



ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 4

Método de los Desplazamientos – parte 1

Dr. Ing. Carlos García Garino

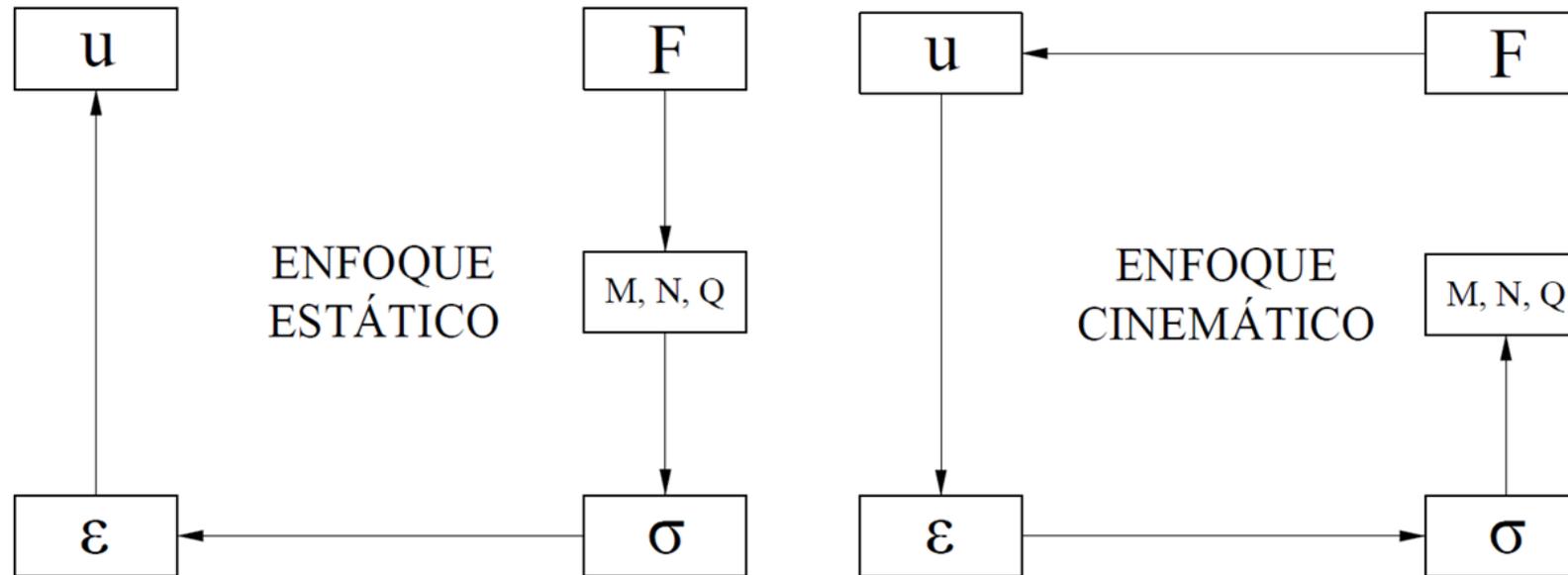
Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
Abril de 2022

Temario

1. Enfoque estático vs Enfoque cinemático
2. Cinemática Estructural
3. Método de los Desplazamientos
4. Ejemplos de Aplicación

Método de los Desplazamientos

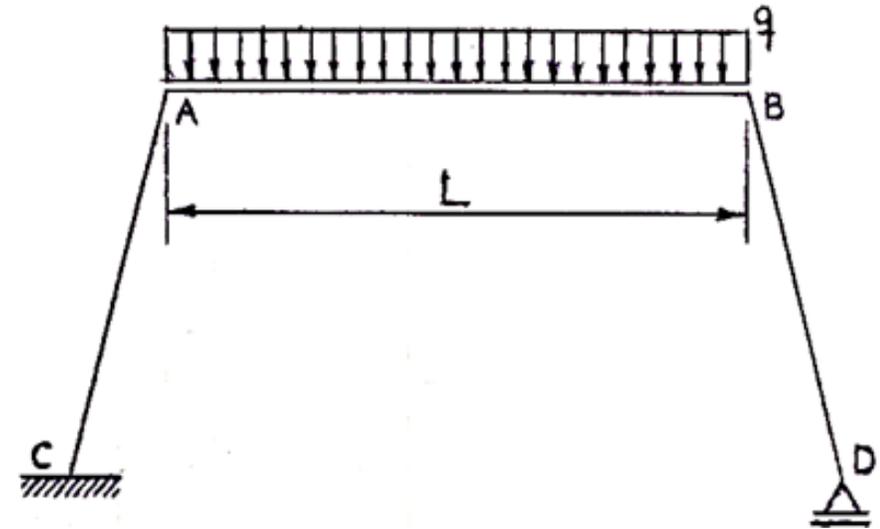
1. Enfoque estático vs Enfoque cinemático



Método de los Desplazamientos

2. Cinemática Estructural

- i. Todas las barras que concurren al nudo tienen la misma rotación que el nudo al cual concurren.
- ii. Los desplazamientos extremos de pieza deben ser iguales a los desplazamientos del nudo al cual concurren las barras.
- iii. Existen ciertos desplazamientos, denominados variables cinemáticas independientes, en función de los cuales pueden expresarse las demás.
- iv. Generalmente en la práctica se hace uso de la Hipótesis de Rigidez Axil, que establece que la deformación en la dirección del eje de las piezas es despreciable frente a otros movimientos.

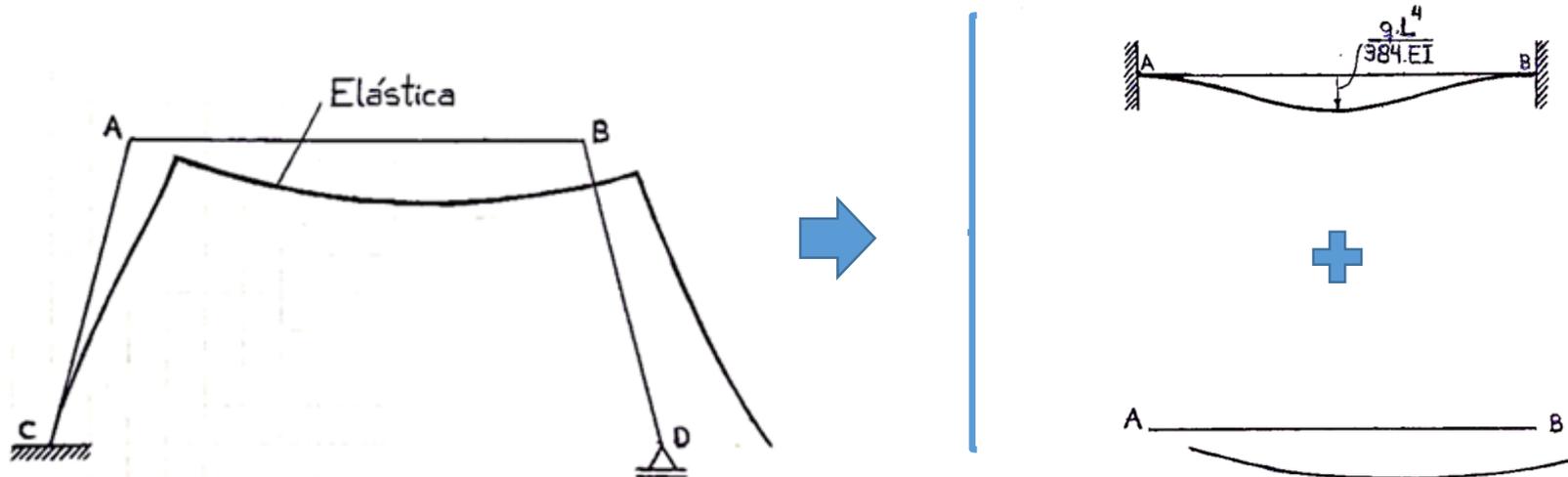


Método de los Desplazamientos

2. Cinemática Estructural

Suponiendo que se conocen todos los desplazamientos nodales, a partir del PIASE la elástica de deformación de la viga AB puede obtenerse como superposición los desplazamientos y las cargas. A su vez se resumen en:

- i) La elástica debida a las cargas aplicadas sobre los nudos indesplazables.
- ii) La elástica en función de los desplazamientos extremos de pieza.



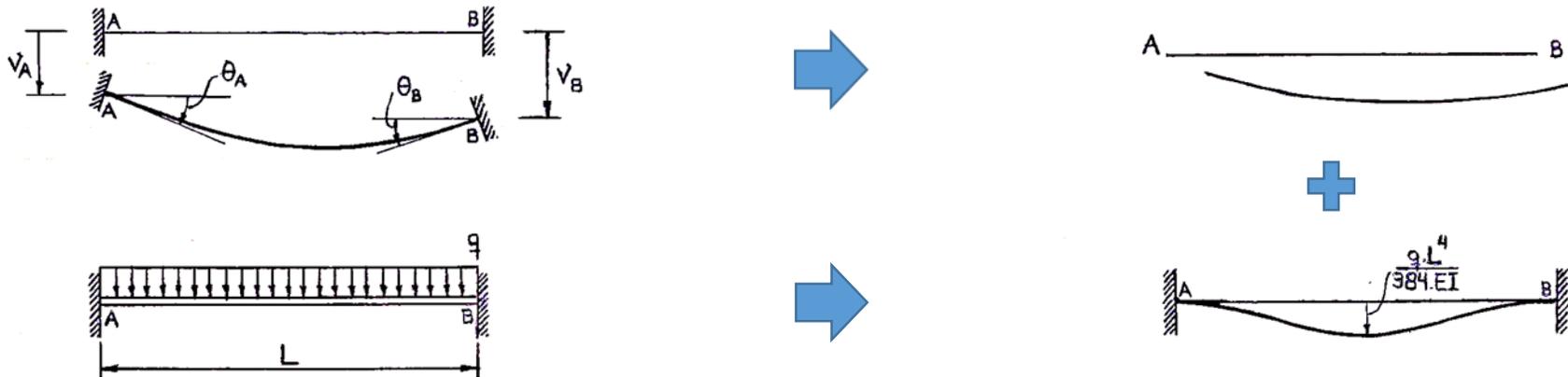
Método de los Desplazamientos

2. Cinemática Estructural

Las respectivas elásticas se calculan de tabla o bien aplicando el Método de las Fuerzas.

En el primer caso se imponen sucesivos movimientos (descensos de apoyo) a los extremos de la viga, cuyo valor es el movimiento nodal correspondiente.

En el caso de las cargas se debe resolver el hiperestático correspondiente, cuyo valor se obtiene de tablas o emplear el Método de las Fuerzas.



El problema ahora consiste en determinar los desplazamientos nodales de la estructura. Para ello justamente se emplea el Método de los Desplazamientos que se discute más adelante.

Método de los Desplazamientos

2. Cinemática Estructural

Para trazar la elástica no es necesario conocer el movimiento de todos los puntos de la estructura.

Es suficiente conocer los movimientos de algunos puntos característicos de la estructura, llamados *Variables Cinemáticas Independientes* o *Incógnitas Cinemáticas*.

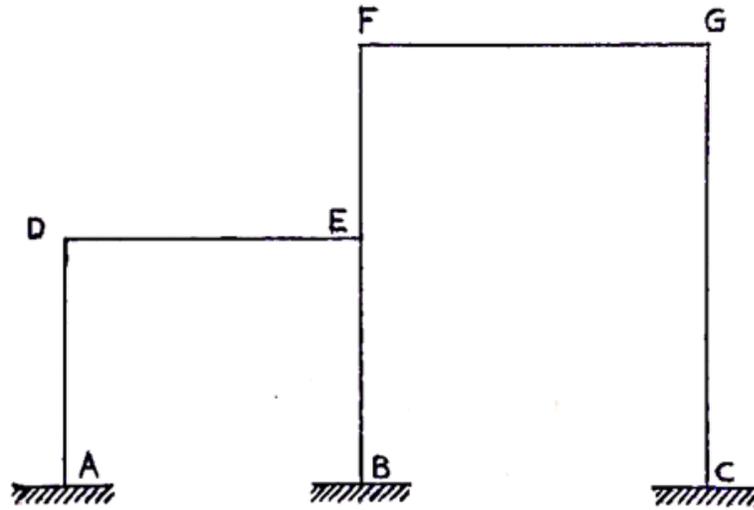
Para calcular el valor de las mismas primero es necesario identificarlas. En general se reconocen dos tipos de movimientos:

- Giros nodales: uno por cada nudo de la estructura, para el pórtico de la figura 7 hay 4 giros nodales. También se suele llamar desplazamientos internos a los giros nodales.
- Movimientos de piso: los mismos corresponden a movimientos de dinteles o pisos de la estructura. También se los conoce como desplazamientos externos.

Método de los Desplazamientos

2. Cinemática Estructural

Pórtico de ejemplo. Posee 4 giros nodales y dos movimientos de piso



La determinación de los movimientos de piso no siempre es inmediata. Para ello pueden plantearse, cuando sea posible, una cadena cinemática abierta en base a la estructura original.

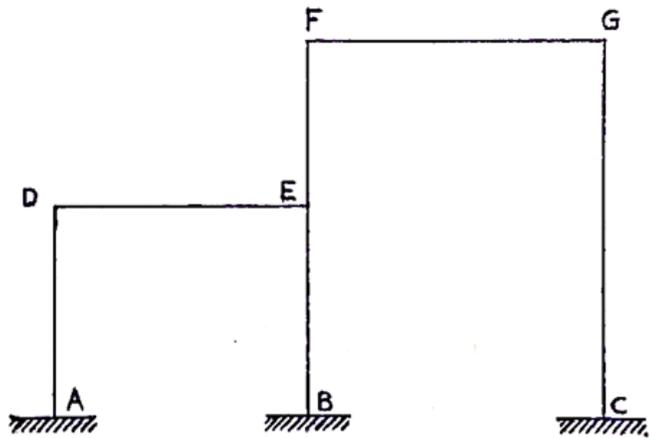
En su defecto se utiliza un método más general que tiene en cuenta todos los desplazamientos nodales.

Método de los Desplazamientos

2. Cinemática Estructural

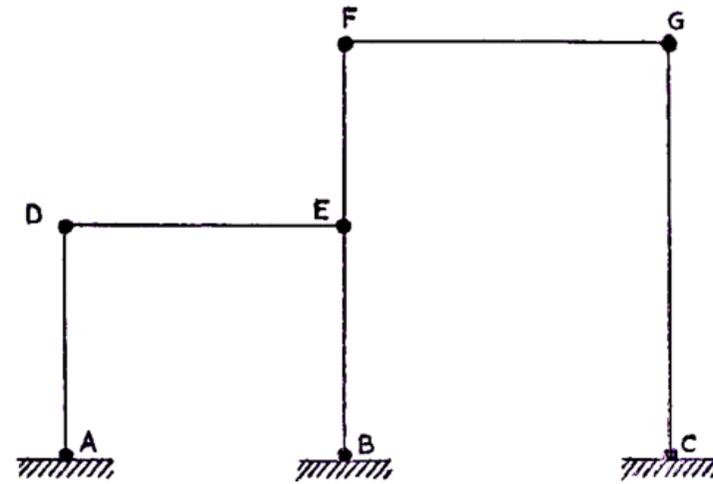
Planteo de una cadena cinemática abierta

Se imponen articulaciones en todos los nudos de la estructura y también en los empotramientos. Luego se calculan los grados de libertad de la cadena cinemática resultante.



$$CV = n + 2$$

$$CV = 6 + 2 = 8$$

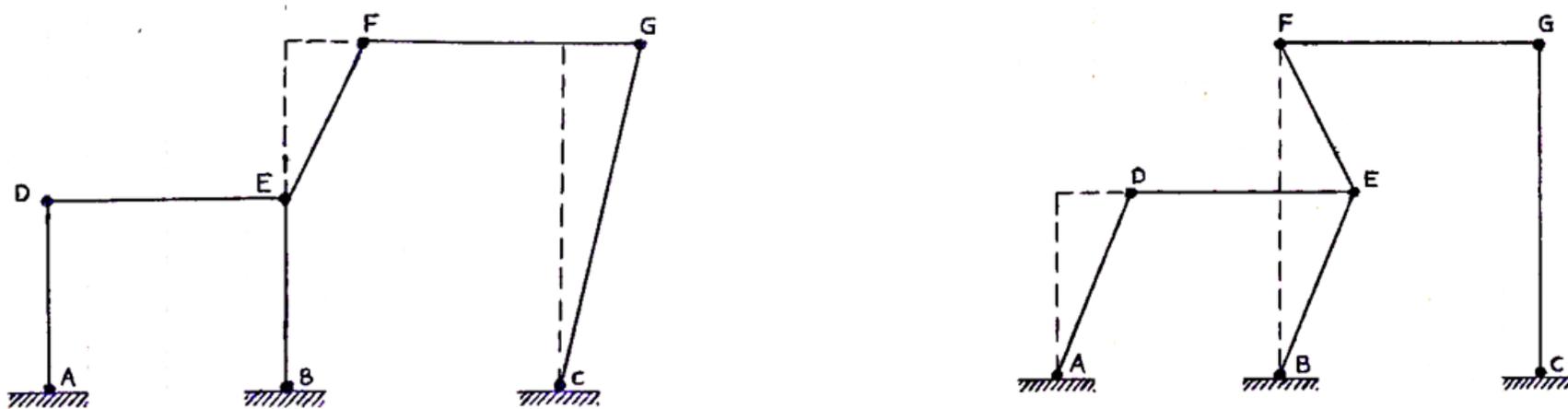


$$GL = CV_{\text{necesarias}} - CV_{\text{existentes}} = 8 - 6 = 2$$

Método de los Desplazamientos

2. Cinemática Estructural

El número de movimientos o desplazamientos de piso independientes es 2 en este caso, que corresponde a los niveles DE y FG, respectivamente, como se muestra en la figura.



En suma, el pórtico tiene 6 movimientos o incógnitas independientes que son los 4 giros nodales y los 2 desplazamientos de piso independientes (obtenidos a partir de la cadena cinemática abierta).

Método de los Desplazamientos

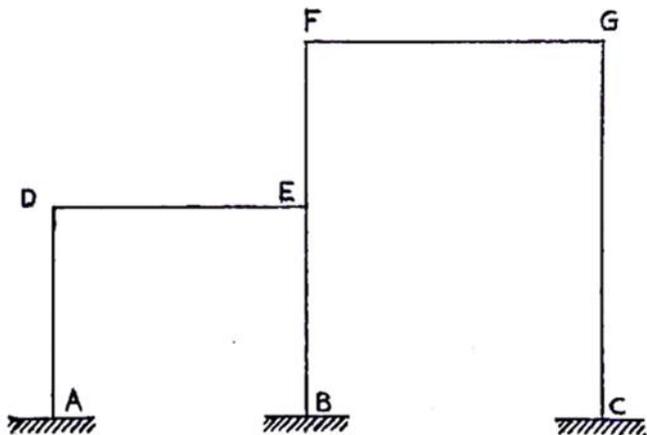
2. Cinemática Estructural

Método General

En este método se suman los grados de libertad de la estructura original. Para cada nudo se consideran tres movimientos: un desplazamiento vertical v , uno horizontal u y un giro θ .

Luego el pórtico analizado tiene 12 movimientos: 4 giros nodales y 8 movimientos nodales. S

Suponiendo que las barras no se deforman axialmente se tiene



$$v_D = v_A = 0 \quad v_F = v_E = v_B = 0 \quad v_G = v_C = 0$$

$$u_D = u_E ; \text{ (movimiento de piso)}$$

$$u_F = u_G ; \text{ (movimiento de piso)}$$

Quedan 6 desplazamientos independientes a fijar, 4 giros nodales y dos movimientos de piso.

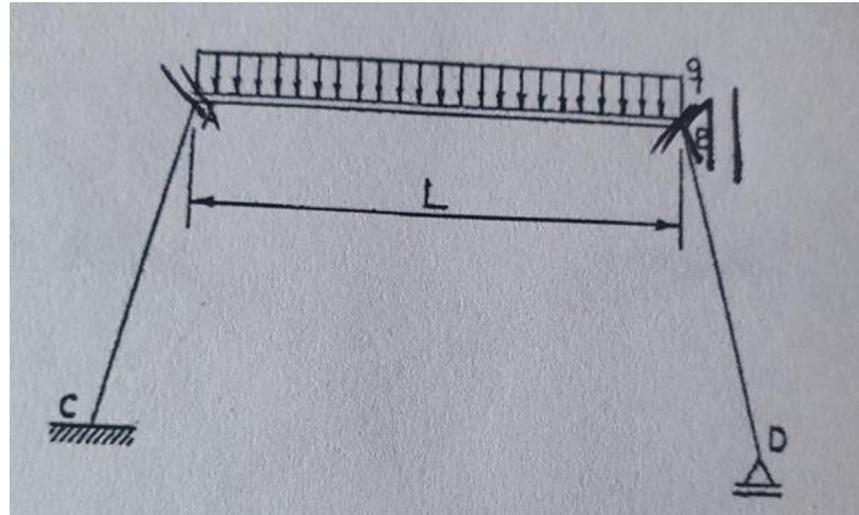
3. Método de los Desplazamientos

- El Método de los Desplazamientos se basa en un enfoque cinemático y tiene como objetivo determinar y calcular los desplazamientos independientes de una estructura para, en base a estos, obtener los esfuerzos característicos.
- El Método de los Desplazamientos nos permite calcular las variables cinemáticas independientes mencionadas anteriormente, que ahora constituyen las Incógnitas Cinemáticas X_i del problema.
- Primero se deben identificar dichas incógnitas. Para ello se emplean los métodos vistos.
- Una vez identificadas las Incógnitas Cinemáticas, se puede plantear el llamado Sistema Fundamental.

Método de los Desplazamientos

3. Planteo del Método

El *Sistema Fundamental SF* se obtiene bloqueando los movimientos de las incógnitas independientes, para ello se aplican empotramientos móviles en los nudos y apoyos móviles para impedir los movimientos de piso. Estos vínculos agregados son vínculos ficticios.



En el Método de los Desplazamientos, el SF, a diferencia del Método de las Fuerzas, se obtiene agregando condiciones de vínculo a la estructura. Luego el SF, en este caso, será una estructura aún más hiperestática que la original, pero compatible.

Método de los Desplazamientos

3. Planteo del Método

En el Sistema Fundamental se bloquean todas las incógnitas cinemáticas X_i . Para ello se emplean Empotramientos Móviles para impedir o bloquear los giros nodales y Apoyos Móviles, para impedir los desplazamientos de piso.

Para cada uno de estos vínculos ficticios existe una Reacción de Vínculo R_i . La misma depende de las cargas aplicadas P y las incógnitas cinemáticas X_i . Como cada uno de los vínculos que se agrega a la estructura original para conformar el Sistema Fundamental es ficticio, la reacción de los mismos deberá ser nula para cumplir con las condiciones de la estructura original (en donde el vínculo no existe).

$$R_{i(P, X_i)} = 0$$

Método de los Desplazamientos

3. Planteo del Método

$$R_{i(P, X_i)} = 0$$

Por superposición de efectos, para un número n de incógnitas puede escribirse:

$$R_{i(P)} + R_{i(X_1)} + R_{i(X_2)} + \dots + R_{i(X_n)} = 0$$

donde la ecuación de equilibrio $R_i = 0$ se ha expresado en función de las cargas aplicadas P y las diferentes incógnitas X_i .

Método de los Desplazamientos

3. Planteo del Método

La ecuación de equilibrio $R_i = 0$ se ha expresado en función de las cargas aplicadas P y las diferentes incógnitas X_i .

A priori no se conoce el valor de las incógnitas X_1, X_2, \dots, X_n . Entonces los valores de $R_{i(X_i)}$ se pueden calcular a partir de *valores unitarios* $\bar{X}_j = 1$, que luego se multiplican por el verdadero valor de las incógnitas X_i :

$$R_{i(P)} + R_{i(\bar{X}_1=1)} \cdot X_1 + R_{i(\bar{X}_2=1)} \cdot X_2 + \dots + R_{i(\bar{X}_n=1)} \cdot X_n = 0$$

Método de los Desplazamientos

3. Planteo del Método

Debido a que siempre hay tantas ecuaciones de equilibrio como incógnitas cinemáticas, se obtiene un Sistema de Ecuaciones Lineales de Equilibrio de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1(P)} + R_{1(\bar{X}_1=1)} \cdot X_1 + R_{1(\bar{X}_2=1)} \cdot X_2 + \dots + R_{1(\bar{X}_n=1)} \cdot X_n = 0 \\ R_{2(P)} + R_{2(\bar{X}_1=1)} \cdot X_1 + R_{2(\bar{X}_2=1)} \cdot X_2 + \dots + R_{2(\bar{X}_n=1)} \cdot X_n = 0 \\ \vdots \\ R_{n(P)} + R_{n(\bar{X}_1=1)} \cdot X_1 + R_{n(\bar{X}_2=1)} \cdot X_2 + \dots + R_{n(\bar{X}_n=1)} \cdot X_n = 0 \end{array} \right.$$

3. Planteo del Método

En resumen, en el sistema de ecuaciones lineales se reconocen:

- 1. Rigideces r_{ij}* : Definidas como las fuerzas necesarias para producir desplazamientos unitarios. Dependen del material, las dimensiones y las condiciones de vínculo que definen la estructura. Son independientes de las cargas.
- 1. Incógnitas X_i* : Son desplazamientos internos (giros nodales) o desplazamientos externos (desplazamientos de piso).
- 1. Términos Independientes r_{i0}* : fuerzas o pares extremas de pieza, dependientes de las cargas exteriores.

Método de los Desplazamientos

3. Planteo del Método

Dicho sistema puede expresarse en Forma Matricial como:

$$\begin{bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \\ \vdots \\ r_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Llamando **K** a la matriz de rigidez y **P** y **X**, a los vectores de los términos independientes y de incógnitas, respectivamente, el sistema se expresa en notación compacta como:

$$\mathbf{P} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} = 0$$

Método de los Desplazamientos

3. Planteo del Método

La matriz de rigidez \mathbf{K} cumple con las siguientes propiedades:

- I. Es cuadrada por construcción.
- II. Es simétrica, ya que las rigideces cruzadas son $r_{ij} = r_{ji}$ son iguales, según el Teorema de Maxwell
- III. Es diagonal dominante ($r_{ii} > r_{ij}$).
- IV. Es positiva definida (determinante mayor a cero) y luego inversible.