



# ANALISIS ESTRUCTURAL I

## *Unidad 4*

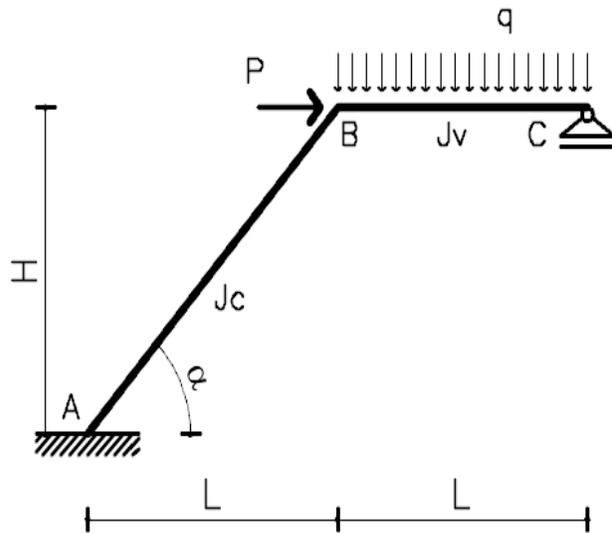
*Resolución de problemas utilizando el Método de los Desplazamientos - Problemas 11-12*

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,  
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo  
Abril de 2022

# Introducción y requisitos previos para el cálculo de estructuras con barras inclinadas

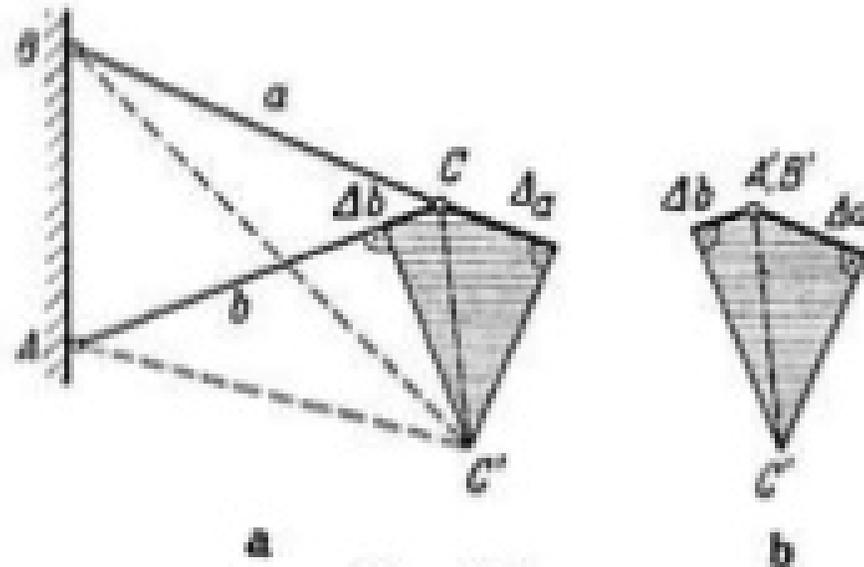
Por ejemplo, dada una estructura como la de la figura, que corresponde al problema 11, la resolución mediante el Método de los Desplazamientos plantea requisitos previos:



1. Conocer los pasos de resolución del Método de Desplazamientos
2. Plantear correctamente el equilibrio de nudos (Recordemos estructuras reticuladas)
3. Utilizar diagramas de Willot (Estabilidad I) para compatibilizar desplazamientos nodales

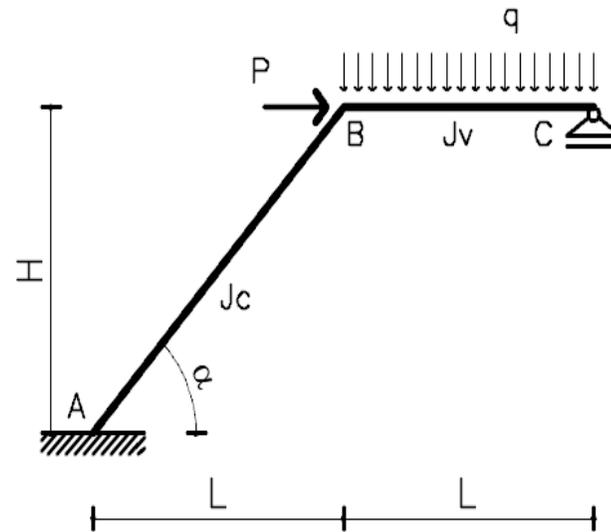
# Introducción y requisitos previos para el cálculo de estructuras con barras inclinadas: Diagrama de Willot

El Diagrama de Willot, que seguramente se enseñó en Estabilidad I, es una construcción gráfica que permite conocer el movimiento de las barras que concurren a un nudo cuando se conoce el movimiento del mismo, o viceversa. Actualmente su validez se basa en ser un esquema de análisis muy útil, pero los cálculos son analíticos.



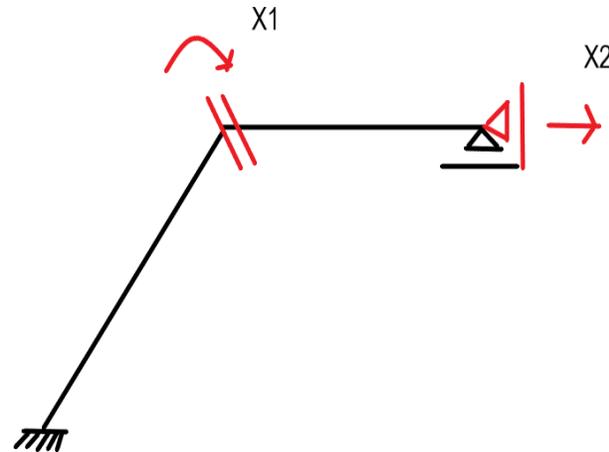
# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

En la figura se muestra la estructura a resolver por el Método de los Desplazamientos



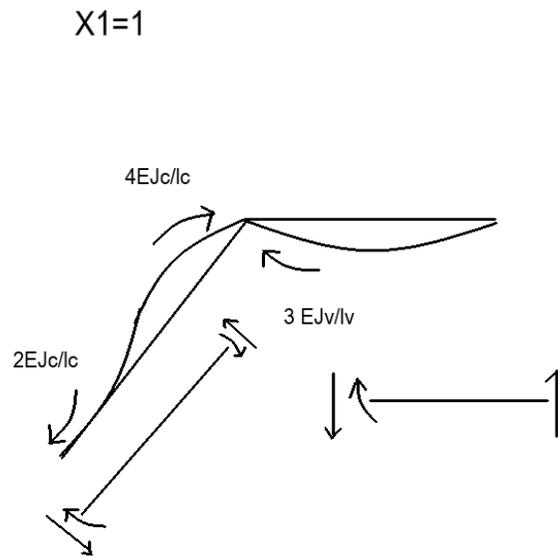
# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

El problema tiene dos incógnitas cinemáticas: el giro en el nudo y el desplazamiento de piso, que se denominan  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente. Para bloquear dichos movimientos se imponen un empotramiento móvil y un apoyo móvil, como se indica en la figura:



# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

Para calcular las rigideces  $r_{11}$  y  $r_{21}$  se impone un giro unitario  $\bar{X}_1 = 1$  cómo se indica en la figura:



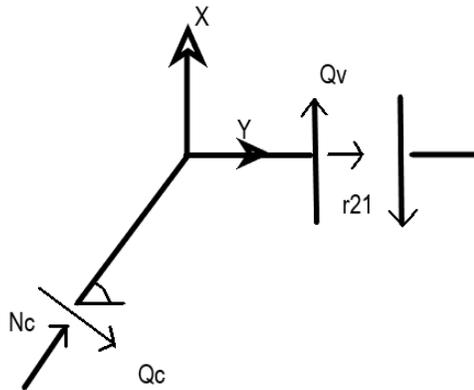
$$r_{11} = \frac{4 E J_c}{l_c} + \frac{3 E J_v}{l_v}$$

$$Q_c = \frac{1}{l_c} \left( \frac{4 E J_c}{l_c} + \frac{2 E J_c}{l_c} \right) = \frac{6 E J_c}{l_c^2}$$

$$Q_v = \frac{1}{l_v} \left( \frac{3 E J_v}{l_v} \right) = \frac{3 E J_v}{l_v^2}$$

# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

El cálculo de  $r_{21}$ , reacción en el apoyo móvil debido a un un giro unitario  $\bar{X}_1 = 1$  requiere plantear el equilibrio de nudo a la traslación:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_c \cos \alpha + Q_c \sin \alpha + r_{21} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_c \sin \alpha - Q_c \cos \alpha + Q_v = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$r_{21} = \frac{1}{\sin \alpha} (Q_v \cos \alpha - Q_c)$$

Teniendo en cuenta los valores de  $Q_c$  y  $Q_v$  ya calculados resulta:

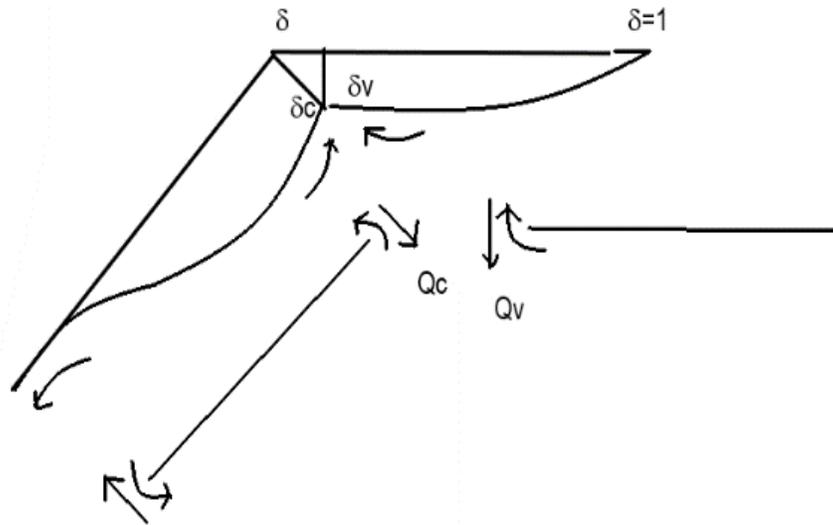
$$r_{21} = \frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{3 E J_v}{l_v^2} \cos \alpha - \frac{6 E J_c}{l_c^2} \right)$$

# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

Para calcular las rigideces  $r_{12}$  y  $r_{22}$  cómo se indica en la figura:

se impone un desplazamiento unitario  $\bar{X}_2 = 1$

X2=1



$$M_V = \frac{3 E J_V \delta_V}{l_V^2} \quad ; \quad Q_V = \frac{3 E J_V \delta_V}{l_V^3}$$

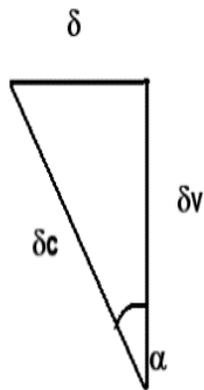
$$M_C = \frac{6 E J_C \delta_C}{l_C^2} \quad ; \quad Q_V = \frac{12 E J_C \delta_C}{l_C^3}$$

Los pares y cortes extremos de pieza están planteados en función de  $\delta_V$  y  $\delta_C$  movimientos extremos de pieza de la viga y de la columna, que se calculan en función del movimiento  $\bar{X}_2 = 1 = \delta$ , mediante un diagrama de Willot.

# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

Para conocer el valor de los pares y cortes extremos de pieza es necesario calcular los movimientos  $\delta_v$  y  $\delta_c$  de los extremos de la viga y de la columna, que concurren al nudo, en función del movimiento  $\bar{X}_2 = 1 = \delta$ .

Para ello se construye un diagrama de Willot, a manera de figura de análisis.



$$\delta_c = \frac{\delta}{\text{sen } \alpha}$$
$$\delta_v = \delta \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

Conocidos los pares y fuerzas extremas de pieza y los movimientos del extremo de pieza, pueden calcularse las rigideces  $r_{12}$  y  $r_{22}$

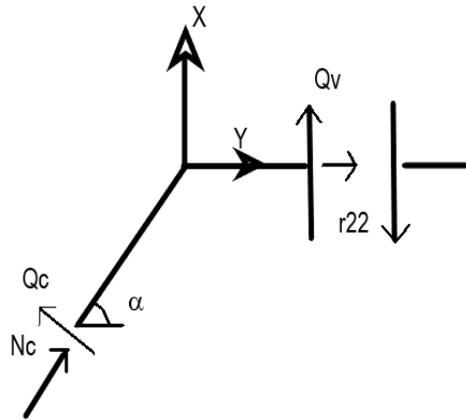
$$r_{12} = \frac{3 E J_v \delta_v}{l_v^2} - \frac{6 E J_c \delta_c}{l_c^2} = \frac{3 E J_v}{l_v^2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{6 E J_c}{l_c^2} \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$r_{12} = \frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{3 E J_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6 E J_c}{l_c^2} \right)$$

Es importante destacar que el valor obtenido para  $r_{12}$  es idéntico al calculado antes para  $r_{21}$

# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

El cálculo de la rigidez  $r_{22}$  se realiza de manera similar al de la rigidez  $r_{21}$ . También en este caso es necesario recurrir al equilibrio a la traslación del nudo, cuyo esquema se observa en la figura



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_c \cos \alpha - Q_c \operatorname{sen} \alpha + r_{22} = 0$$

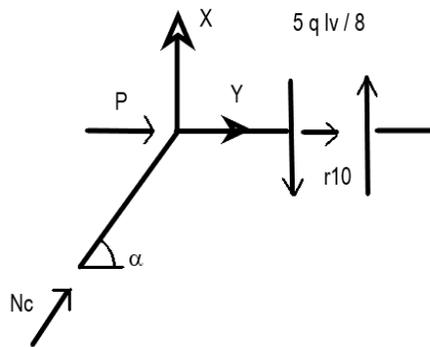
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_c \operatorname{sen} \alpha + Q_c \cos \alpha + Q_v = 0$$

$$r_{22} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} (Q_c + Q_v \cos \alpha)$$

$$r_{22} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \left( \frac{3 E J_v}{l_v^3} \cos^2 \alpha + \frac{12 E J_c}{l_c^3} \right)$$

# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

El término independiente  $r_{10}$  es igual al valor del momento de empotramiento, en una viga empotrada articulada, sometida a carga repartida uniforme:  $r_{10} = -q \frac{l_v^2}{8}$ . El cálculo de  $r_{20}$  requiere de un análisis similar al desarrollado para calcular  $r_{21}$  y  $r_{22}$ . Recordemos que las cargas, en el Sistema Fundamental del Método de los Desplazamientos se aplican sobre la estructura sin deformar. Dado que en la columna inclinada no actúan cargas, resulta  $Q_c = 0$ .



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_c \cos \alpha + P + r_{20} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_c \sin \alpha - R_v = 0$$

$$r_{20} = -\left( R_v \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + P \right)$$

# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

Con todas las rigideces y términos independientes calculados se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio. La primera ecuación, que expresa la nulidad de la reacción del empotramiento móvil expresa:

$$- q \frac{l_v^2}{8} + \left( \frac{4 E J_c}{l_c} + \frac{3 E J_v}{l_v} \right) X_1 + \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left( \frac{3 E J_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6 E J_c}{l_c^2} \right) X_2 = 0$$

La segunda ecuación, teniendo en cuenta que  $R_v = \frac{5}{8} q l_v$ , expresa la nulidad de la reacción del apoyo móvil:

$$-\left( \frac{5}{8} q l_v \cotg \alpha + P \right) + \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left( \frac{3 E J_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6 E J_c}{l_c^2} \right) X_1 + \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \left( \frac{3 E J_v}{l_v^3} \cos^2 \alpha + \frac{12 E J_c}{l_c^3} \right) X_2 = 0$$

# P11 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

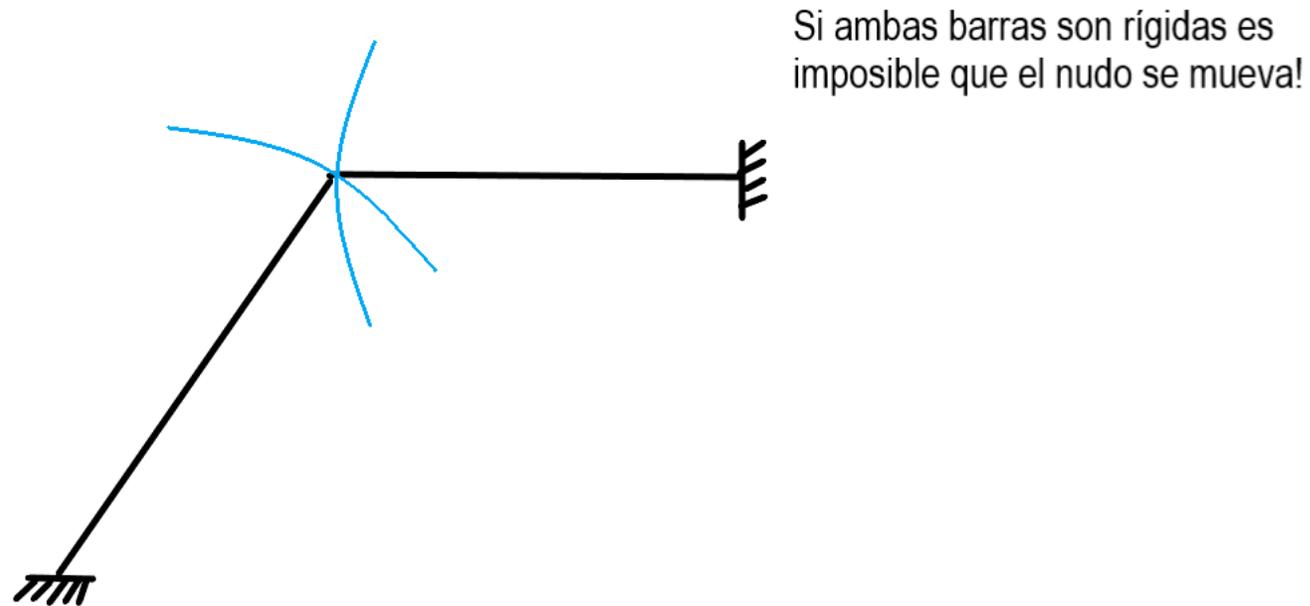
El sistema de ecuaciones lineales puede escribirse también en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -q \frac{l_v^2}{8} \\ -\left(\frac{5}{8} q l_v \cotg \alpha + P\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{4 E J_c}{l_c} + \frac{3 E J_v}{l_v}\right) \\ \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left(\frac{3 E J_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6 E J_c}{l_c^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left(\frac{3 E J_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6 E J_c}{l_c^2}\right) \\ \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \left(\frac{3 E J_v}{l_v^3} \cos^2 \alpha + \frac{12 E J_c}{l_c^3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pueden asignarse valores a los momentos de inercia, longitudes, cargas, etc. para resolver el sistema. Una vez conocidas las incógnitas el trazado de los diagramas de esfuerzos característicos se realiza de la forma vista en clase y en los ejercicios previos.

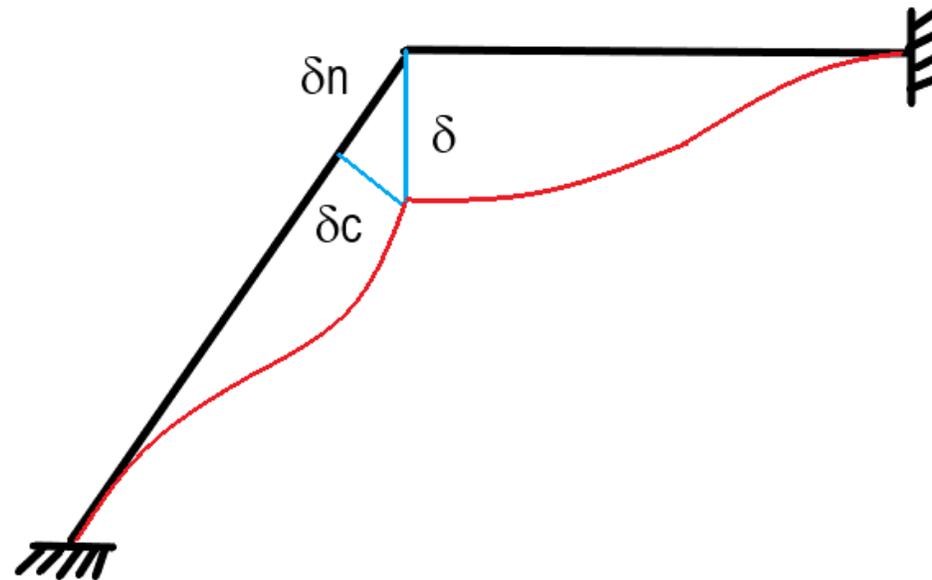
# P12 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

El problema tiene, en este caso dos empotramientos. Si ambas barras son axialmente rígidas o indeformables, el nudo no puede moverse. Debería hacerlo simultáneamente por dos curvas distintas, lo que resulta imposible.



# P12 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

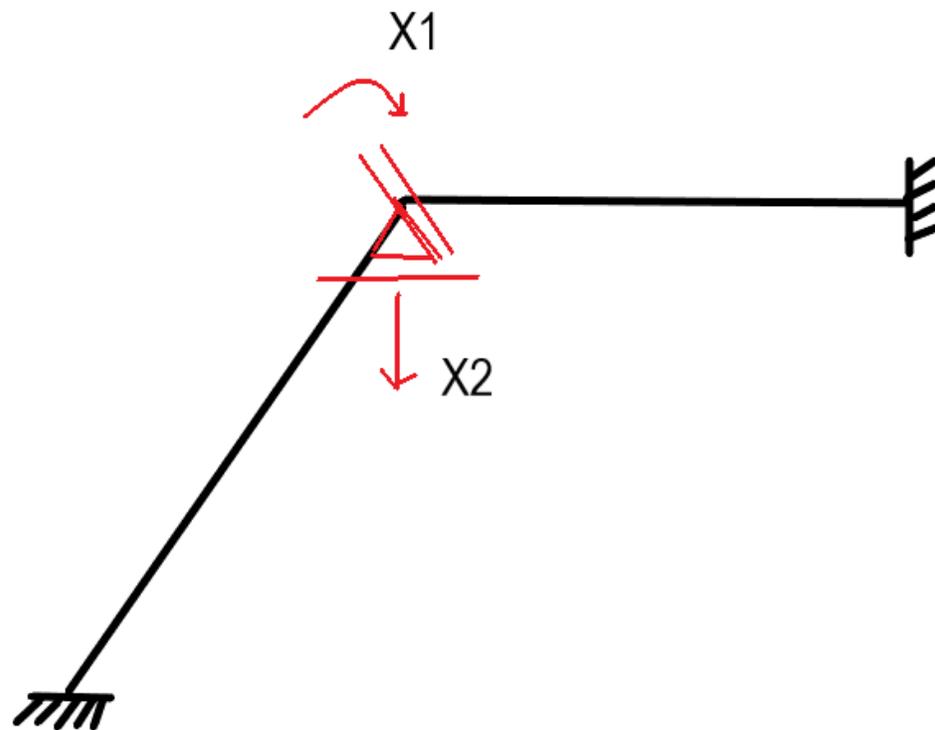
Sin embargo, cuando la barra inclinada es axialmente deformable, como indica el enunciado, el nudo se puede mover en forma vertical (la viga es axialmente indeformable).



Si la barra inclinada es axialmente deformable, entonces el nodo puede moverse perpendicular a la viga (la misma es axialmente rígida). La columna, entonces se acorta y gira. Luego tiene dos movimientos: uno longitudinal  $\delta_n$  y otro transversal  $\delta_c$

# P12 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

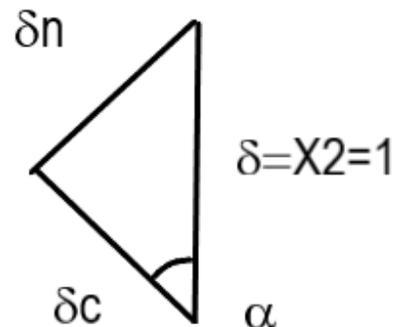
Luego las incógnitas cinemáticas son el giro en el nudo y el desplazamiento vertical del mismo. Colocando un empotramiento y un apoyo móvil, respectivamente, para bloquear dichos movimientos, se obtiene el Sistema Fundamental.



# P12 -Resolución de un pórtico con columna inclinada

También en este caso resulta útil el diagrama de Willot que permite calcular los movimientos de la barra inclinada para el desplazamiento unitario del nudo. Donde  $\delta_c$  y  $\delta_n$  indican los movimientos en la dirección transversal y longitudinal de la barra inclinada, respectivamente. El primero causa flexión y corte y el segundo esfuerzo normal.

Considerando que  $\delta = 1$  resulta:



$$\delta_c = \cos \alpha$$

$$\delta_n = \sen \alpha$$

# Discusión de resultados

El planteo y solución de los pórticos con barras inclinadas sigue los pasos ya visto del Método de los desplazamientos.

El análisis cinemático, en algunos casos, requiere más cuidado que en las estructuras con barras horizontales y/o verticales.

La consideración de la hipótesis de rigidez axial es fundamental para determinar los grados de libertad de una estructura. Ver el caso del problema 12.

En el cálculo de rigideces asociadas a apoyos móviles es necesario plantear el equilibrio a la traslación de los nudos a los cuales concurren las barras inclinadas.

Los diagramas de Willot son muy útiles como figura de análisis para visualizar la compatibilidad de desplazamientos y, a partir de los movimientos unitarios, calcular otros movimientos de interés.

Se mantiene la validez de un comentario previo: siempre que resulte posible es preferible, en ejemplos sencillos como los vistos, dejar expresados los resultados en función de los datos del problema ( $E$ ,  $I$ ,  $a$ ,  $Dt$ ,  $h$ , etc.). En este caso es recomendable hacerlo así.