ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 4

Método de los Desplazamientos – parte 2

Dr. Ing. Carlos García Garino

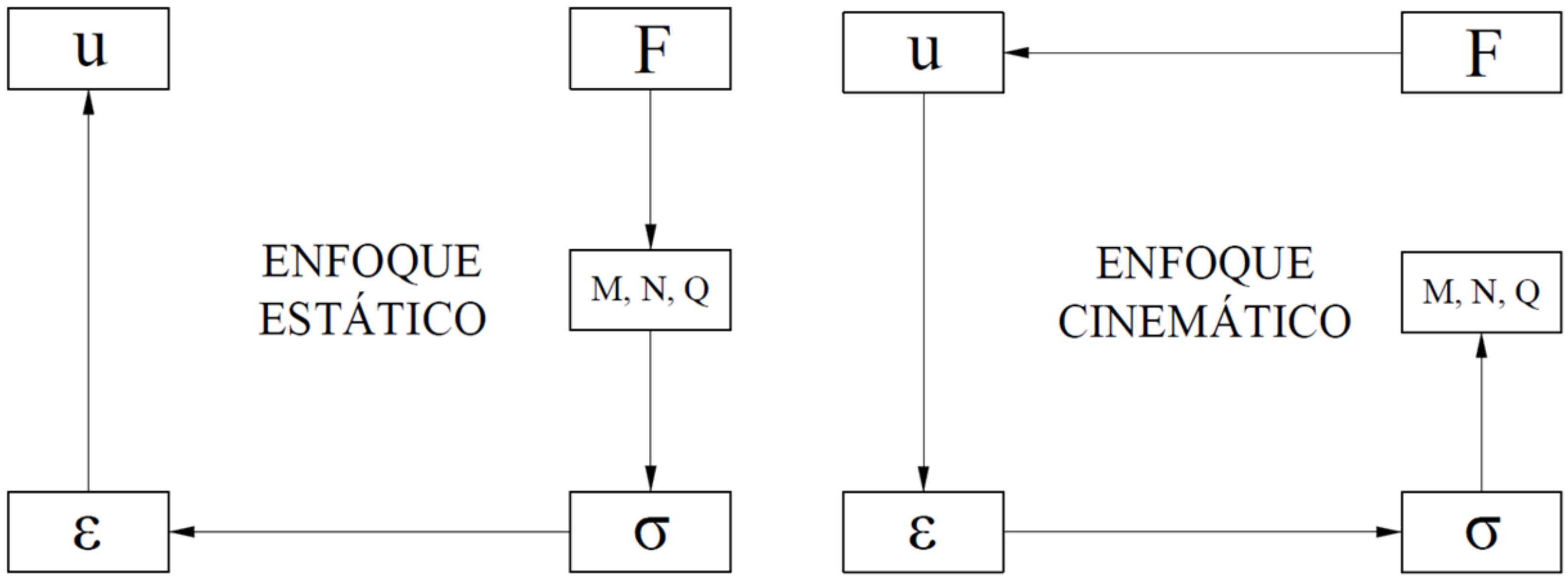
Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
Abril de 2022

Temario

1. Revisión de Conceptos
2. Pasos del Método
3. Casos de Descenso de apoyo y acciones térmicas
4. Problemas con Simetría y Antisimetría
5. Ejemplos de Aplicación

Método de los Desplazamientos

1. Enfoque estático vs Enfoque cinemático



2. Cinemática Estructural

Para trazar la elástica no es necesario conocer el movimiento de todos los puntos de la estructura.

Es suficiente conocer los movimientos de algunos puntos característicos de la estructura, llamados *Variables Cinemáticas Independientes* o *Incógnitas Cinemáticas*.

Para calcular el valor de las mismas primero es necesario identificarlas. En general se reconocen dos tipos de movimientos:

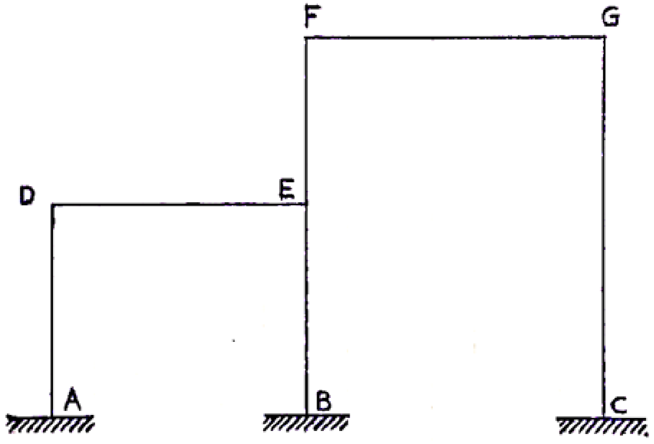
- Giros nodales: uno por cada nudo de la estructura, para el pórtico de la figura 7 hay 4 giros nodales. También se suele llamar desplazamientos internos a los giros nodales.

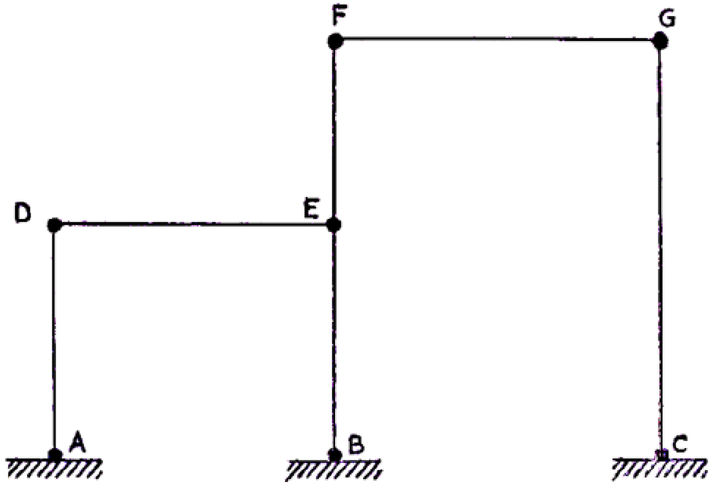
- Movimientos de piso: los mismos corresponden a movimientos de dinteles o pisos de la estructura. También se los conoce como desplazamientos externos.

2. Cinemática Estructural

Planteo de una cadena cinemática abierta

Se imponen articulaciones en todos los nudos de la estructura y también en los empotramientos. Luego se calculan los grados de libertad de la cadena cinemática resultante.

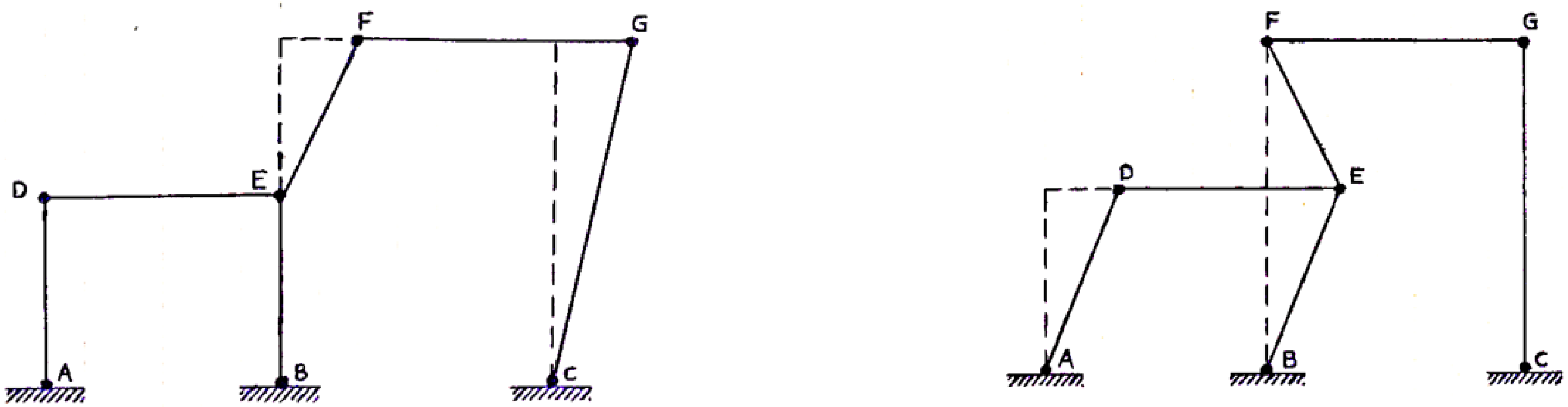




$\mathrm{CV} = \mathrm{n} + 2$ $\quad$ $\mathrm{CV} = 6 + 2 = 8$ $\quad$ $\mathrm{GL} = \mathrm{CV}_{\mathrm{necesarias}} - \mathrm{CV}_{\mathrm{existentes}} = 8 - 6 = 2$

2. Cinemática Estructural

El número de movimientos o desplazamientos de piso independientes es 2 en este caso, que corresponde a los niveles DE y FG, respectivamente, como se muestra en la figura.



En suma, el pórtico tiene 6 movimientos o incógnitas independientes que son los 4 giros nodales y los 2 desplazamientos de piso independientes (obtenidos a partir de la cadena cinemática abierta).

3. Método de los Desplazamientos

- El Método de los Desplazamientos se basa en un enfoque cinemático y tiene como objetivo determinar y calcular los desplazamientos independientes de una estructura para, en base a estos, obtener los esfuerzos característicos.

- El Método de los Desplazamientos nos permite calcular las variables cinemáticas independientes mencionadas anteriormente, que ahora constituyen las Incógnitas Cinemáticas X_i del problema.

- Primero se deben identificar dichas incógnitas. Para ello se emplean los métodos vistos.

- Una vez identificadas las Incógnitas Cinemáticas, se puede plantear el llamado Sistema Fundamental.

3. Planteo del Método

En el Sistema Fundamental se bloquean todas las incógnitas cinemáticas X_i. Para ello se emplean Empotramientos Móviles para impedir o bloquear los giros nodales y Apoyos Móviles, para impedir los desplazamientos de piso.

Para cada uno de estos vínculos ficticios existe una Reacción de Vínculo R_i. La misma depende de las cargas aplicadas P y las incógnitas cinemáticas X_i. Como cada uno de los vínculos que se agrega a la estructura original para conformar el Sistema Fundamental es ficticio, la reacción de los mismos deberá ser nula para cumplir con las condiciones de la estructura original (en donde el vínculo no existe).

$$R_{i_{(P,\,X_i)}} = 0$$

3. Planteo del Método

Debido a que siempre hay tantas ecuaciones de equilibrio como incógnitas cinemáticas, se obtiene un Sistema de Ecuaciones Lineales de Equilibrio de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} R_{1_{(P)}} + R_{1_{(\overline{X}_1=1)}}.X_1 + R_{1_{(\overline{X}_2=1)}}.X_2 + \cdots + R_{1_{(\overline{X}_n=1)}}.X_n = 0 \\ R_{2_{(P)}} + R_{2_{(\overline{X}_1=1)}}.X_1 + R_{2_{(\overline{X}_2=1)}}.X_2 + \cdots + R_{2_{(\overline{X}_n=1)}}.X_n = 0 \\ \vdots \\ R_{n_{(P)}} + R_{n_{(\overline{X}_1=1)}}.X_1 + R_{n_{(\overline{X}_2=1)}}.X_2 + \cdots + R_{n_{(\overline{X}_n=1)}}.X_n = 0 \end{cases}$$

3. Planteo del Método

Dicho sistema puede expresarse en Forma Matricial como:

$$\begin{bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \\ \vdots \\ r_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Llamando **K** a la matriz de rigidez y **P** y **X**, a los vectores de los términos independientes y de incógnitas, respectivamente, el sistema se expresa en notación compacta como:

$$\mathbf{P} + \mathbf{K}.\mathbf{X} = 0$$

Pasos de aplicación del Método de los Desplazamientos

I. Identificar las *Incógnitas Cinemáticas* $\mathrm{X_i}$.

II. Plantear el *Sistema Fundamental* SF, bloqueando los movimientos de las incógnitas $\mathrm{X_i}$ para lo cual se agregan apoyos móviles o empotramientos móviles.

III. Imponer sucesivamente movimientos unitarios $\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{i} = 1$ en la dirección de las incógnitas, calcular las rigideces $\mathbf{r_{ij}}$ y obtener (generalmente mediante el uso de tablas) los términos independientes $\mathbf{r_{i0}}$ para determinar así el *Sistema de Ecuaciones Lineales* (SEL).

IV. Resolver el SEL y determinar las incógnitas cinemáticas.

V. Aplicar el Principio de Independencia de Acciones y Superposición de Esfuerzos (PIASE) y calcular los Diagramas de Esfuerzos Característicos.

Casos de descenso de apoyo y Acciones Térmicas

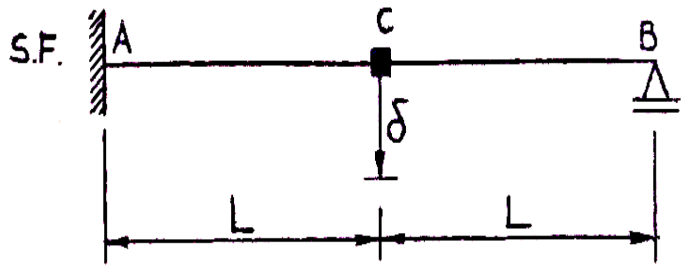
Es completamente válido el procedimiento general. La novedad consiste en el cálculo de los términos independientes:

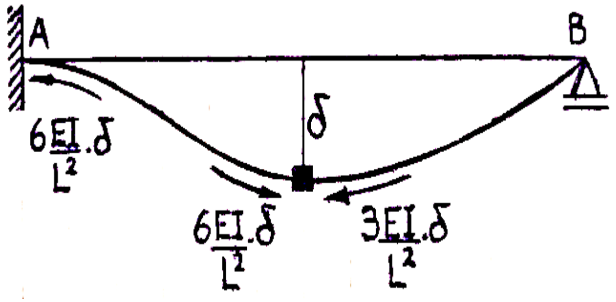
Para acciones térmicas, en el Sistema Fundamental, existen dos casos posibles: viga empotrada-empotrada o empotrada-articulada.

La solución de las mismas está tabulada, pero es relativamente sencillo calcular sus resultados aplicando el Método de las Fuerzas

Caso de descenso de apoyo

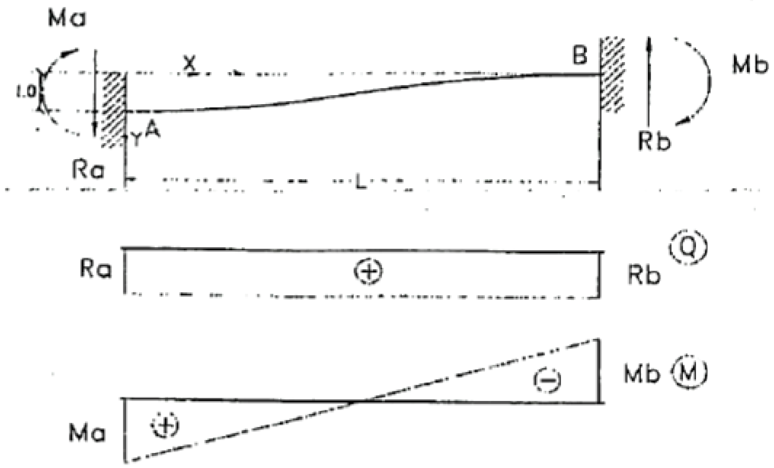
En la viga continua de dos tramos de la figura se impone un descenso de apoyo de valor δ en el apoyo central C. Como las barras que concurren al nudo se mueven de manera rígida con el nudo, las barras AC y CB tendrán el mismo descenso de apoyo δ en el nudo C.





Caso de descenso de apoyo

BARRA EMP–EMP CARGADA CON UN DESPLAZAMIENTO "LO" EN A:



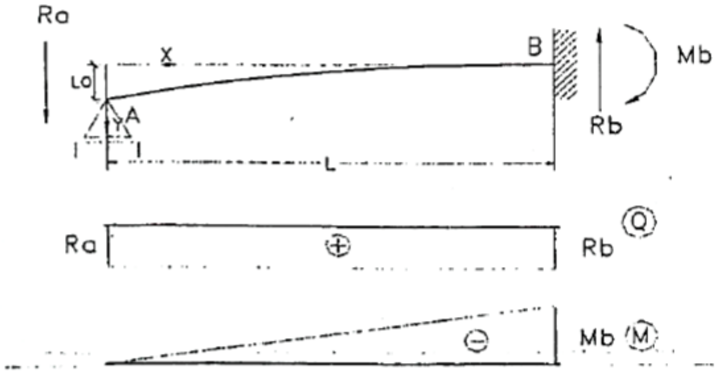
$$Ra = 12 * \frac{E}{L^3} * J * LO$$

$$Rb = 12 * \frac{E}{L^3} * J * LO$$

$$Ma = 6 * \frac{E}{L^2} * J * LO$$

$$Mb = 6 * \frac{E}{L^2} * J * LO$$

BARRA ARTIC–EMP CARGADA CON UN DESPLAZAMIENTO "LO" EN A:



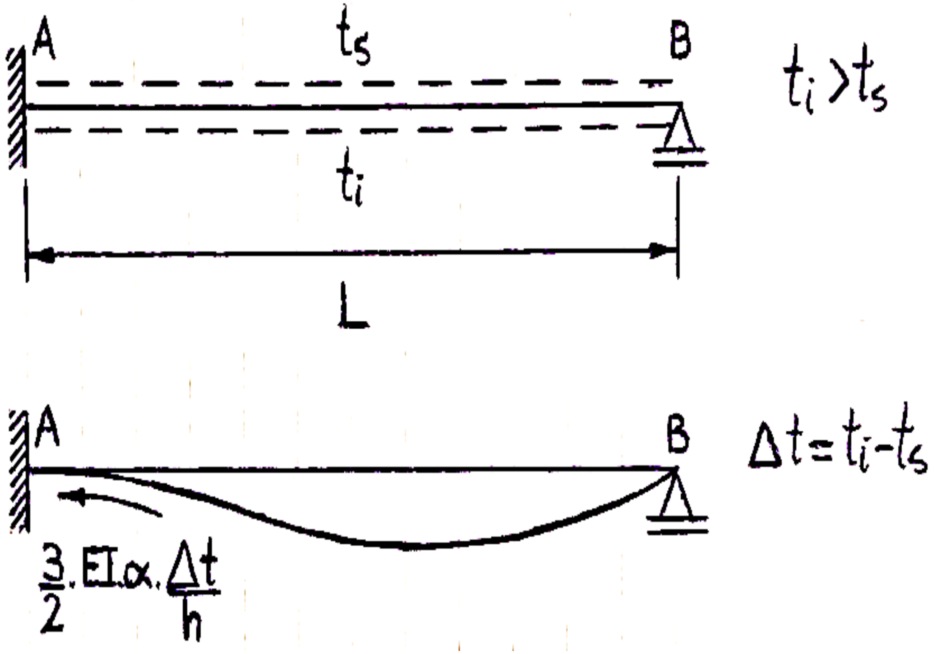
$$Ra = 3 * \frac{E}{L^3} * J * LO$$

$$Rb = 3 * \frac{E}{L^3} * J * LO$$

$$Ma = 3 * \frac{E}{L^2} * J * LO$$

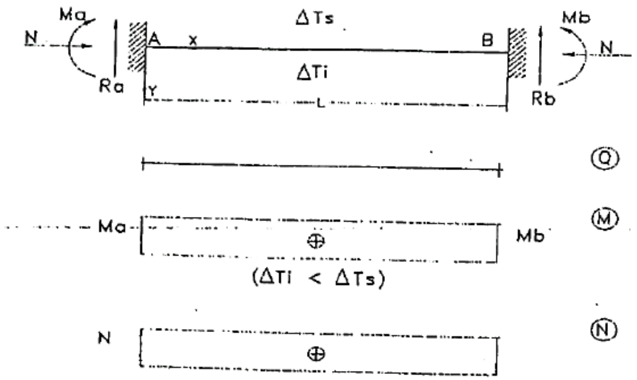
Caso de Acciones Térmicas

Las acciones térmicas causan solicitaciones en una estructura hiperestática. Las mismas se deben a que los movimientos debido a la temperatura no se producen libremente como en una estructura isostática y entonces aparecen solicitaciones debidas a la acción térmica.



Caso de Acciones Térmicas

BARRA EMP–EMP CARGADA CON TEMPERATURA:



$$Ra = 0$$

$$Rb = 0$$

$$Ma = \lambda * \frac{(\Delta Ti - \Delta Ts)}{h} * E * J$$

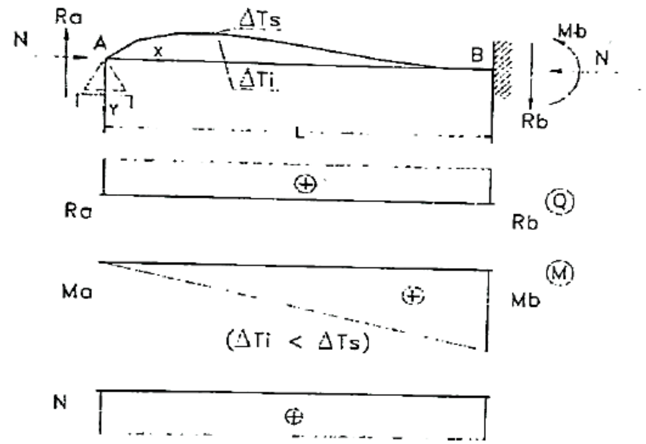
$$Mb = \lambda * \frac{(\Delta Ti - \Delta Ts)}{h} * E * J$$

λ : coeficiente de dilatacion lineal del material

$$N = \lambda * \Delta TG * E * A$$

$$\Delta TG = \frac{(\Delta Ti + \Delta Ts)}{2} < 0$$

BARRA ARTIC–EMP CARGADA CON TEMPERATURA:



$$Ra = \frac{3}{2} * \frac{\lambda}{L} * \frac{(\Delta Ti - \Delta Ts)}{h} * E * J$$

$$Rb = \frac{3}{2} * \frac{\lambda}{L} * \frac{(\Delta Ti - \Delta Ts)}{h} * E * J$$

$$Mb = \frac{3}{2} * \lambda * \frac{(\Delta Ti - \Delta Ts)}{h} * E * J$$

λ : coeficiente de dilatación lineal del material

$$N = \lambda * \Delta TG * E * A$$

$$\Delta TG = \frac{(\Delta Ti + \Delta Ts)}{2} < 0$$

Comparación entre los Métodos de las Fuerzas y Desplazamientos

	MÉTODO DE LAS FUERZAS	MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS
Incógnitas	Estáticas (se pueden elegir)	Cinemáticas (inherentes a la estructura)
Sistema Fundamental (SF)	Isostático (no único)	Hiperestático (único)
	Equilibrado, pero no compatible	Compatible, pero no equilibrado
	Se elige buscando facilitar el cálculo	No se elige, es único. Excepto que se desee agregar más incógnitas para tener con mayor información.
Trazado de Diagramas	Se aplica el PIASE y el diagrama final es una combinación lineal	Superposición de diagramas desequilibrados (PIASE)
Dificultades	• Elección del SF • Trazado de la elástica final • Visualización de incógnitas de vínculo interno • Gran cantidad de incógnitas en estructuras complejas.	• Trazado de elásticas en el SF • Cálculo de rigideces • ¿Superposición de Diagramas?
Tipos de estructuras que puede resolver	Hiperestáticas	Hiperestáticas o Isostáticas

Simetría y Antisimetría

Valen todas las consideraciones generales acerca de la simetría estructural que se han visto en la Unidad 3, y también la descomposición de un estado general de carga en la suma de otros dos, uno simétrico más otro antisimétrico.

Dado que la estructura se va a calcular mediante el Método de los Desplazamientos es imprescindible que las condiciones de contorno en el eje de simetría se mediante las condiciones de vínculo correspondientes.

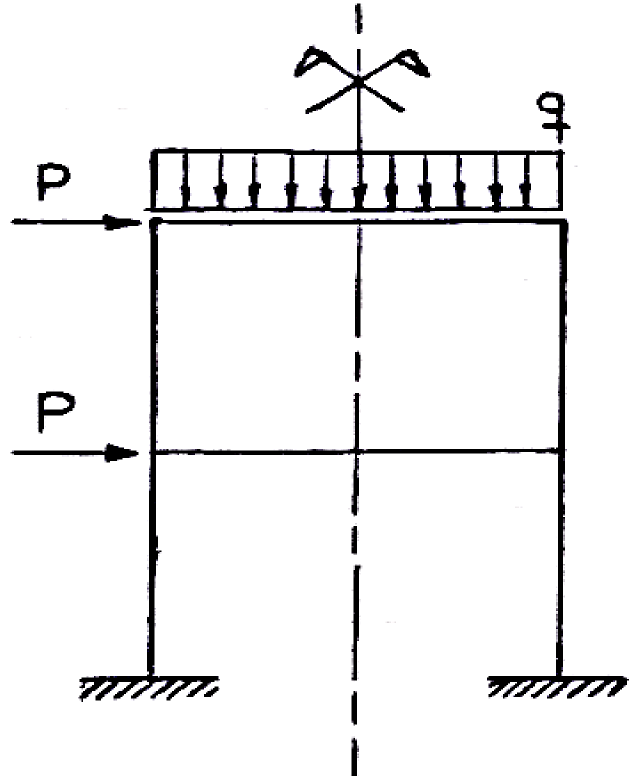
Para el caso simétrico se emplea un empotramiento guiado y para el caso antisimético un apoyo móvil.

En el caso del Método de las Fuerzas es indistinto poner en evidencia los vínculos o sus reacciones. En este caso las variables estáticas no juegan ningún rol y, se insiste, se deben disponer los vínculos correspondientes.

Simetría y Antisimetría

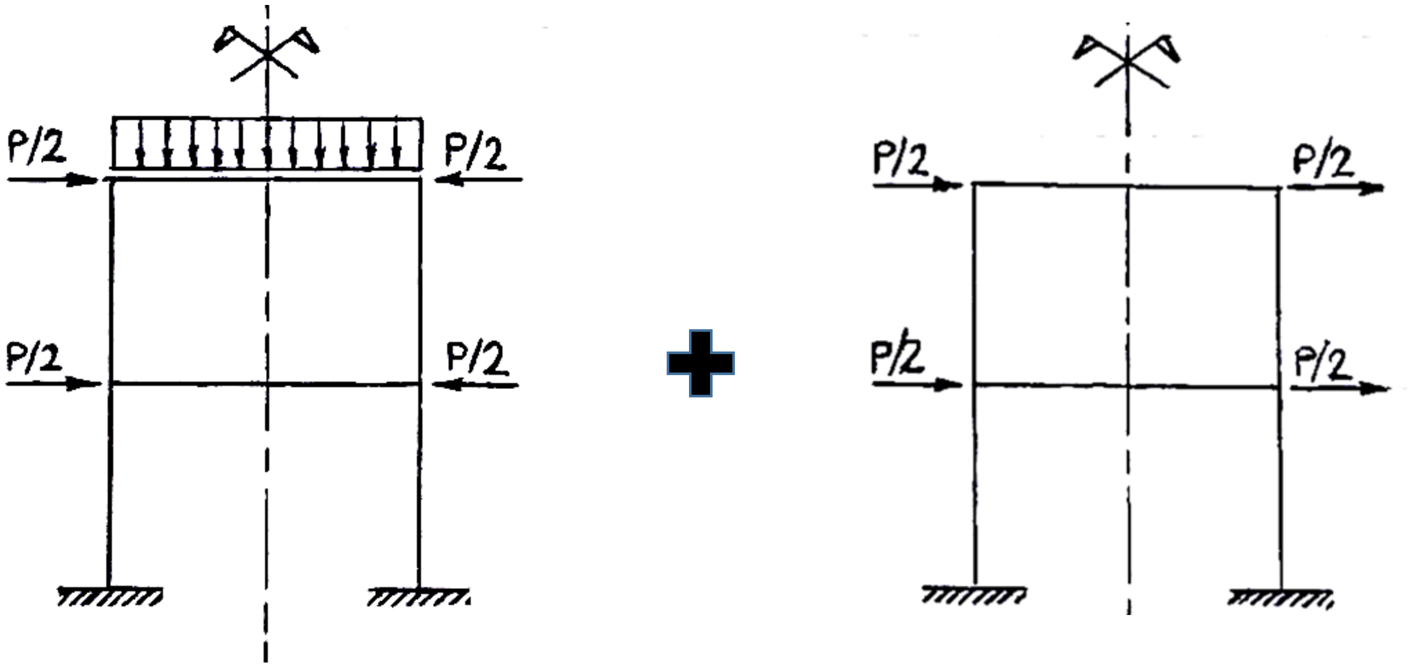
La estructura de la figura presenta simetría estructural. Sin embargo el estado de carga es general.

El mismo se puede descomponer en la suma de uno simétrico más otro antisimétrico, siguiendo los pasos vistos en el Método de las Fuerzas.



Simetría y Antisimetría

Estructura simétrica bajo la acción de dos sistemas de carga, uno simétrico (a la izquierda) y otro antisimétrico (a la derecha). La suma de los resultados de cada uno de estos dos problemas, es la solución del problema original



Simetría y Antisimetría

Esquemas de las medio estructuras, simétrica (a la izquierda) y antisimétrico (a la derecha).

¿Cuántas incógnitas cinemáticas tiene cada uno de estos dos subproblemas?

¿Tenemos toda la información para calcular rigideces y términos independientes en el Sistema Fundamental?

Simetría y Antisimetría

Caso de la viga empotrada – empotrada articulada

Se puede calcular como una viga doblemente empotrada del doble de longitud. Para el caso del término independiente, el valor es q $(2l)^2$ / 12, donde l es la longitud total de la media estructura.

Para el caso de la rigidez también se puede recurrir a una viga doblemente empotrada del doble longitud. Ahora sometida a dos giros iguales y de sentido contrario en los apoyos. Sumando resultados. La rigidez resulta E I / l

$$r_{11} = 4\,E\,I / 2l - 2\,E\,I / 2l =$$
$$= 2\,E\,I / 2l = E\,I / l$$