ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 4

Método de los Desplazamientos – parte 3

Dr. Ing. Carlos García Garino

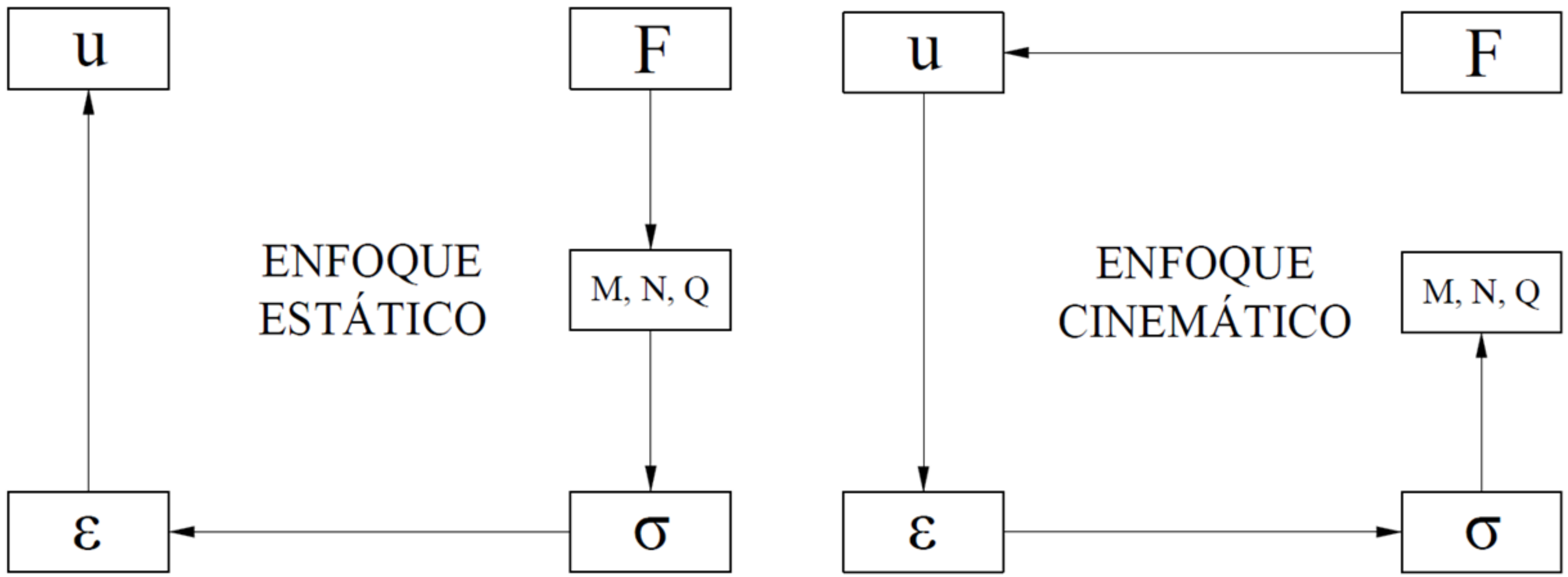
Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

Abril de 2022

Temario

1. Revisión de Conceptos y Pasos del Método
2. Pasos de Aplicación del Método de los Desplazamientos
3. Condensación Estática de la Matriz de Rigidez
4. Ejemplos de Aplicación: barras inclinadas

1. Enfoque estático vs Enfoque cinemático



1. Método de los Desplazamientos

- El Método de los Desplazamientos se basa en un enfoque cinemático y tiene como objetivo determinar y calcular los desplazamientos independientes de una estructura para, en base a estos, obtener los esfuerzos característicos.

- El Método de los Desplazamientos nos permite calcular las variables cinemáticas independientes mencionadas anteriormente, que ahora constituyen las Incógnitas Cinemáticas X_i del problema.

- Primero se deben identificar dichas incógnitas. Para ello se emplean los métodos vistos.

- Una vez identificadas las Incógnitas Cinemáticas, se puede plantear el llamado Sistema Fundamental.

1. Planteo del Método

En el Sistema Fundamental se bloquean todas las incógnitas cinemáticas X_i. Para ello se emplean Empotramientos Móviles para impedir o bloquear los giros nodales y Apoyos Móviles, para impedir los desplazamientos de piso.

Para cada uno de estos vínculos ficticios existe una Reacción de Vínculo R_i. La misma depende de las cargas aplicadas P y las incógnitas cinemáticas X_i. Como cada uno de los vínculos que se agrega a la estructura original para conformar el Sistema Fundamental es ficticio, la reacción de los mismos deberá ser nula para cumplir con las condiciones de la estructura original (en donde el vínculo no existe).

$$R_{i_{(P,\, X_i)}} = 0$$

1. Planteo del Método

Debido a que siempre hay tantas ecuaciones de equilibrio como incógnitas cinemáticas, se obtiene un Sistema de Ecuaciones Lineales de Equilibrio de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} R_{1_{(P)}} + R_{1_{(\overline{X}_1=1)}}.X_1 + R_{1_{(\overline{X}_2=1)}}.X_2 + \cdots + R_{1_{(\overline{X}_n=1)}}.X_n = 0 \\ R_{2_{(P)}} + R_{2_{(\overline{X}_1=1)}}.X_1 + R_{2_{(\overline{X}_2=1)}}.X_2 + \cdots + R_{2_{(\overline{X}_n=1)}}.X_n = 0 \\ \vdots \\ R_{n_{(P)}} + R_{n_{(\overline{X}_1=1)}}.X_1 + R_{n_{(\overline{X}_2=1)}}.X_2 + \cdots + R_{n_{(\overline{X}_n=1)}}.X_n = 0 \end{cases}$$

1. Planteo del Método

Dicho sistema puede expresarse en Forma Matricial como:

$$\begin{bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \\ \vdots \\ r_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Llamando K a la matriz de rigidez y P y X, a los vectores de los términos independientes y de incógnitas, respectivamente, el sistema se expresa en notación compacta como:

$$\mathbf{P} + \mathbf{K}.\mathbf{X} = 0$$

2. Pasos de aplicación del Método de los Desplazamientos

I. Identificar las *Incógnitas Cinemáticas* $\mathrm{X_i}$.

II. Plantear el *Sistema Fundamental* SF, bloqueando los movimientos de las incógnitas $\mathrm{X_i}$ para lo cual se agregan apoyos móviles o empotramientos móviles.

III. Imponer sucesivamente movimientos unitarios $\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{i} = 1$ en la dirección de las incógnitas, calcular las rigideces $\mathrm{r_{ij}}$ y obtener (generalmente mediante el uso de tablas) los términos independientes $\mathrm{r_{i0}}$ para determinar así el *Sistema de Ecuaciones Lineales* (SEL).

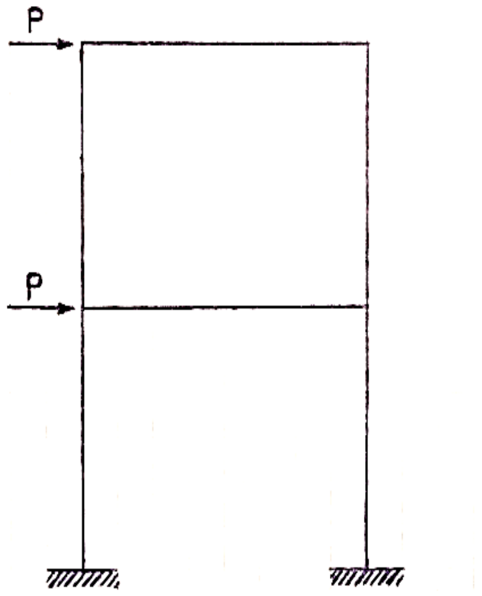
IV. Resolver el SEL y determinar las incógnitas cinemáticas.

V. Aplicar el Principio de Independencia de Acciones y Superposición de Esfuerzos (PIASE) y calcular los Diagramas de Esfuerzos Característicos.

3. Condensación Estática de la matriz de Rigidez

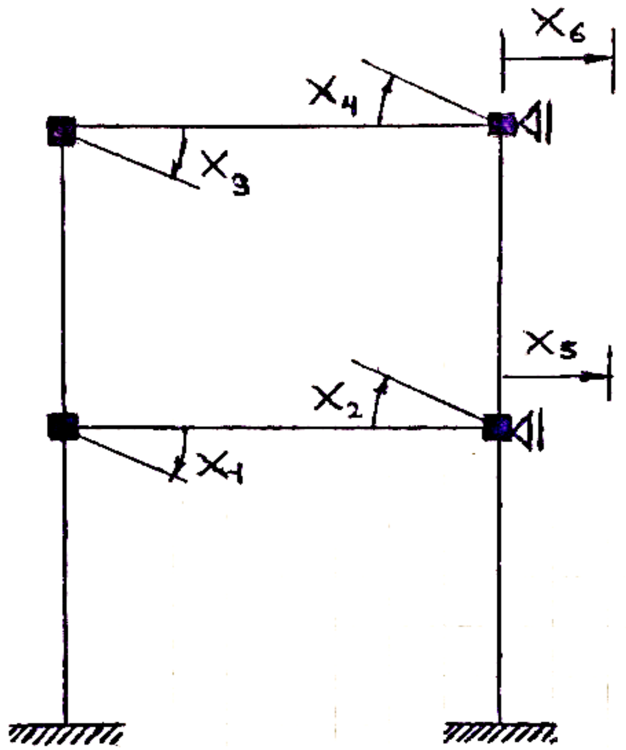
La *Condensación Estática* de la matriz de rigidez tiene como objetivo concentrar las rigideces que corresponden a desplazamientos de piso sin despreciar los aportes de las rigideces indirectas debidas a giros, eliminando grados de libertad no deseados.

Para desarrollar el concepto, se considera la estructura de la figura, un pórtico de un vano y dos pisos, sometido a cargas horizontales.



3. Condensación Estática de la matriz de Rigidez

La estructura tiene 6 incógnitas cinemáticas, 4 asociadas a giros nodales y dos a movimientos de piso, como se indica en la misma.



3. Condensación Estática de la matriz de Rigidez

El Sistema de Ecuaciones lineales que expresa las ecuaciones de equilibrio se ordena escribiendo primero las incógnitas asociadas a los giros y luego, las asociadas a los movimientos de piso. Se reconocen 4 submatrices

$$
\left[\begin{array}{cccc|cc}
r_{\theta\theta11} & r_{\theta\theta12} & r_{\theta\theta13} & r_{\theta\theta14} & r_{\theta\delta15} & r_{\theta\delta16} \\
r_{\theta\theta21} & r_{\theta\theta22} & r_{\theta\theta23} & r_{\theta\theta24} & r_{\theta\delta25} & r_{\theta\delta26} \\
r_{\theta\theta31} & r_{\theta\theta32} & r_{\theta\theta33} & r_{\theta\theta34} & r_{\theta\delta35} & r_{\theta\delta36} \\
r_{\theta\theta41} & r_{\theta\theta42} & r_{\theta\theta43} & r_{\theta\theta44} & r_{\theta\delta45} & r_{\theta\delta46} \\
\hline
r_{\delta\theta51} & r_{\delta\theta52} & r_{\delta\theta53} & r_{\delta\theta54} & r_{\delta\delta55} & r_{\delta\delta56} \\
r_{\delta\theta61} & r_{\delta\theta62} & r_{\delta\theta63} & r_{\delta\theta64} & r_{\delta\delta65} & r_{\delta\delta66}
\end{array}\right]
*
\left[\begin{array}{c}
X_{\theta1} \\ X_{\theta2} \\ X_{\theta3} \\ X_{\theta4} \\ \hline X_{\delta5} \\ X_{\delta6}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline P \\ P
\end{array}\right]
$$

3. Condensación Estática de la matriz de Rigidez

Estas submatrices de la matriz de rigidez agrupan a rigideces debidas a giros unitarios ($\mathrm{r}_{\theta\theta}$), rigideces en la dirección de los giros debidas a desplazamientos unitarios ($\mathrm{r}_{\theta\delta}$) y viceversa ($\mathrm{r}_{\delta\theta}$) y, finalmente, rigideces debidas a desplazamientos unitarios ($\mathrm{r}_{\delta\delta}$). Entonces se puede expresar el sistema como:

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} K_{\theta\theta} \\ (4x4) \end{matrix} & \begin{matrix} K_{\theta\delta} \\ (4x2) \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} K_{\delta\theta} \\ (2x4) \end{matrix} & \begin{matrix} K_{\delta\delta} \\ (2x2) \end{matrix} \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c} \begin{matrix} X_{\theta} \\ (4x1) \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} X_{\delta} \\ (2x1) \end{matrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 \\ (4x1) \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} P \\ (2x1) \end{matrix} \end{array}\right]$$

3. Condensación Estática de la matriz de Rigidez

En notación compacta se escribe:

$$[K_{\theta\theta}] * [X_{\theta}] + [K_{\theta\delta}] * [X_{\delta}] = [0]$$

$$[K_{\delta\theta}] * [X_{\theta}] + [K_{\delta\delta}] * [X_{\delta}] = [P]$$

A partir de estas ecuaciones es posible plantear un sistema más pequeño que relacione directamente los desplazamientos de piso con las cargas horizontales. De la primera ecuación resulta:

$$[X_{\theta}]_{(4\text{x}1)} = -[K_{\theta\theta}]_{(4\text{x}4)}{}^{-1} * [K_{\theta\delta}]_{(4\text{x}2)} * [X_{\delta}]_{(2\text{x}1)}$$

3. Condensación Estática de la matriz de Rigidez

Que reemplazada en la segunda ecuación se escribe:

$$[K_{\delta\theta}] * (-[K_{\theta\theta}]^{-1} * [K_{\theta\delta}] * [X_{\delta}]) + [K_{\delta\delta}] * [X_{\delta}] = [P]$$

$$\Big[[K_{\delta\delta}]_{(2\text{x}2)} - ([K_{\delta\theta}] * [K_{\theta\theta}]^{-1} * [K_{\theta\delta}])_{(2\text{x}2)}\Big] * [X_{\delta}]_{(2\text{x}1)} = [P]_{(2\text{x}1)}$$

La matriz del término derecho, de tamaño 2 x 2, representa la *Condensación Estática de la Matriz de Rigidez* $\mathrm{K_c}$.

$$[\boldsymbol{K_c}] = [\boldsymbol{K_{\delta\delta}}] - ([\boldsymbol{K_{\delta\theta}}] * [\boldsymbol{K_{\theta\theta}}]^{-1} * [\boldsymbol{K_{\theta\delta}}])$$