ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 3: Método de las Fuerzas

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
Abril de 2022

Temario

1. Estructuras Hiperestáticas
2. Planteo del Método de las Fuerzas
3. Problemas de Ejemplo
4. Justificación del Método de las Fuerzas
5. Cálculo de Desplazamientos en Sistemas Hiperestáticos mediante el Teorema de Trabajos Virtuales (TTV)

1. Estructuras Hiperestáticas

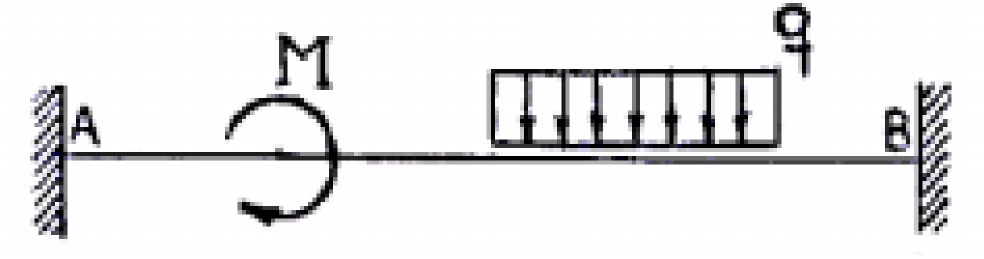
El Método de las Fuerzas es empleado para el análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas y, como su nombre lo indica, se basa en el planteo de incógnitas denominadas hiperestáticas que son magnitudes estáticas.

Las Estructuras Hiperestáticas por su lado son definidas como todas aquellas que poseen más condiciones de vínculos (internos o externos) que las ecuaciones de equilibrio disponibles para el análisis.

2. Planteo del Método de las Fuerzas

Para desarrollar los conceptos teóricos necesarios para la correcta utilización de este método de análisis, consideraremos en una primera instancia un caso particular a partir del cual se llegará a una generalización.

Supongamos entonces que contamos con una estructura hiperestática como la viga doblemente empotrada sometida al sistema de cargas de la figura:



2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

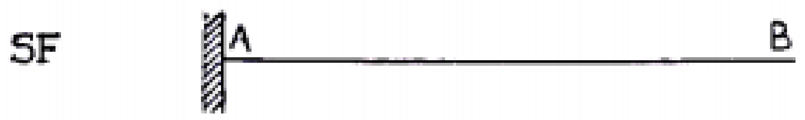
Definimos ahora el Grado de Indeterminación Estática o Grado de Hiperestaticidad GH como la diferencia entre las Número de Incógnitas Hiperestáticas X_i (reacciones) y el Número de Ecuaciones de Equilibrio Independientes EqI:

$$GH = X_i - EqI$$

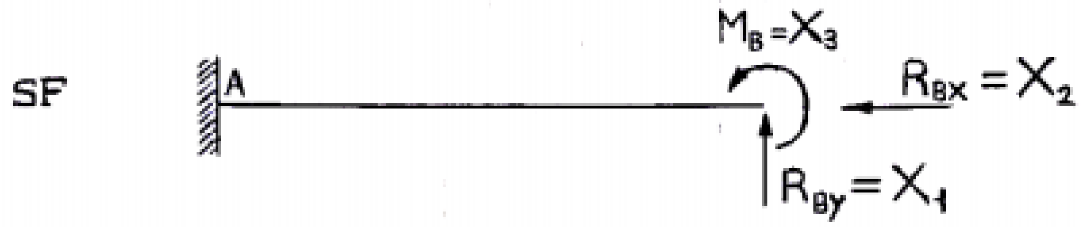
donde para el caso planteado vemos que GH = 3.

2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

El método se basa en plantear un Sistema Fundamental SF que, si bien generalmente es isostático, basta con que sea un sistema cuya solución se conozca (podría elegirse por ejemplo un sistema hiperestático con un menor GH y trabajar con tablas). Para el caso en estudio, el SF se escoge eliminando el vínculo de empotramiento en B:

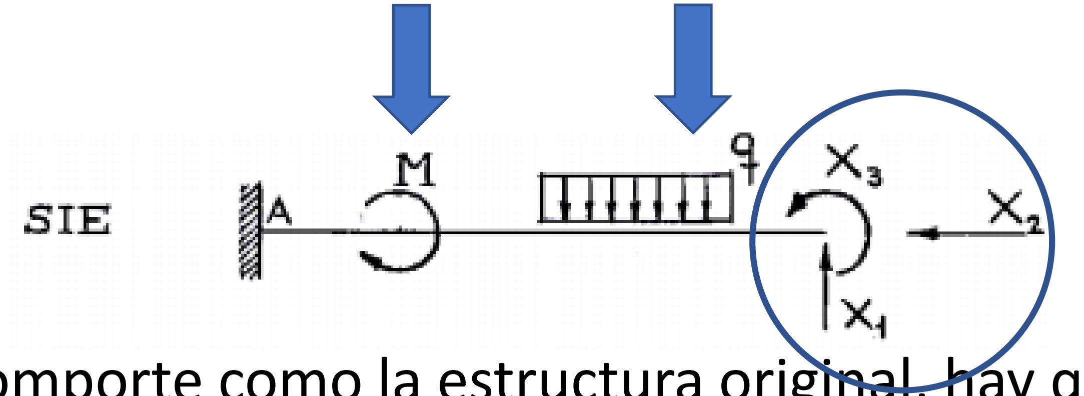


Ahora bien, si uno quita el vínculo y quiere poner en evidencia las reacciones del mismo tenemos:

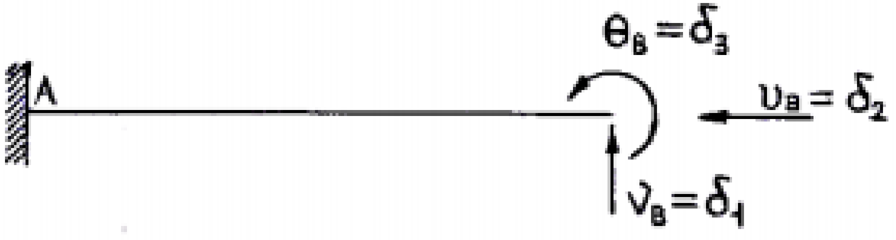


2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

Para generalizar llamamos a las Reacciones desconocidas X_1, X_2 y X_3 ya que son las incógnitas del problema. Si además de dichas Incógnitas Hiperestáticas X_i, agregamos las cargas obtenemos el Sistema Isostático Equivalente SIE:

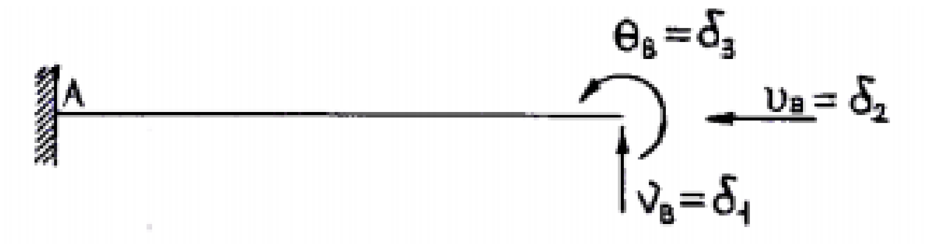


Para que el SIE se comporte como la estructura original, hay que reproducir las condiciones de la misma, por lo que:



2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

Se llamará entonces, por generalidad, a los desplazamientos y giros (flexibilidades) δ_1, δ_2 y δ_3. Dichos Desplazamientos y Giros δ_i se corresponden con las direcciones de las incógnitas X_1, X_2 y X_3, respectivamente (X_i en general). Obtenemos así las ecuaciones adicionales necesarias para resolver el problema hiperestático, denominada Ecuaciones de Compatibilidad, que se expresan como:



$$\mathbf{v_B = \upsilon_B = \theta_B = 0}$$

$$\begin{cases} \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = 0 \\ \delta_3 = 0 \end{cases}$$

y en general:

$$\delta_i = 0$$

2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

Planteo de las ecuaciones de compatibilidad

Como consecuencia de las hipótesis generales de la asignatura es válido el PIASE. Por lo tanto, una magnitud cualquiera, por ejemplo M(x) , resulta:

$$M_{(x)} = \left[M_{(x)}\right]_{\overline{p}} + \left[M_{(x)}\right]_{X_1} + \left[M_{(x)}\right]_{X_2} + \left[M_{(x)}\right]_{X_3}$$

donde $\overline{p}$ indica la correspondencia con cargas genéricas externas y X_i la correspondencia con las incógnitas.

2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

Al no conocer a priori el valor de dichas incógnitas X_1, X_2 y X_3, los valores de M(x) serán obtenidos a partir de valores unitarios $\overline{X}_j = 1$ para luego ser multiplicados por los valores reales correspondientes de las incógnitas X_i:

$$\mathbf{M_{(x)}} = [\mathbf{M_{(x)}}]_{\overline{\mathbf{p}}} + [\mathbf{M_{(x)}}]_{\overline{\mathbf{X}}_1=1} . \mathbf{X_1} + [\mathbf{M_{(x)}}]_{\overline{\mathbf{X}}_2=1} . \mathbf{X_2} + [\mathbf{M_{(x)}}]_{\overline{\mathbf{X}}_3=1} . \mathbf{X_3}$$

2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

Siempre hay tantas ecuaciones de compatibilidad como vínculos eliminados por lo que volviendo al caso estudiado tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas que, a partir de la aplicación del PIASE, vienen dadas por:

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_{1(\bar{p})} + \delta_{1(\bar{X}_1=1)} . X_1 + \delta_{1(\bar{X}_2=1)} . X_2 + \delta_{1(\bar{X}_3=1)} . X_3 = 0 \\ \delta_2 = \delta_{2(\bar{p})} + \delta_{2(\bar{X}_1=1)} . X_1 + \delta_{2(\bar{X}_2=1)} . X_2 + \delta_{2(\bar{X}_3=1)} . X_3 = 0 \\ \delta_3 = \delta_{3(\bar{p})} + \delta_{3(\bar{X}_1=1)} . X_1 + \delta_{3(\bar{X}_2=1)} . X_2 + \delta_{3(\bar{X}_3=1)} . X_3 = 0 \end{cases}$$

2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

Expresamos ahora las ecuaciones en Notación Indicial $\boldsymbol{\delta ij}$, donde el primer índice i indica el grado de libertad o movimiento que se compatibiliza ($\delta i = 0$) y el segundo índice j indica la acción que produce el movimiento. Tenemos entonces un Sistema de Ecuaciones que surge de plantear las ecuaciones de compatibilidad en forma compacta:

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_{1(\bar{p})} + \delta_{1(\bar{X}_1=1)}.X_1 + \delta_{1(\bar{X}_2=1)}.X_2 + \delta_{1(\bar{X}_3=1)}.X_3 = 0 \\ \delta_2 = \delta_{2(\bar{p})} + \delta_{2(\bar{X}_1=1)}.X_1 + \delta_{2(\bar{X}_2=1)}.X_2 + \delta_{2(\bar{X}_3=1)}.X_3 = 0 \\ \delta_3 = \delta_{3(\bar{p})} + \delta_{3(\bar{X}_1=1)}.X_1 + \delta_{3(\bar{X}_2=1)}.X_2 + \delta_{3(\bar{X}_3=1)}.X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 = 0 \end{cases}$$

2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

Las ecuaciones se expresan en Notación Indicial δ_{ij}, donde el primer índice i indica el grado de libertad o movimiento que se compatibiliza $(\delta_i = 0)$ y el segundo índice j indica la acción que produce el movimiento. Luego resulta un Sistema de Ecuaciones que surge de plantear las ecuaciones de compatibilidad en forma compacta:

$$\delta_1 = \delta_{1(\bar{p})} + \delta_{1(\bar{X}_1=1)}.X_1 + \delta_{1(\bar{X}_2=1)}.X_2 + \delta_{1(\bar{X}_3=1)}.X_3 = 0$$

$$\delta_2 = \delta_{2(\bar{p})} + \delta_{2(\bar{X}_1=1)}.X_1 + \delta_{2(\bar{X}_2=1)}.X_2 + \delta_{2(\bar{X}_3=1)}.X_3 = 0$$

$$\delta_3 = \delta_{3(\bar{p})} + \delta_{3(\bar{X}_1=1)}.X_1 + \delta_{3(\bar{X}_2=1)}.X_2 + \delta_{3(\bar{X}_3=1)}.X_3 = 0$$

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 = 0 \end{cases}$$

2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

En resumen, el sistema pueden indentificarse:

I. *Flexibilidades* δ_{ij}: Dependen del material, las dimensiones y las condiciones de vínculo que definen la estructura. Son independientes de las cargas.

II. *Incógnitas* X_i: Son vínculos internos (esfuerzos, generalmente momentos flectores) o vínculos externos (Reacciones de Vínculo).

III. *Términos Independientes* δ_{i0}: desplazamientos dependientes de las cargas exteriores.

2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

Generalización

El resultado obtenido puede generalizarse con facilidad para el caso de n incógnitas hiperestáticas y el sistema de ecuaciones lineales resulta:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta_{10} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \cdots + \delta_{1n}.X_n = 0} \\ \boldsymbol{\delta_{20} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \cdots + \delta_{2n}.X_n = 0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta_{n0} + \delta_{n1}.X_1 + \delta_{n2}.X_2 + \cdots + \delta_{nn}.X_n = 0} \end{cases}$$

Forma Matricial

$$\begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notación Compacta

$$\mathbf{P} + \mathbf{D}.\mathbf{X} = 0$$

2. Planteo del Método de las Fuerzas (continuación)

Diagrama de Momentos

$$M_{(x)} = [M_{(x)}]_{\bar{p}} + [M_{(x)}]_{\bar{X}_1=1} . X_1 + [M_{(x)}]_{\bar{X}_2=1} . X_2 + [M_{(x)}]_{\bar{X}_3=1} . X_3$$

SIE