ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 3: Método de las Fuerzas

Parte 3

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
Abril de 2022

Temario

1. Caso de descensos de apoyo y acciones térmicas

2. Consideraciones de simetría y antisimetría en la solución de Estructuras Hiperestáticas. Aplicación al Método de las Fuerzas

3. Problemas de ejemplos

Descensos de Apoyo

Los descensos de apoyo, en una estructura isostática causan un mecanismo y la elástica de deformación se puede construir en base a consideraciones geométricas.

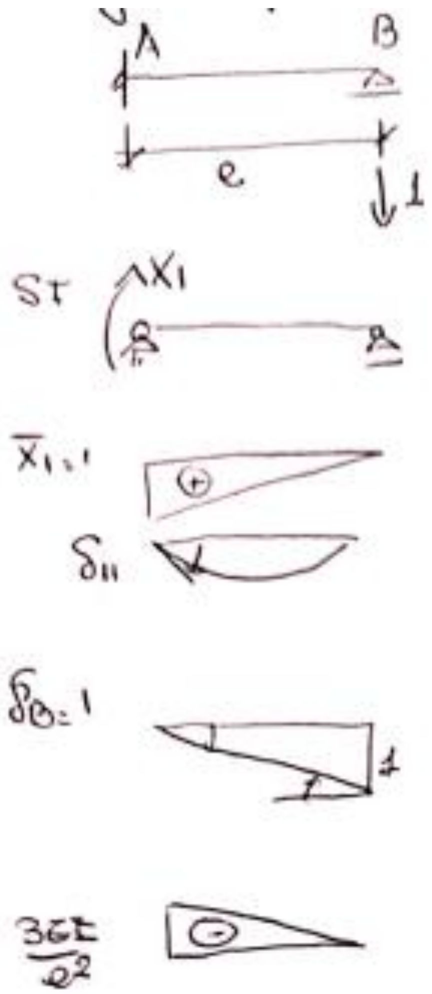
Para el caso de estructuras hiperestáticas, los descensos de apoyos provocan esfuerzos internos en general.

Para calcular los esfuerzos en una estructura hiperestática debido a descensos en uno o más de sus apoyos, se aplica el Método de las Fuerzas de una manera similar al caso de acciones mecánicas.

La novedad, para el caso de acciones térmicas, es el cálculo de los términos independientes. Los mismos se calculan a partir de consideraciones geométricas, pero también pueden obtenerse mediante el TTV.

El tema se ilustra mediante dos ejemplos sencillos.

Descensos de Apoyo: Ejemplo viga empotrada – apoyada



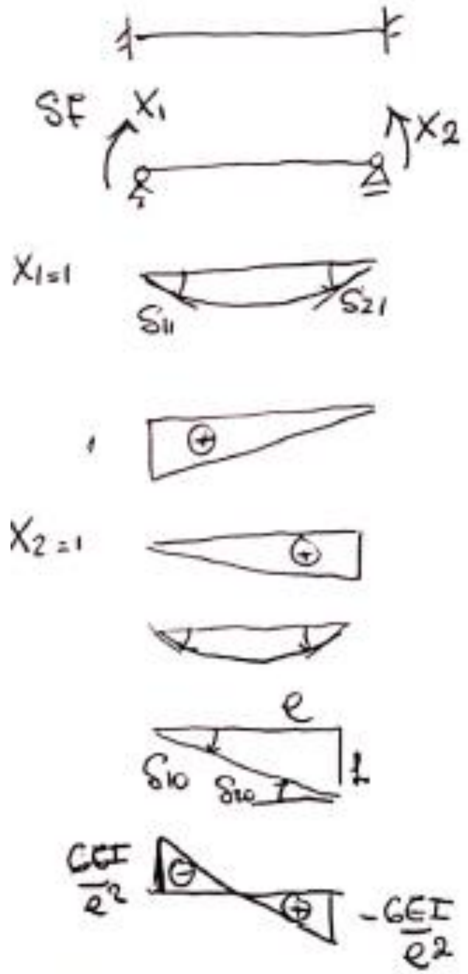
EI = conocido

$$\delta_{11} = \frac{\ell}{3EI}$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{1}{\ell} = \delta_{10}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\ell} + \frac{\ell}{3EI} X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{3EI}{\ell^2}$$

Descensos de Apoyo: Ejemplo viga empotrada – empotrada



$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{6EI}$$

$$\delta_{10} = -\delta_{20} = 1/l$$

$$\frac{1}{l} + \frac{l}{3EI} X_1 + \frac{l}{6EI} X_2 = 0$$

$$-\frac{1}{l} + \frac{l}{6EI} X_1 + \frac{l}{3EI} X_2 = 0$$

$$\frac{l}{3EI} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \frac{6EI}{l^2} \qquad X_1 = -\frac{6EI}{l^2}$$

Acciones térmicas

Las acciones térmicas provocan dilataciones o curvatura en las estructuras isostáticas, como se ha visto en la Unidad 2. En dicha unidad se analizó el trazado de elásticas de deformación y cálculo de desplazamientos mediante la aplicación del TTV.

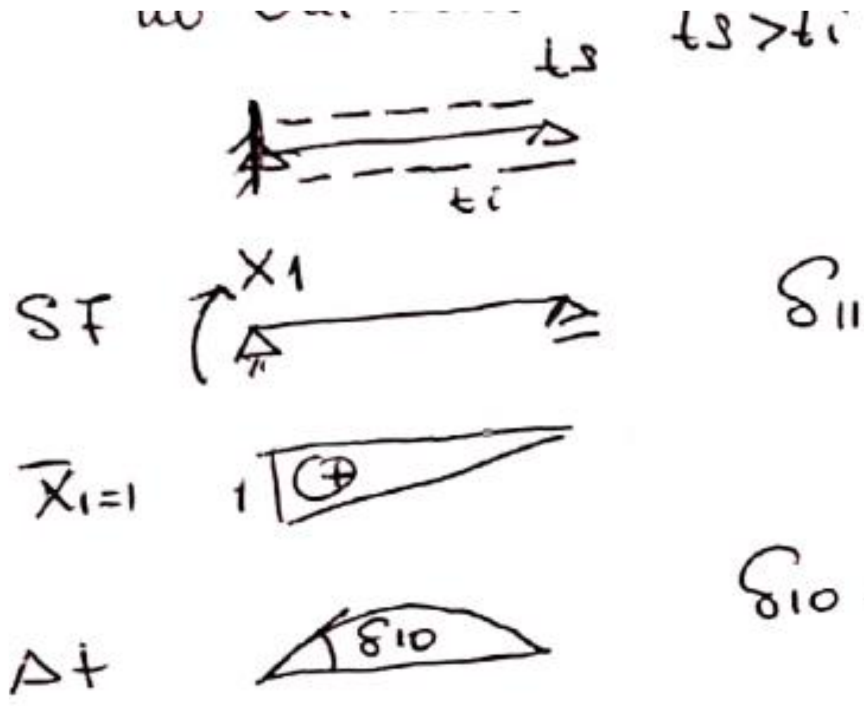
Para el caso de estructuras hiperestáticas, en general, los descensos de apoyos provocan esfuerzos internos en general.

Para calcular los esfuerzos en una estructura hiperestática debido a descensos en uno o más de sus apoyos, se aplica el Método de las Fuerzas de una manera similar al caso de acciones mecánicas.

La novedad, para el caso de acciones térmicas, es el cálculo de los términos independientes. Los mismos se calculan mediante el TTV.

El tema se ilustra mediante dos ejemplos sencillos.

Acciones térmicas: Ejemplo viga empotrada – apoyada



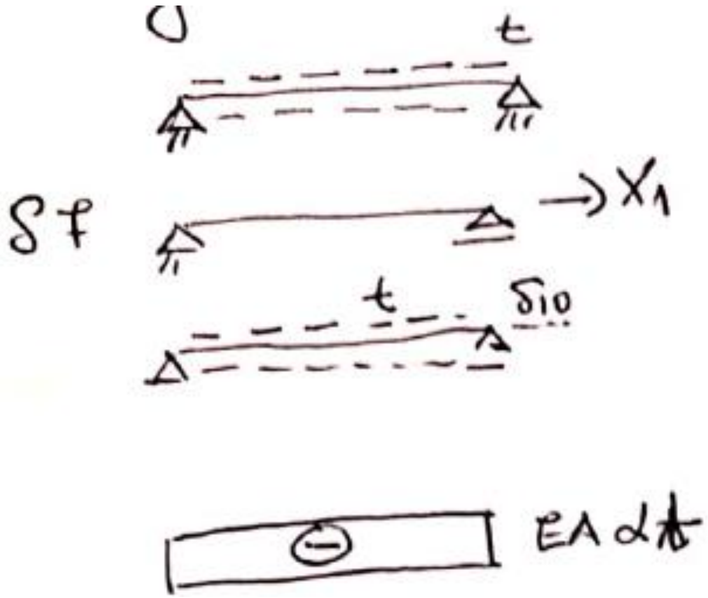
$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{10} = \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} \, dx = -\frac{\alpha \Delta t}{h} \frac{1}{2} 1 . l = -\frac{\alpha \Delta t \, l}{2h}$$

$$-\frac{\alpha \Delta t \, l}{2h} + \frac{l}{3EI} X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{3}{2} EI \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

Acciones térmicas: Ejemplo viga apoyada – apoyada



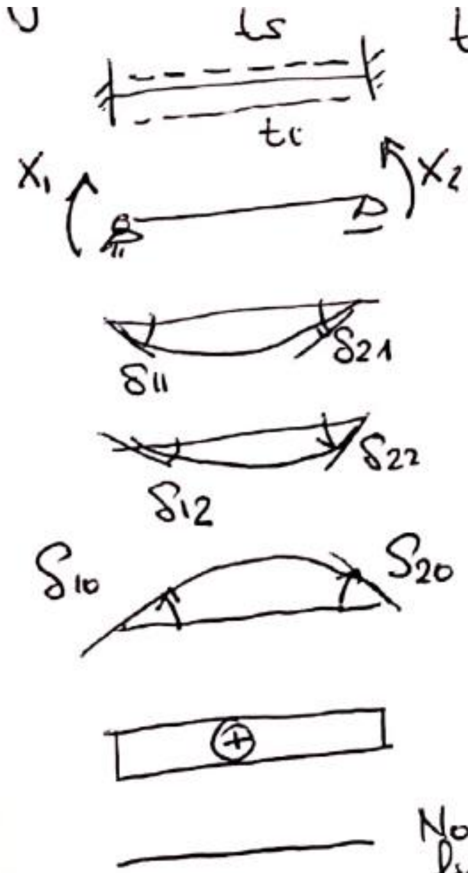
$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot 1 \cdot l}{EA}$$

$$\delta_{10} = \alpha\, t\, l$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \qquad \alpha\, t\, l + \frac{l}{EA} X_1 = 0$$

$$\therefore X_1 = -EA\,\alpha\, t$$

Acciones térmicas: Ejemplo viga empotrada – empotrada



ts > ti

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{\ell}{3EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\ell}{6EI}$$

$$\delta_{10} = \delta_{20} = -\frac{\alpha \Delta t\, \ell}{2h}$$

$$-\frac{\alpha \Delta t\, \ell}{2h} + \frac{\ell}{3EI} X_1 + \frac{\ell}{6EI} X_2 = 0$$

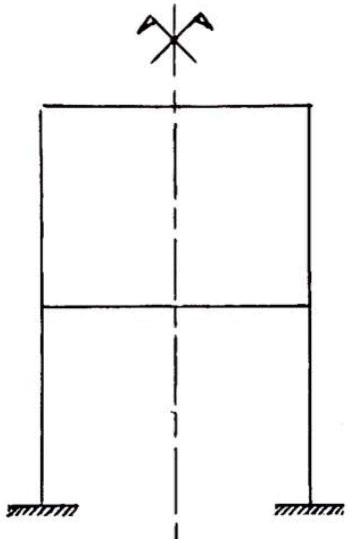
$$-\frac{\alpha \Delta t\, \ell}{2h} + \frac{\ell}{6EI} X_1 + \frac{\ell}{3EI} X_2 = 0$$

$$X_1 = X_2 = EI \frac{\Delta t\, \ell}{h}$$

No hay deformada final!

Simetría y Antisimetría

Muchas estructuras presentan uno o mas ejes de simetría. Por ejemplo:



Las estructuras que cumplen los requisitos para ser consideradas *simétricas* tienen la ventaja de poder descomponerse en la suma de otras dos: una estructura *simétrica* y otra *antisimétrica.*

Recordemos que la condición de simetría se cumple cuando luego de una reflexión a 180º alrededor del eje de simetría la mitad izquierda de la estructura coincide exactamente con la mitad derecha. La condición de simetría se verifica si, luego de la reflexión a 180º alrededor del eje de simetría, debe multiplicarse por -1 para que ambas mitades coincidan.

Conviene introducir el concepto de *Simetría Estructural*, la cual es combinación de:

I. *Simetría Geométrica*: relacionada con las dimensiones de la estructura y sus componentes.
II. *Simetría Mecánica*: relacionada con las propiedades del material y la simetría de vínculos.

Magnitudes Estructurales Simétricas y Antisimétricas

En el análisis estructural, como se puede ver mediante el diagrama de Tonti, se reconocen Magnitudes Estáticas, por ejemplo los esfuerzos característicos M, N, Q y Magnitudes Cinemáticas, por ejemplo los desplazamientos verticales, horizontales y las rotaciones, indicados respectivamente mediante v, u y θ.

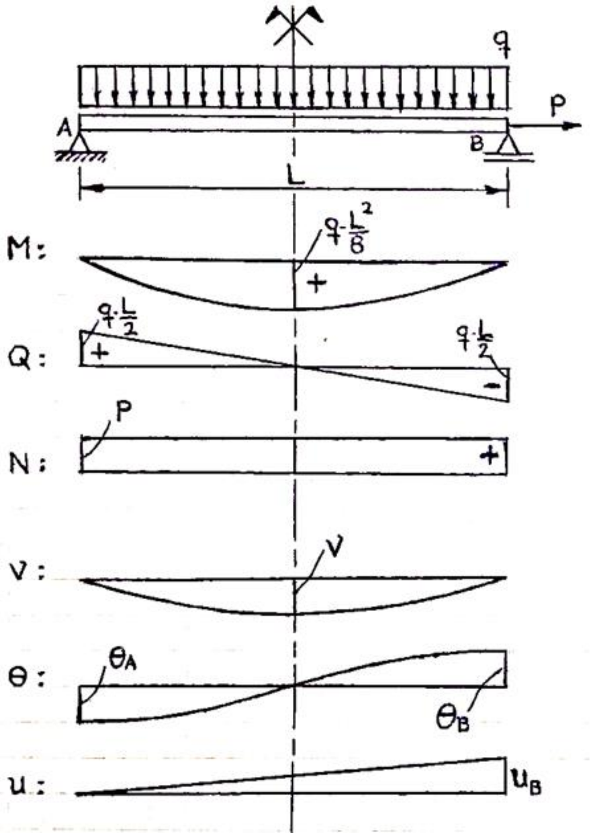
Estas magnitudes pueden clasificarse en simétricas y antisimétricas

I. Magnitudes Simétricas: poseen un valor no nulo, generalmente máximo, en el eje de simetría, para estructuras cargadas simétricamente. Tienen valor nulo en el eje de simetría de una estructura simétrica cargada antisimétricamente

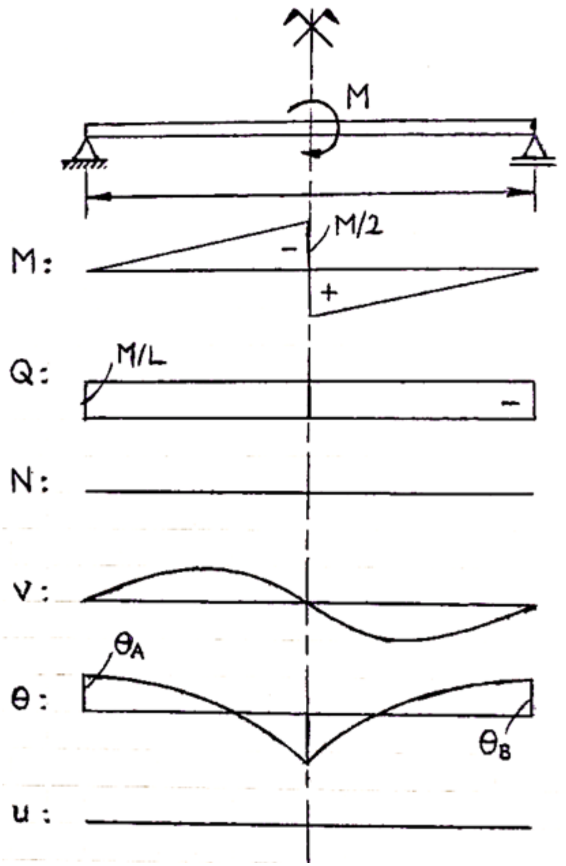
II. Magnitudes Antisimétricas: Toman un valor no nulo (generalmente máximo) en el eje de simetría para estructuras cargadas antisimétricamente. Tienen valor nulo en el eje de simetría de una estructura simétrica cargada simétricamente.

Magnitudes Estructurales Simétricas y Antisimétricas

Magnitudes simétricas

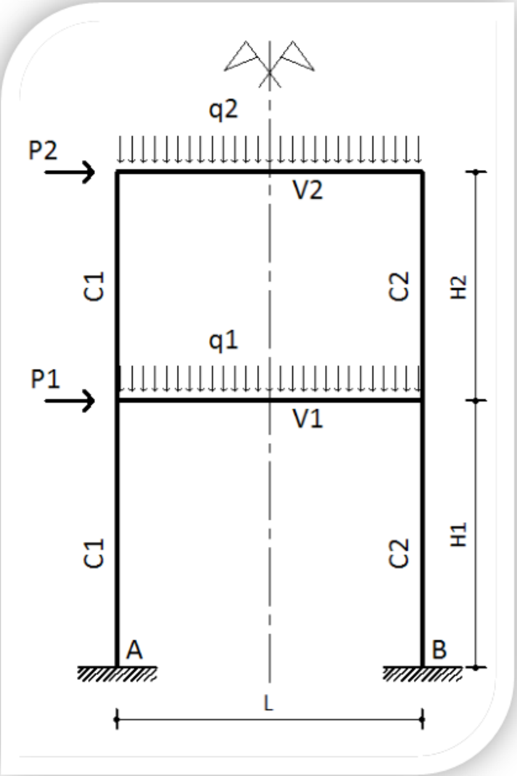


Magnitudes Antisimétricas



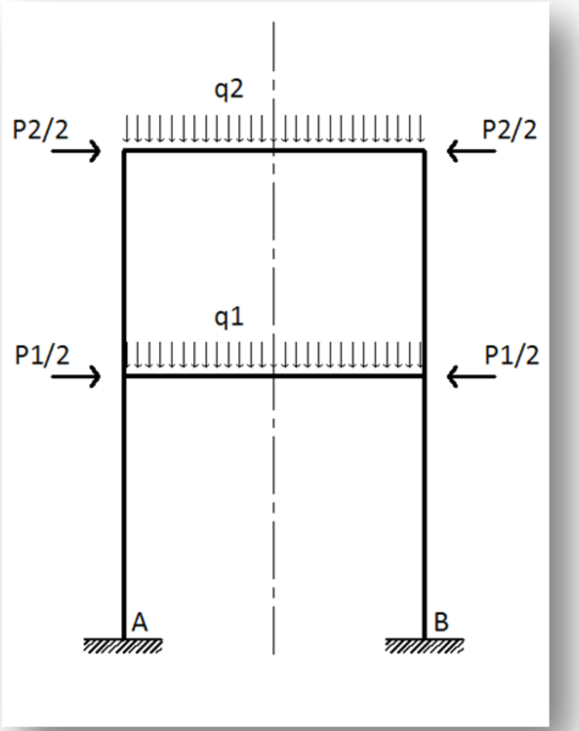
Luego, de la observación de los gráficos, surge que el Momento Flector M, el Esfuerzo Normal N y los ν son magnitudes simétricas. En cambio, el Esfuerzo de Corte Q, las Rotaciones θ y los Desplazamientos Axiales υ son magnitudes antisimétricas.

Descomposición de una Estructura en caso Simétrico y Antisimétrico



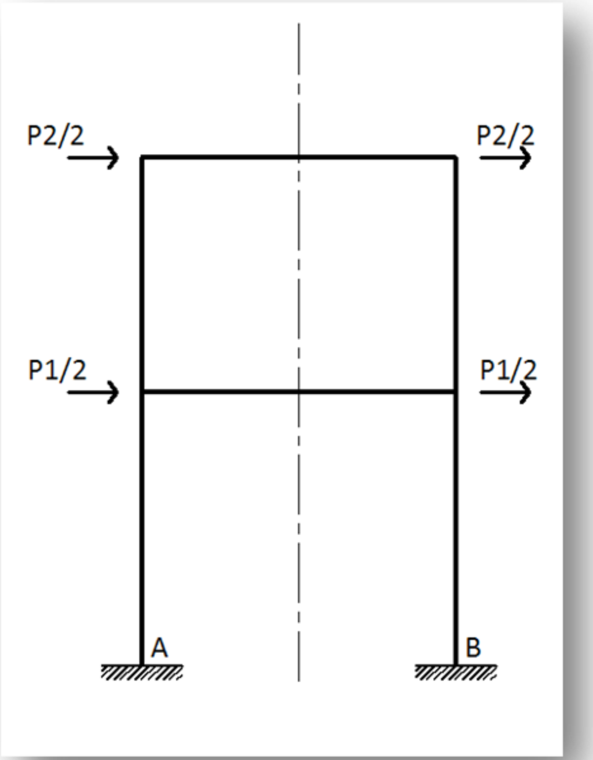
=

Simétrica



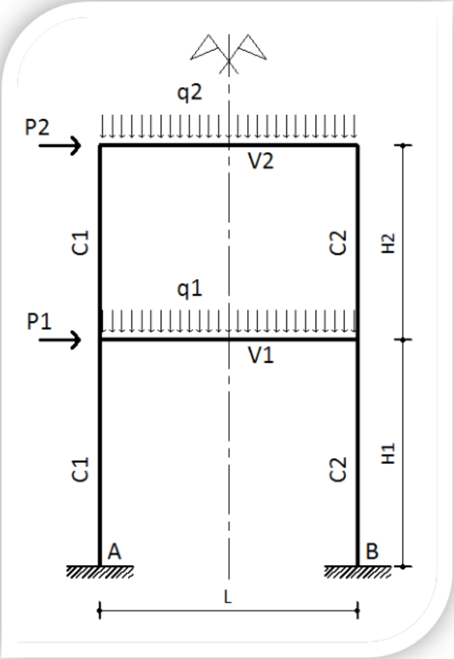
+

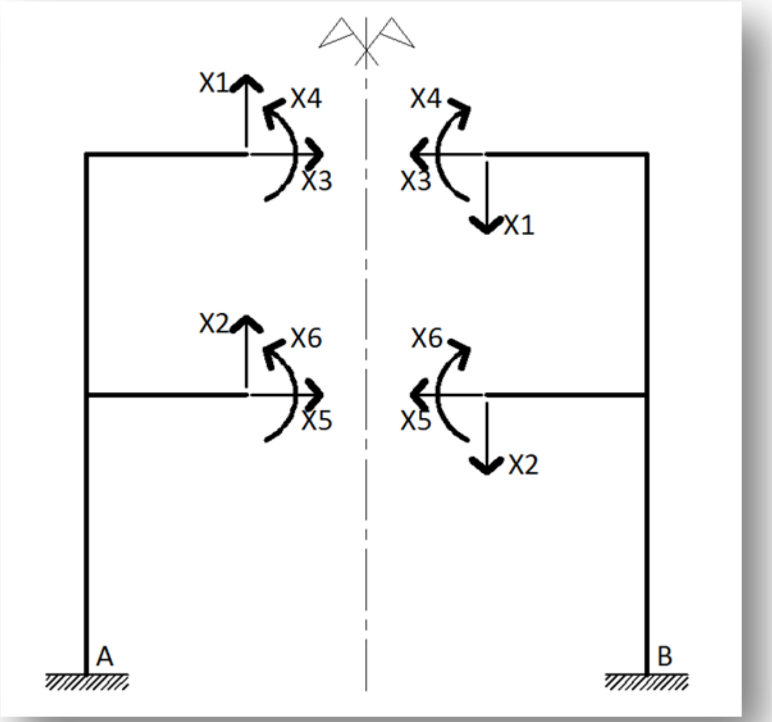
Antisimétrica



Identificación de Incógnitas simétricas y antisimétricas

La estructura posee un marco cerrados que debe abrirse, ya que no es posible identificar una sección a partir de la cual puedan trazarse los diagramas de los esfuerzos característicos para este tipo de marcos. Si se hace un corte en cada una de las vigas, se pondrán en evidencia seis incógnitas: los esfuerzos característicos M, N y Q para cada corte. Se denominan X_1 y X_2 a los esfuerzos de corte, X_3 y X_5 a los momentos flectores y X_4 y X_6 a los esfuerzos normales, respectivamente.



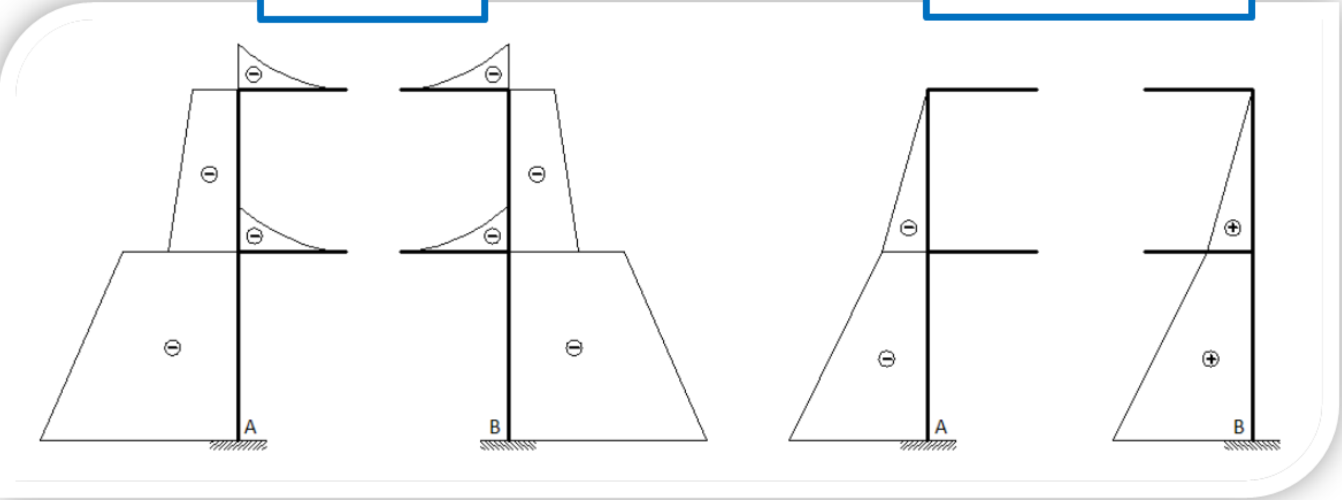


Los esfuerzos X_1 y X_2 son magnitudes antisimétricas y los esfuerzos X_3 a X_6 son magnitudes simétricas, de acuerdo al análisis antes realizado

Ejemplo de Diagramas. Casos Simétrico y Antisimétrico

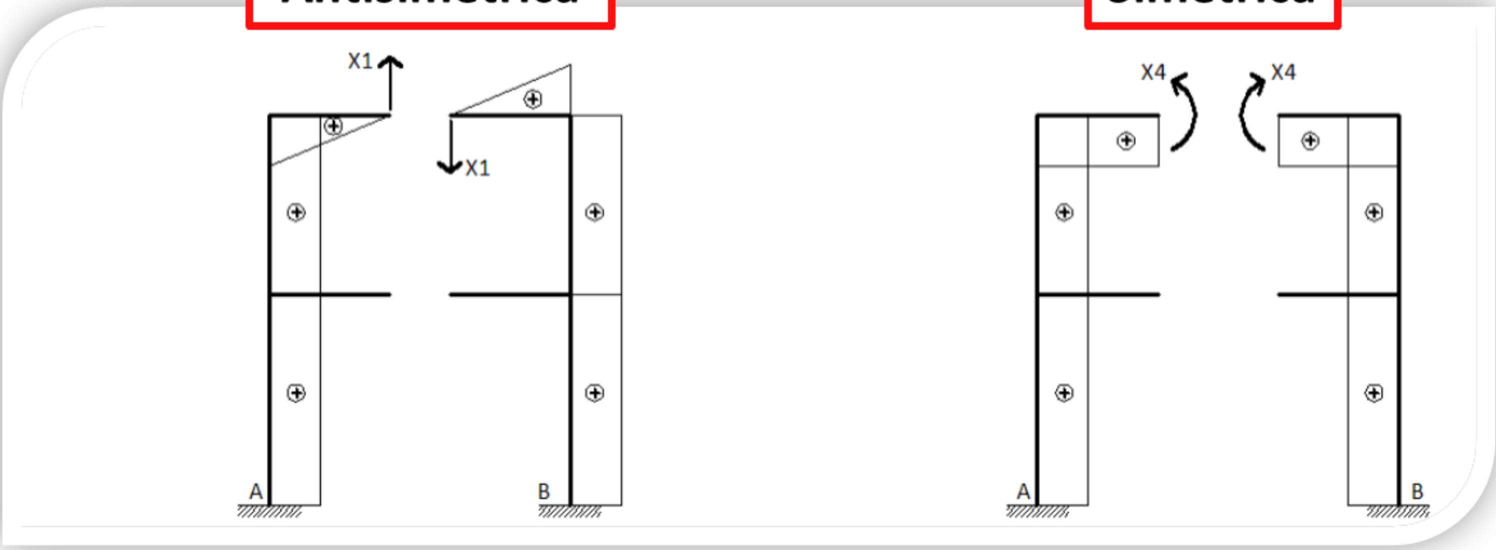
Simétrica **Antisimétrica**

Momento debido a las cargas



Antisimétrica **Simétrica**

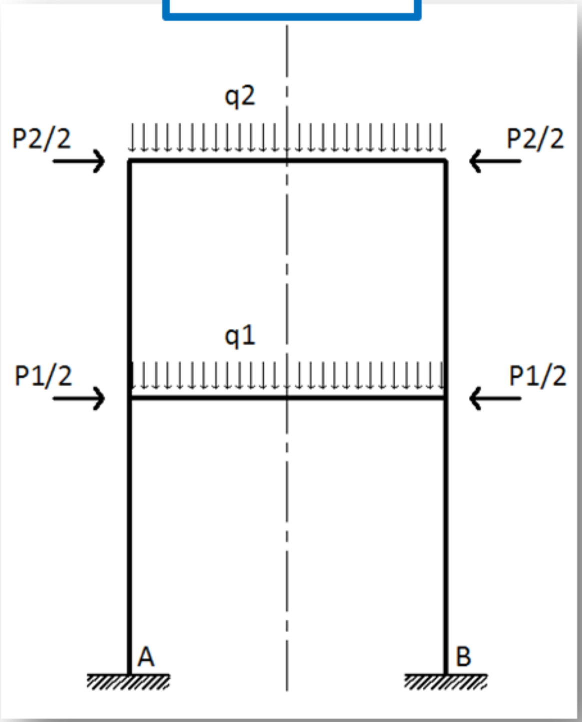
Momento debido a X_1



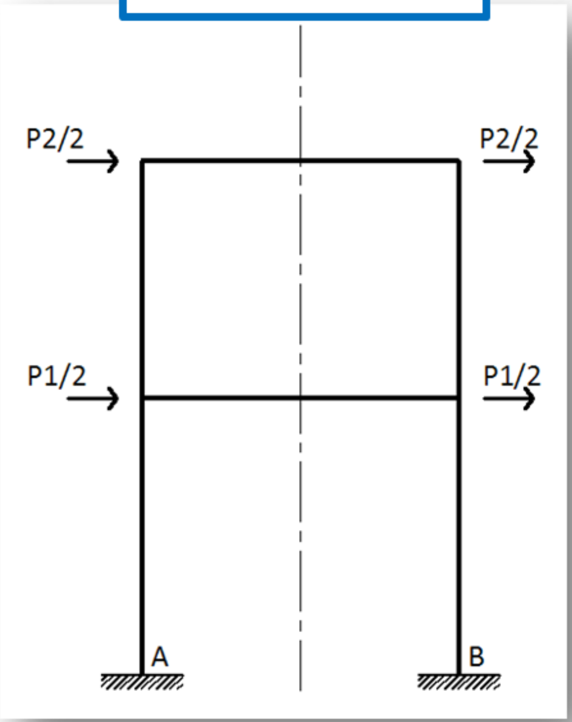
Momento debido a X_4

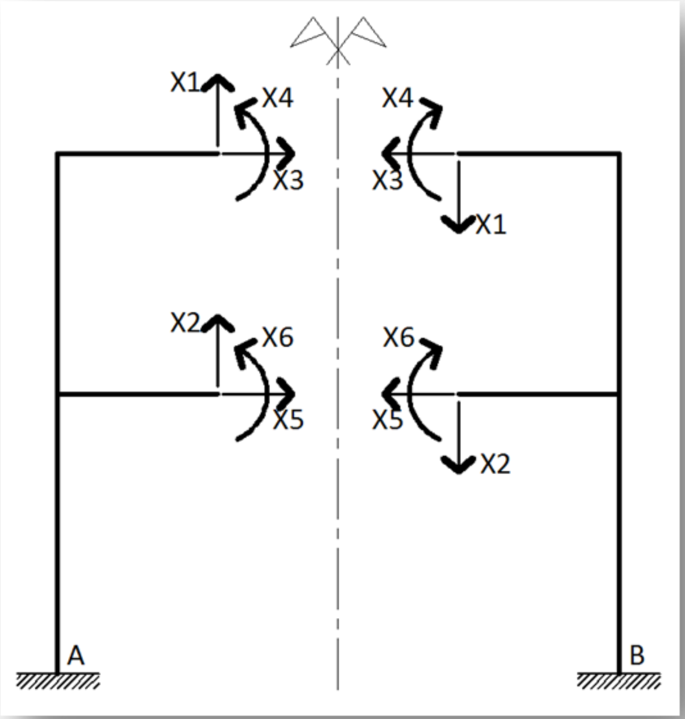
Cálculo de términos de carga y flexibilidades. Casos Simétrico y Antisimétrico

Simétrica



Antisimétrica





$\delta_{10} = \delta_{20} = 0$

$\delta_{30} = \ldots = \delta_{60} \neq 0$

$\delta 10 = \delta 20 \neq 0$

$\delta 30 = \ldots = \delta 60 = 0$

$\delta_{11} = \delta_{12} = \delta_{22} \neq 0$

$\delta_{13},\ldots,\delta_{16} = 0$

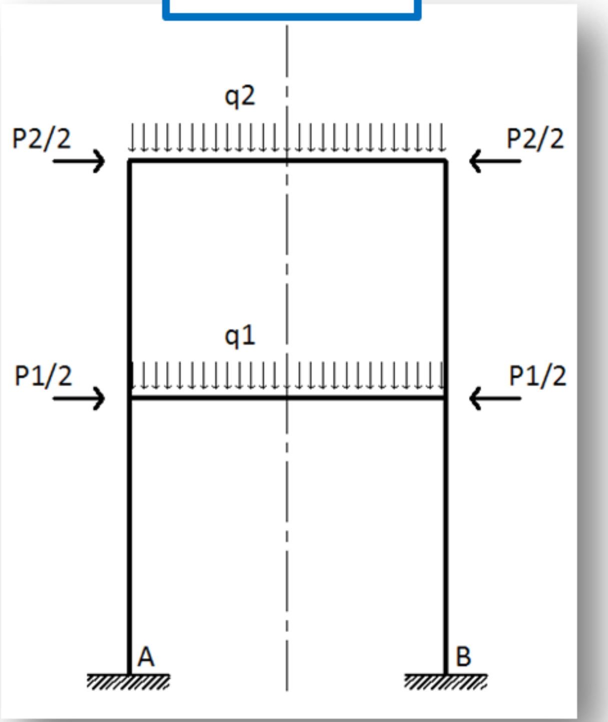
$\delta_{23},\ldots,\delta_{26} = 0$

$\delta_{33} = \ldots = \delta_{36} \neq 0$

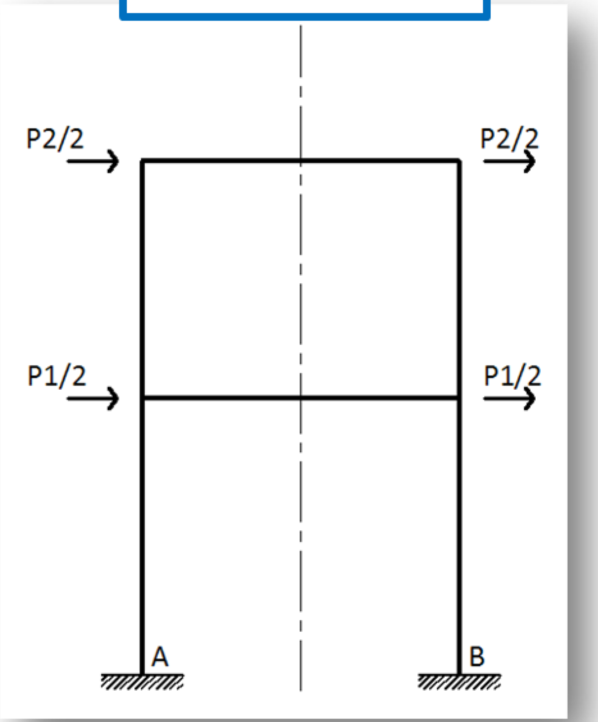
$\delta_{63} = \ldots = \delta_{66} \neq 0$

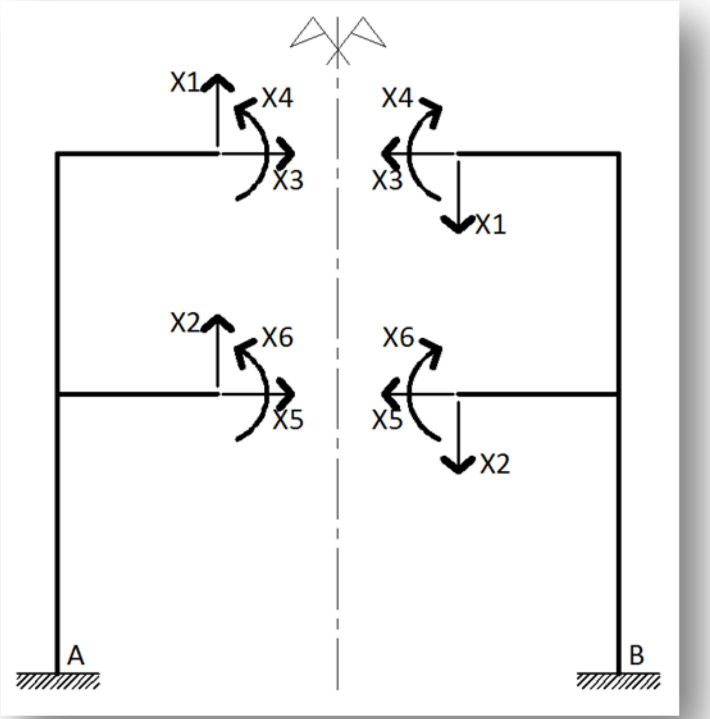
Sistema de Ecuaciones lineales. Casos Simétrico y Antisimétrico

Simétrica



Antisimétrica





$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0$$
$$\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0$$
$$\delta_{30} + \delta_{33} X_3 + \delta_{34} X_4 + \delta_{35} X_5 + \delta_{36} X_6 = 0$$
$$\ldots + \ldots + \ldots = 0$$
$$\delta_{60} + \delta_{63} X_3 + \delta_{64} X_4 + \delta_{65} X5 + \delta_{66} X_6 = 0$$