ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 3

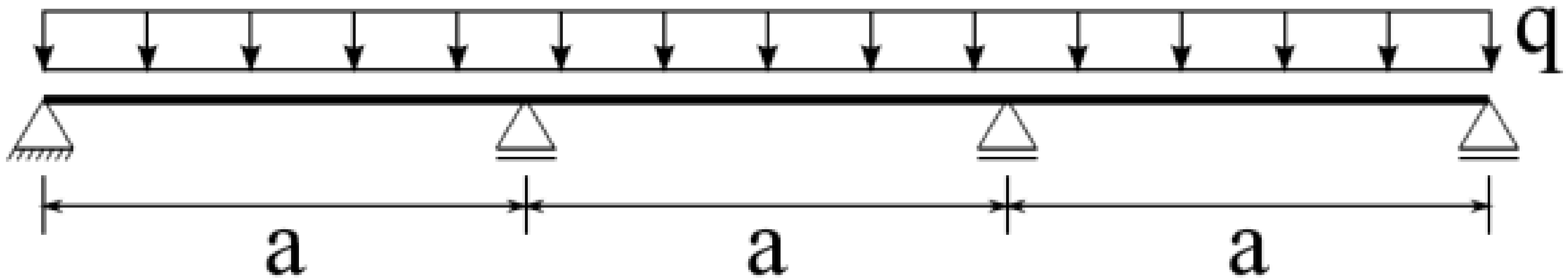
Resolución de problemas utilizando el Método de las Fuerzas – Problema 2

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

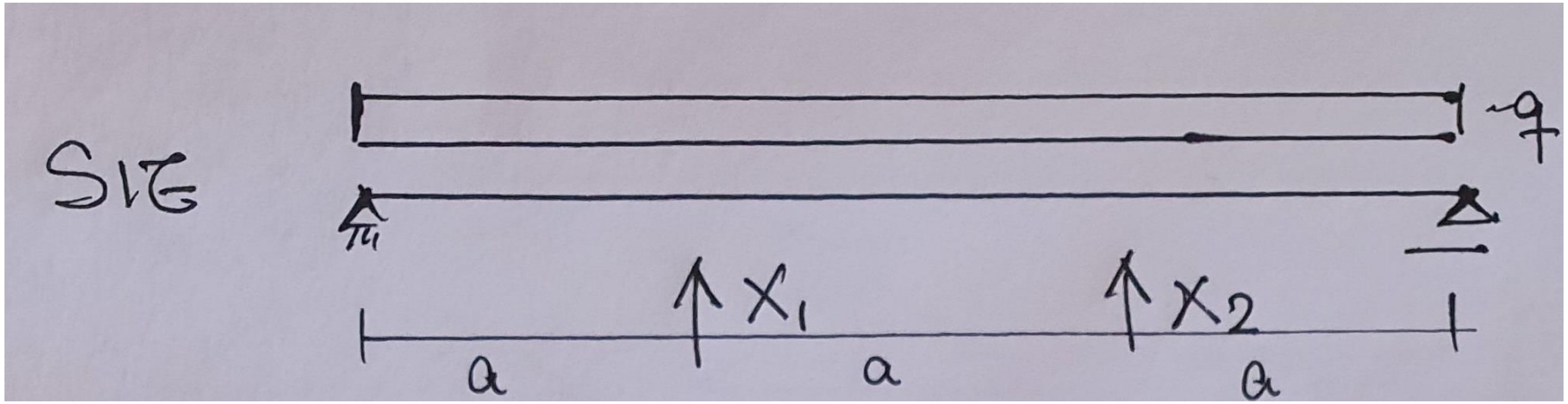
Abril de 2022

Resolución de una viga continua de tres tramos. Empleo del Método de las Fuerzas



El problema se ha resuelto en el ejemplo anterior utilizando una viga Gerber como SF. El GH es el mismo.

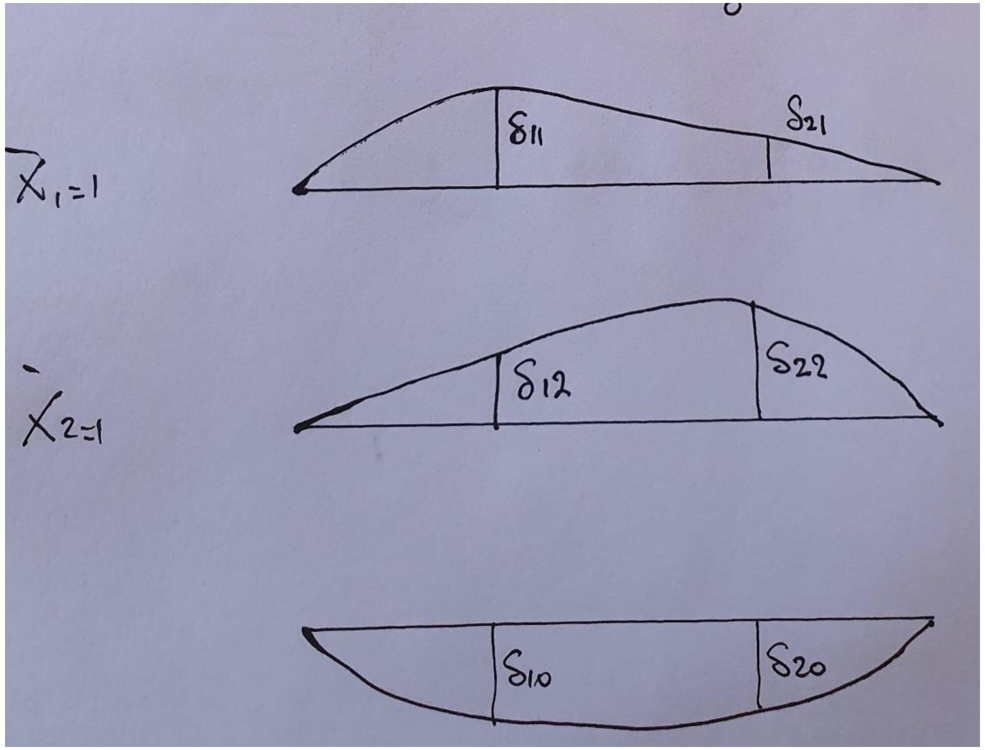
En este caso se eliminarán los apoyos móviles centrales. Las incógnitas X1 y X2 entonces son las reacciones de vínculo de los apoyos centrales.



Ecuaciones de Compatibilidad

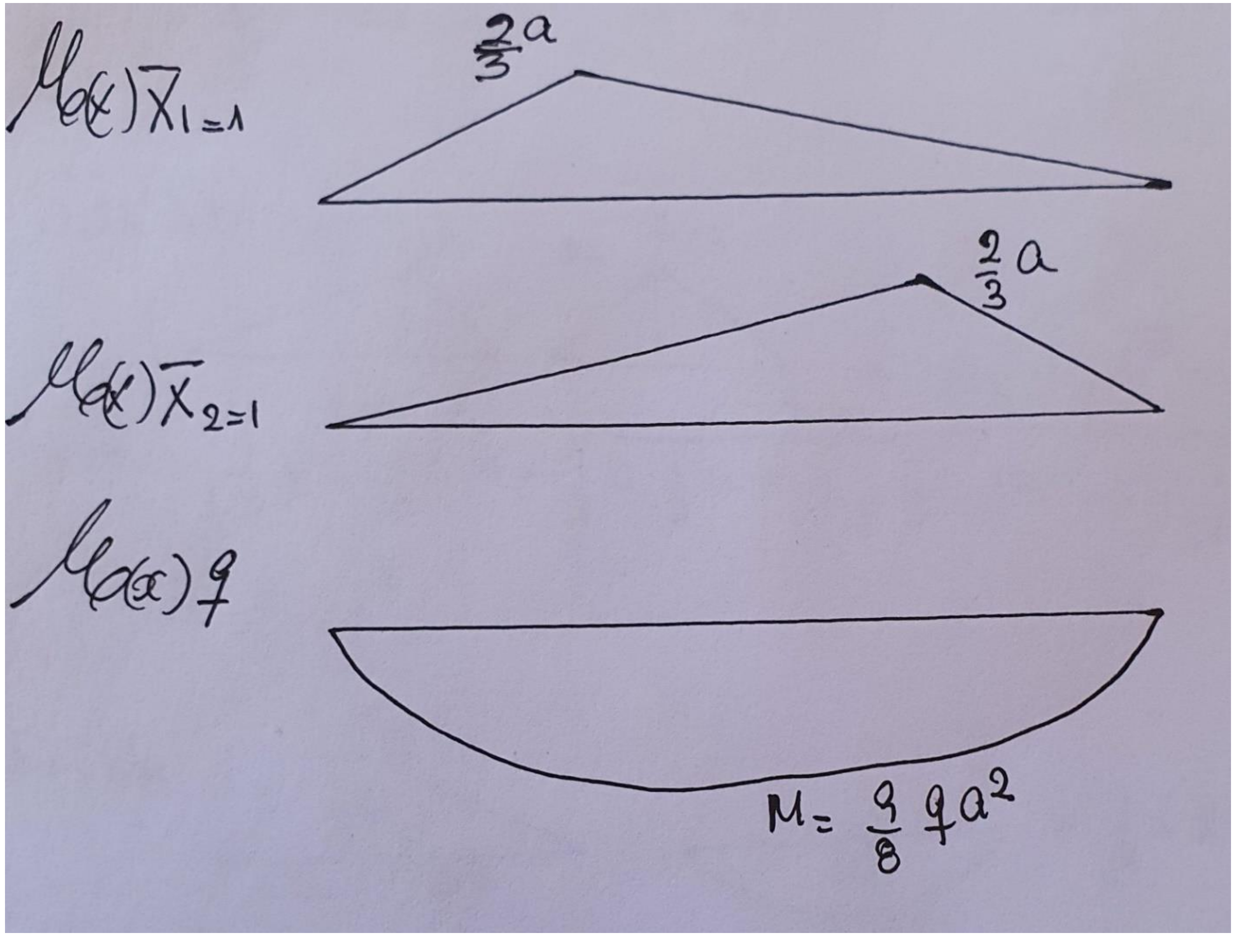
Al quitar los apoyos centrales B y C, aparecen desplazamientos en la dirección de dichos apoyos. Los mismos se deben eliminar para que la estructura se comporte como el sistema hiperestático original.

Vamos a llamar δ_{ij} a las flexibilidades y δ_{i0} a los términos independientes. Así δ_{11} representa el desplazamiento vertical del apoyo B, debido a una carga unitario X_1=1, δ_{12} el desplazamiento vertical de dicho apoyo, debido a una carga unitaria X_2=1 que actúa en la dirección del apoyo C y δ_{10} el desplazamiento del punto B debido a la carga q. Análogamente sucede lo mismo con δ_{22}, δ_{21} y δ_{20} en el apoyo C, debido a las incógnitas X_2=1, X_1=1 y las cargas, respectivamente.



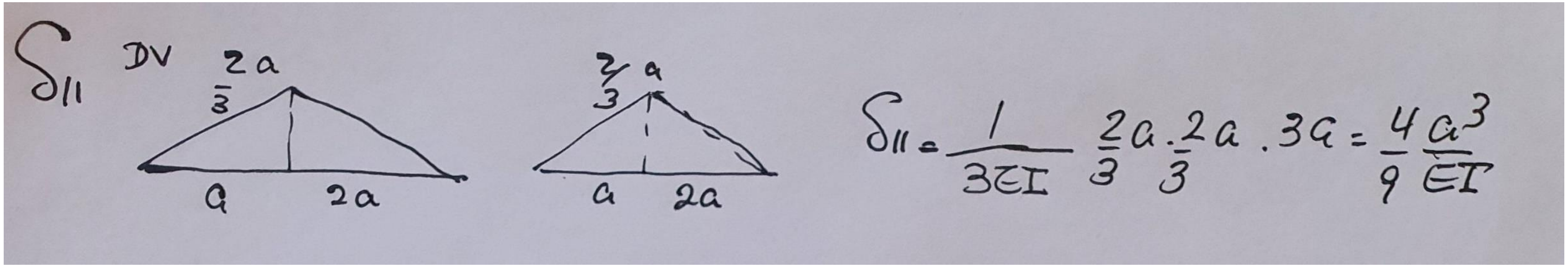
Cálculo de las flexibilidades y términos independientes

Para calcular las flexibilidades δ_{ij} y los términos independientes δ_{i0} se emplea el TTV. En primer lugar, debemos calcular los diagramas de momento para las cargas y las incógnitas unitarias, respectivamente.



Cálculo de las flexibilidades directas δ_{11} y δ_{22}

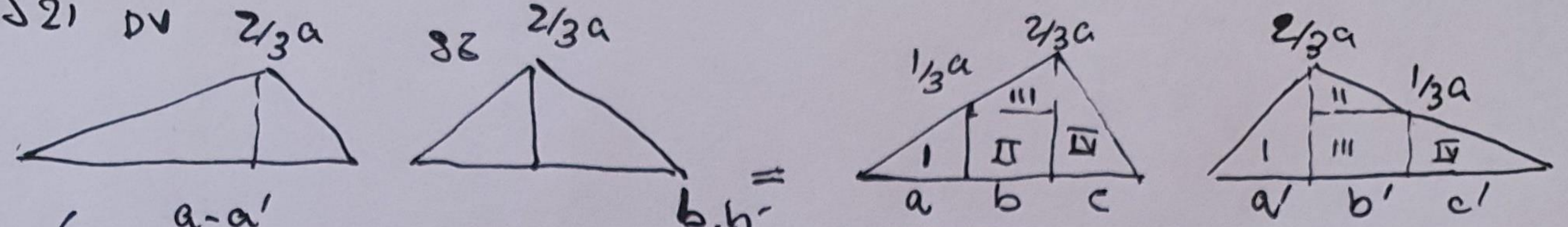
En este caso se debe calcular el desplazamiento δ_{11}en el punto B, debido a $X_1 = 1$. Entonces tanto la DV como el SE se deben a calcular para dicha carga unitaria. Luego se debe integrar el diagrama de Momentos debido a $X_1 = 1$ consigo mismo. Hay que destacar que los triángulos tienen el vértice en el tramo y no en uno de sus extremos, con lo cual se debe buscar el coeficiente en la tabla que resulta 1/3. También se puede dividir el triángulo en otros dos con el mismo vértice, el primero de longitud a y el segundo de longitud 2a y luego integrar los triángulos. Por razones de simetría ambas flexibilidades directas son iguales.



Cálculo de las flexibilidades cruzadas δ_{12} y δ_{21}

En este caso se debe calcular el desplazamiento δ_{11}en el punto B, debido a $X_1 = 1$. Entonces tanto la DV como el SE se deben a calcular para dicha carga unitaria. Luego se debe integrar el diagrama de Momentos debido a $X_1 = 1$ consigo mismo. Hay que destacar que los triángulos tienen el vértice en el tramo y no en uno de sus extremos, con lo cual se debe buscar el coeficiente en la tabla que resulta 1/3. También se puede dividir el triángulo en otros dos con el mismo vértice, el primero de longitud a y el segundo de longitud 2a y luego integrar los triángulos. Por razones de simetría ambas flexibilidades directas son iguales.

$\delta_{12} = \delta_{21}$



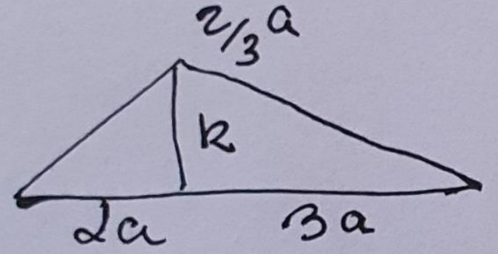
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{3}a \cdot \tfrac{2}{3}a\; a}_{a - a'} + \overbrace{\tfrac{1}{3}\,a\,\tfrac{1}{3}a\; a + \tfrac{1}{6}\,\tfrac{1}{3}a\,\tfrac{1}{3}a\; a + 2\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{3}a\,\tfrac{1}{3}a \cdot a}^{b.b'} + \underbrace{\tfrac{1}{3}\,\tfrac{2}{3}a\,\tfrac{1}{3}a\; a}_{c.c'}$$

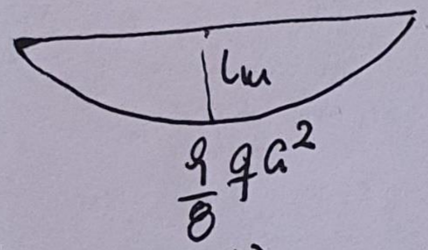
$$= \frac{7}{18}\frac{a^3}{EI}$$

Cálculo de los términos independientes δ_{10} y δ_{20}

En este caso se debe calcular los desplazamientos verticales δ_{10} en el apoyo B y δ_{20} en el apoyo C, debido a la carga uniforme q, que actúa como DV. El diagrama de Momentos correspondiente a la DV es una parábola de segundo grado a lo largo de toda la viga, cuyo valor máximo o flecha vale $\frac{9.q.a^2}{8}$. Los SE se basan en los diagramas de Momentos debidos a las cargas concentradas unitarias $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$, que actúan en la dirección de dichos apoyos. Notese que dichos diagramas son triangulares de valor $\frac{2.a}{3}$.

$\delta_{10} = \delta_{20}$





$$= \frac{1}{3}(1 + \alpha.\beta)\, \frac{lm.k.a}{EI} =$$

$\alpha = \frac{1}{3}$ $\beta = \frac{2}{3}$

$$= -\frac{1}{3EI}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\frac{2}{3}a\,\frac{9}{8}qa^2\, 3a = -\frac{11}{12}\frac{qa^4}{EI}$$

Cálculo de las incógnitas X_1 y X_2

Recordado las ecuaciones de compatibilidad:

$$\delta_{10} + \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 = 0$$

Si se reemplazan los valores obtenidos para las flexibilidades, se obtiene el Sistema de Ecuaciones Lineales y su solución

$$\frac{4}{9}\frac{a^3}{EI}X_1 + \frac{7a^3}{18EI}X_2 - \frac{11}{12}\frac{qa^4}{EI} = 0$$

$$\frac{7a^3}{18EI}X_1 + \frac{4}{9}\frac{a^3}{EI}X_2 - \frac{11}{12}\frac{qa^4}{EI} = 0$$

$$X_1 = X_2 = \frac{11}{10}qa$$

Observemos que los términos o flexibilidades cruzadas son iguales, luego la matriz es simétrica. Como ambos términos de carga son iguales, las dos incógnitas tienen el mismo valor. Este es un resultado que se debe a la simetría del problema, tema al cual volveremos más adelante.

Los valores de X_1 y X_2 son positivos ¿Porqué? Observe las elásticas para $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$y las cargas y ensaye una explicación.

Comparación de los problemas 1 y 2

El valor de las incógnitas X_1 y X_2, que son las reacciones de los apoyos centrales, es igual al de las reacciones de vínculo obtenidas en el cálculo del problema anterior, con lo cual se puede asegurar que ambos ejercicios, basados en dos Sistemas Fundamentales diferentes, conducen al mismo resultado. Para el segundo problema el diagrama de Momento flector final, que se puede obtener por superposición, se deja como tarea para el lector, así como trazar los diagramas de corte correspondientes.

Como se ha dicho en el primer párrafo se han utilizado dos Sistemas Fundamentales diferentes y el resultado del problema, como era esperable, es el mismo. Sin embargo, hay diferencias significativas en la solución de ambos ejercicios, que merecen algunos comentarios.

Los diagramas de momentos para X_1 , X_2 y q son muy simples para el caso del SF basado en la viga Gerber. Puede decirse que la viga Gerber *corta* los diagramas de Momentos, lo cual se debe a la presencia de las articulaciones. Luego las integrales son mucho más simples de calcular. Además, las incógnitas directamente dan el valor del momento flector en los puntos B y C.

Comparación de los problemas 1 y 2

La posible desventaja de elegir el SF basado en la viga Gerber es que los movimientos a compatibilizar son *giros relativos*, que por su novedad, puede presentar dificultades conceptuales para su comprensión.

El SF basado en eliminar los apoyos móviles centrales es intuitivo, y la compatibilidad de desplazamientos que se debe imponer se observa fácilmente. Los diagramas de Momento debidos a X_1 , X_2 y q, son relativamente fáciles de trazar, pero se extienden a lo largo de toda la luz de la viga simplemente apoyada del SF adoptado en este caso. Luego, se complica bastante la integración de los diagramas de momentos.

Las dificultades conceptuales que puede conllevar la elección de un SF basado en una viga Gerber, se compensa con creces con las ventajas de cálculo y, muy especialmente por el hecho que las incógnitas directamente brindan valores del diagrama de momentos flectores final, que es uno de los resultados buscados.