades δ_{ij} y los términos independientes δ_{i0} se emplea el TTV. En primer lugar, debemos calcular los diagramas de momento para las cargas y las incógnitas unitarias, respectivamente.

Cargas



X_1=1

X_2=1



Cálculo de las flexibilidades y términos independientes

Cálculo de las flexibilidades $\delta_{11} = \delta_{22}$ y $\delta_{12} = \delta_{21}$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{3} \, 1 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 5 = \frac{1}{EI}\left(1 + \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{EI}\frac{8}{3}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{6} \, 1 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 5 = \frac{5}{6}\frac{1}{EI}$$

Cálculo de los términos independientes δ_{10} y δ_{20}

$$\delta_{10} = -\frac{1}{6} \, 0.9 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 3 + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{EI} \cdot 5 - \frac{1}{3} \, 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 5 = -\frac{1{,}1375}{EI}$$

$$\delta_{20} = -\frac{1}{6} \, 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 5 + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{9}{4}\frac{1 \cdot 5}{EI} - \frac{1}{6} \, 1 \cdot 0.5625 \cdot 3 = \frac{0{,}7815}{EI}$$

Cálculo de las incógnitas X1 y X2 – Diagrama de Momentos

Una vez conocidas las flexibilidades y términos independientes, las ecuaciones de compatibilidad:

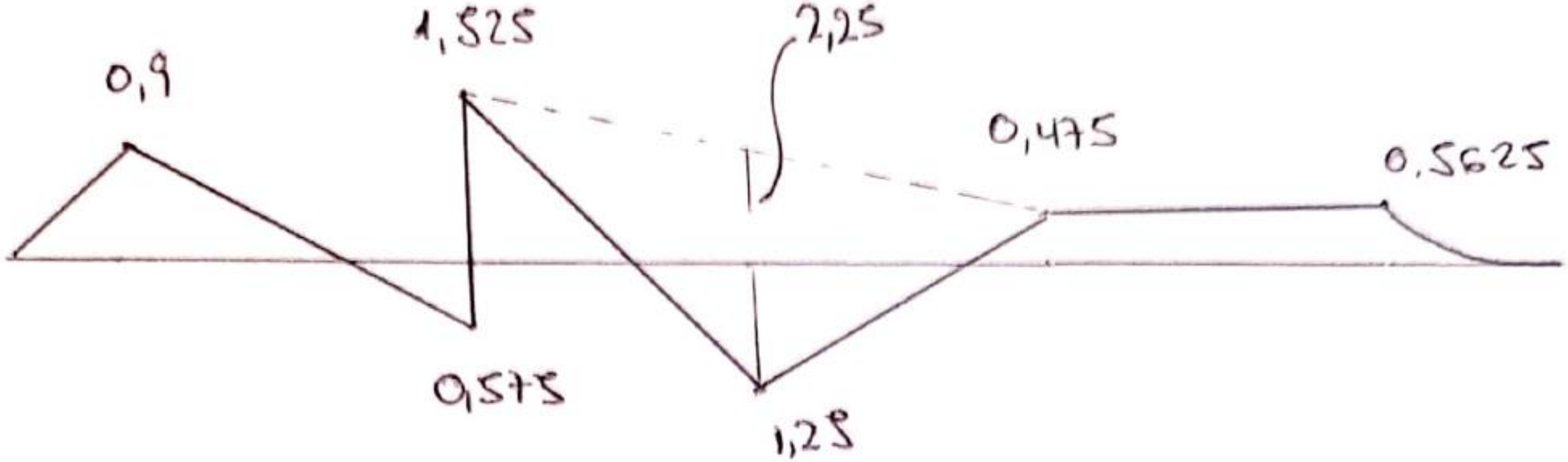
$$\delta_{10} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 = 0$$
$$\delta_{20} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 = 0$$

Resultan para los valores obtenidos

$$-\frac{1,1375}{EI} + \frac{8}{3}\frac{1}{EI}X_1 + \frac{5}{6}\frac{1}{EI}X_2 = 0$$
$$\frac{0,7875}{EI} + \frac{5}{6}\frac{1}{EI}X_2 + \frac{8}{3}X_1 = 0$$

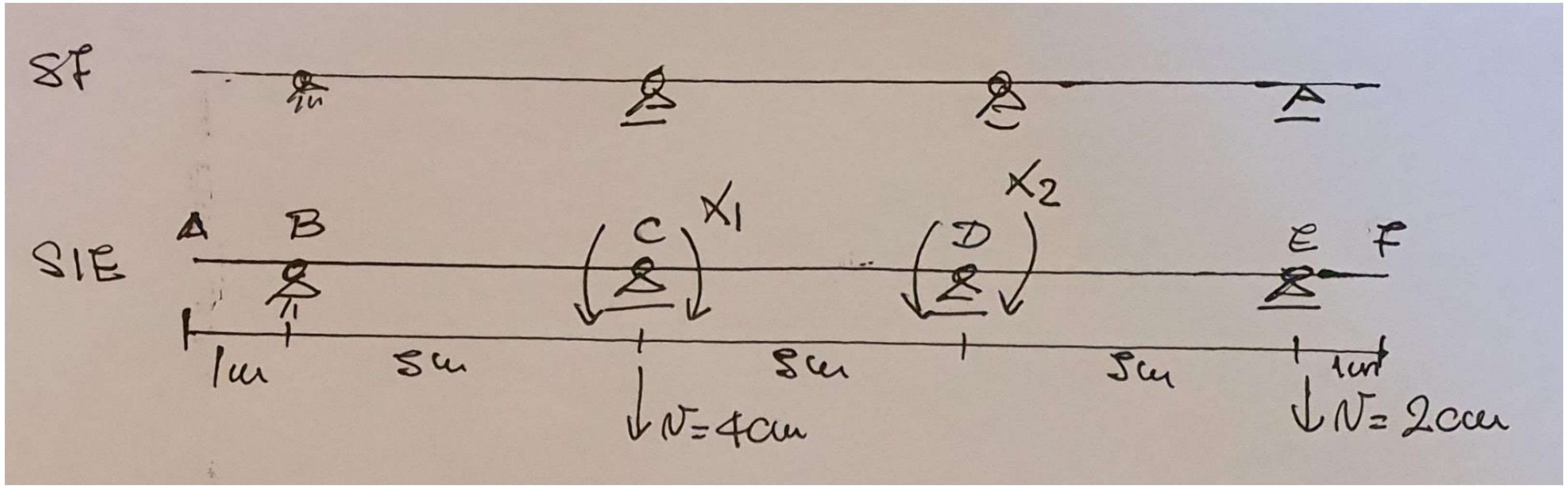
$$X_1 = 0,575$$
$$X_2 = -0,475$$

El diagrama de momentos final queda:



P4 -Resolución de una viga continua de tres tramos.
Caso de descenso de Apoyos. Empleo del Método de las Fuerzas

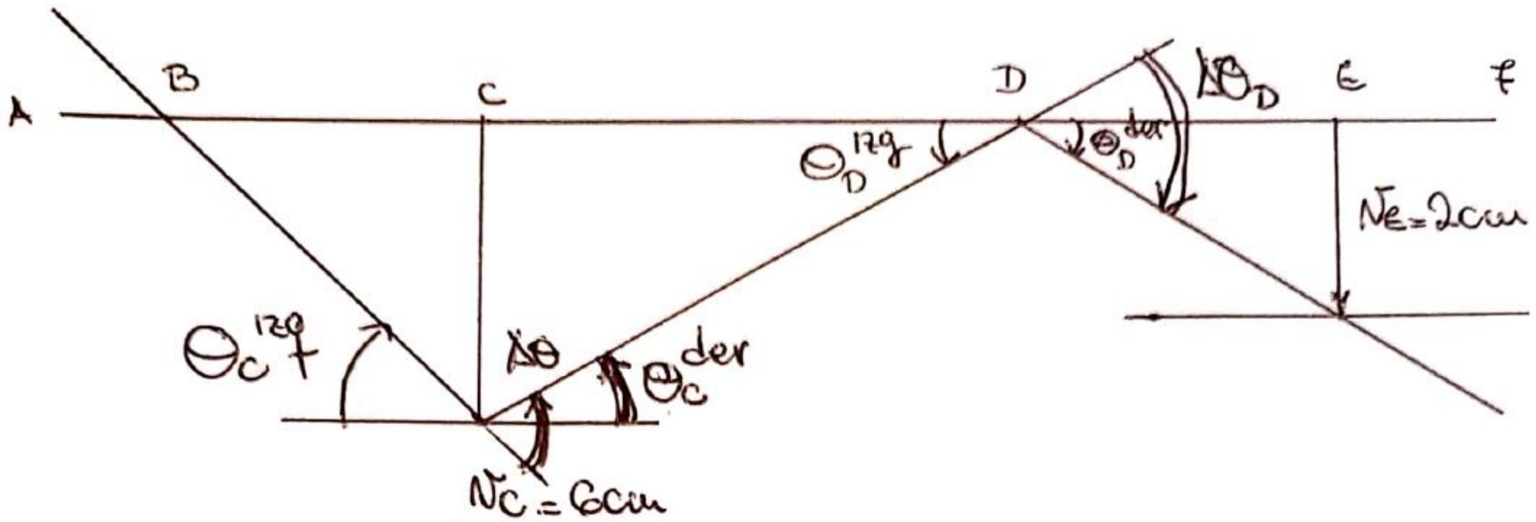
En la figura se muestran el Sistema Fundamental y el Sistema Isostático equivalentes. También se indica el valor de los descensos de apoyo.



Las flexibilidades ya se calcularon en el Problema 3, cuando se calculó la viga para el caso de las cargas mecánicas. La novedad en este caso consiste en calcular los términos de carga para los descensos de apoyo. Los mismos se obtienen en base a consideraciones geométricas. También pueden calcularse mediante el TTV.

Cálculo de los términos independientes

Se supone que los ángulos son pequeños y que pueden aproximarse el arco y la tangente. Es importante compatibilizar unidades. Por esa razón los descensos de apoyo se expresan en metros.



$$\delta_{10} = -\frac{6\times10^{-2}}{5} - \frac{6\times10^{-2}}{3} = -\frac{16}{5}\times10^{-2} = -3{,}2\times10^{-2}$$

$$\delta_{20} = \frac{4\times10^{-2}}{3} - \left(-\frac{6\times10^{-2}}{5}\right) = \frac{38}{15}\times10^{-2} = 2{,}53\times10^{-2}$$

Cálculo de las incógnitas X1 y X2

Una vez conocidas las flexibilidades y términos independientes, las ecuaciones de compatibilidad:

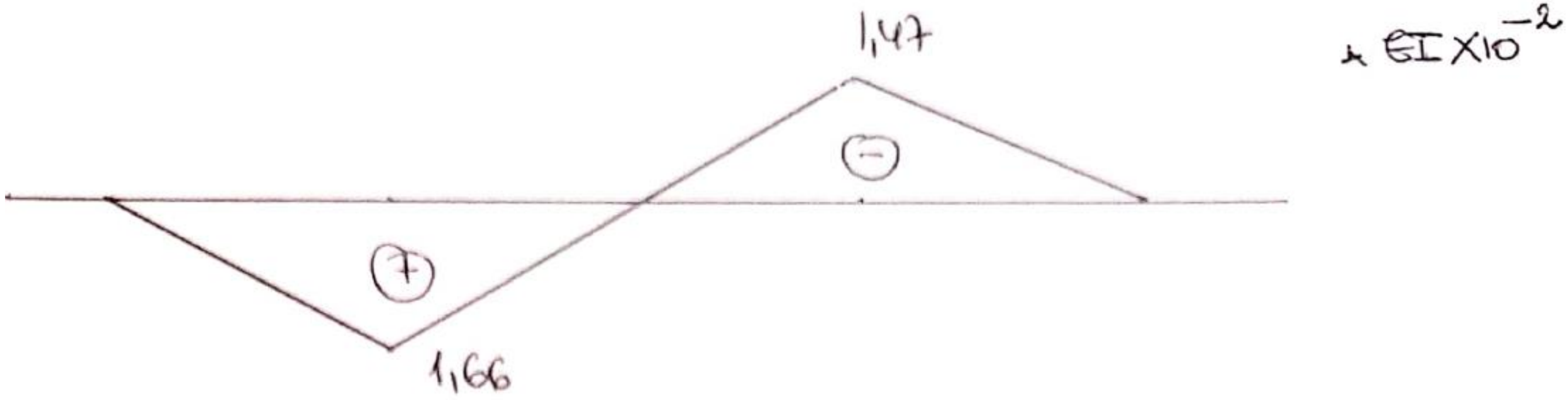
$$\delta_{10} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 = 0$$
$$\delta_{20} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 = 0$$

Resultan para los valores obtenidos

$$-3{,}2\times10^{-2} + \frac{8}{3}\frac{X_1}{EI} + \frac{5}{6}\frac{X_2}{EI} = 0$$
$$2{,}53\times10^{-2} + \frac{5}{6}\frac{X_1}{EI} + \frac{8}{3}\frac{X_2}{EI} = 0$$

$X_1 = 1{,}66\ EI\times10^{-2}$ $\quad X_2 = -1{,}47\ EI\times10^{-2}$

El diagrama de momentos final queda:



P5 -Resolución de una viga continua de tres tramos.
Caso de Acciones térmicas. Empleo del Método de las Fuerzas

En la figura se muestran el Sistema Fundamental y el Sistema Isostático equivalentes, así como las acciones térmicas correspondientes.

Las flexibilidades ya se calcularon en el Problema 3. Los términos de carga debidos a las acciones térmicas se obtienen por TTV. En la figura inferior se muestra la elástica debido a la temperatura en el SF.

Cálculo de los términos independientes

En este caso los términos independientes se deben a la acción térmica. Se pueden calcular mediante el TTV y ya se han visto ejemplos en la clase teórico práctica y en el TP1-2.

$$\delta_{10} = -\frac{\alpha \Delta t}{h} \int \overline{M} \, dx = -\frac{1{,}2 \times 10^{-5}}{EI} \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = -\frac{36 \times 10^{-5}}{h}$$

$$\delta_{20} = -\frac{\alpha \Delta t}{h} \int \overline{M} \, dx = \delta_{10}$$

Cálculo de las incógnitas X1 y X2 – Diagrama de Momentos

Una vez conocidas las flexibilidades y términos independientes, las ecuaciones de compatibilidad:

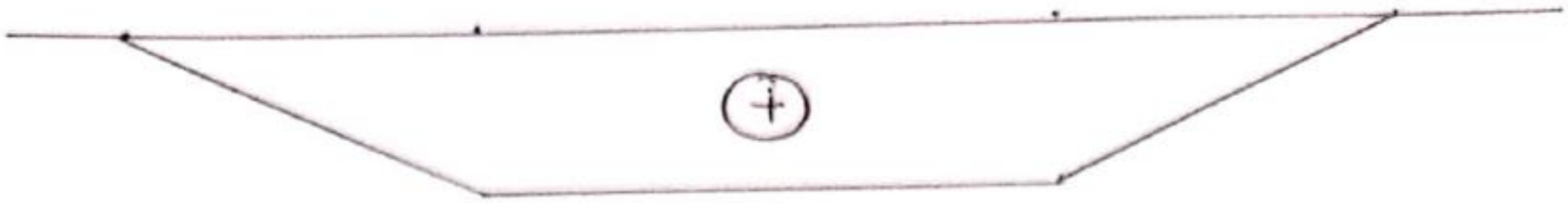
$$\delta_{10} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 = 0$$
$$\delta_{20} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 = 0$$

Resultan para los valores obtenidos

$$-\frac{36}{h}\times10^{-5} + \frac{8}{3}\frac{X_1}{EI} + \frac{5}{6}\frac{X_2}{EI} = 0$$
$$-\frac{36}{h}\times10^{-5} + \frac{5}{6}\frac{X_1}{EI} + \frac{8}{3}X_2 = 0$$

$$X_1 = X_2 = \frac{72}{7}\,\frac{EI}{h}\times10^{-5}$$

El diagrama de momentos final queda:



Discusión de resultados

El planteo y solución de los Problemas 3, 4 y 5 es completamente similar. Las flexibilidades son las mismas y cambian los términos de carga.

Es importante reconocer un concepto importante:: ni los descensos de apoyo ni las acciones térmicas provocan momentos en el Sistema Fundamental.

Luego, par el caso de acciones térmicas o descensos de apoyo, el diagrama de momentos final queda definido directamente por el valor de las incógnitas X1 y X2, que en el caso del problema son el momento flector de los puntos C y D, coincidente con los apoyos centrales.

Por supuesto que el cálculo de los términos independientes es diferente para cada caso, como se explicó para cada uno de los ejemplos en las filminas anteriores.

Como se ha podido observar el procedimiento utilizado para resolver los problemas mediante el Método de las Fuerzas es siempre el mismo, con la salvedad del cálculo de los términos independientes.

También es importante señalar que haber elegido un Sistema Fundamental basado en una viga Gerber facilita mucho los cálculos.

Por último un comentario de tipo práctico: siempre que resulte posible es preferible, en ejemplos sencillos como los vistos, dejar expresados los resultados en función de los datos del problema (E, I, a, Dt, h, etc.).