



ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

UNIDAD 5: MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Material de estudio preparado por:

Dr. Ing. Carlos García Garino - Prof.

Titular

1. Introducción

Para ilustrar el problema se escoge el problema de la barra 1D sometida a esfuerzo normal. Como se verá más adelante el método puede generalizarse a los casos 2D y 3D y a otros problemas de interés en ingeniería estructural, por ejemplo, el problema de barras sometidas a flexión, o en ciencias e ingeniería en general, como puede ser el caso de la distribución de temperatura, o Mecánica de Fluidos, ejemplos que ya hemos visto en la primera parte del tema.

En particular se resolverá el problema de la barra para obtener el estado de desplazamientos de la misma. En algunos casos la solución es continua y en otros es discreta. La solución puede obtenerse empleando distintas técnicas:

- Solución clásica basada en conocimientos de Estabilidad I y Estabilidad II
- Solución mediante el Método de Rayleigh-Ritz
- Solución mediante el Método de Elementos Finitos

A partir del resultado obtenido mediante la solución clásica se puede plantear la ecuación diferencial que gobierna el problema.

2. Solución Clásica

La misma consiste en obtener primero el diagrama de Esfuerzos Normales y luego las tensiones correspondientes. Teniendo en cuenta las tensiones y la ley de Hooke, pueden calcularse las deformaciones y a partir de las mismas, se puede integrar para obtener la solución en desplazamientos.

Para ilustrar el procedimiento se considera la barra de la figura 1, de longitud l , sección transversal A , módulo de elasticidad E , con un apoyo fijo en el extremo superior y sometida a la acción de una carga concentrada P en el extremo libre y una carga repartida uniforme de valor q .

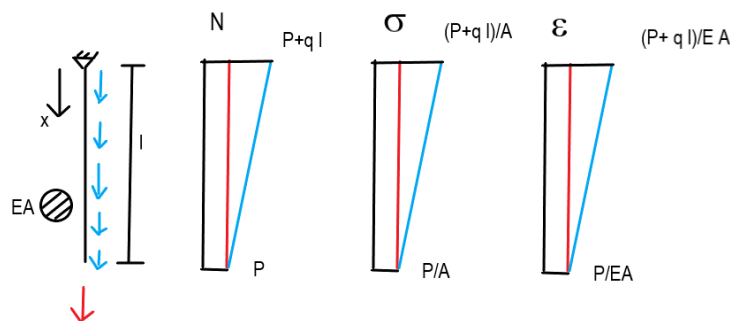


Figura 1. Barra traccionada. De izquierda a derecha se muestran los datos, diagramas de Esfuerzo Normal, de tensiones normales y deformaciones longitudinales

De los datos de la barra surge que el esfuerzo normal vale $N = P + q l$ en el extremo superior de la barra $x = 0$ y $N = P$ en el extremo libre de la barra, $x = l$. Luego, la expresión del diagrama de esfuerzos normales resulta:

$$N(x) = P + q(l - x)$$

Por consideraciones de Resistencia de Materiales las tensiones normales se expresan como:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P + q(l - x)}{A}$$

y las deformaciones longitudinales, teniendo en cuenta la Ley de Hooke $\sigma = E \epsilon$, resultan:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} = \frac{P + q(l - x)}{EA}$$

Teniendo en cuenta que $\epsilon = \frac{du}{dx}$ se puede escribir

$$u(x) = \int \frac{P + q(l - x)}{EA} dx + C$$

Integrando queda:

$$u(x) = \frac{P x + q \left(l x - \frac{x^2}{2} \right)}{EA} + C$$

Debido a las condiciones de contorno indicadas en la figura 1 en $x = 0$, $u(0) = 0$ y entonces es inmediato verificar la nulidad de la constante $C = 0$. Finalmente, la solución del problema, expresada como una función de los desplazamientos longitudinales queda:

$$u(x) = \frac{P x + q \left(l x - \frac{x^2}{2} \right)}{EA}$$

Puede observarse que la solución tiene un término lineal en la carga P y otro cuadrático en la carga q . A partir de la solución obtenida es inmediato conocer la función que representa a las deformaciones longitudinales:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{d \left[\frac{P x + q \left(l x - \frac{x^2}{2} \right)}{EA} \right]}{dx} = \frac{1}{EA} [P + q(l - x)]$$

La ecuación diferencial de la barra resulta ahora:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q = 0$$

Que es una ecuación diferencial ordinaria homogénea de segundo orden, conocida en Matemática como la *forma fuerte* del problema ya que se debe satisfacer en todos los puntos del intervalo de interés, en nuestro caso, de todos los puntos de la barra.

3. Principio de la Mínima Energía Potencial Total

En este caso se debe minimizar un funcional que describa el problema de manera adecuada. Para ello se escoge el *Principio de la Mínima Energía Potencial Total*. La Mínima Energía Potencial Total π se expresa como:

$$\pi = U - W$$

Donde U es la energía interna almacenada en la barra y W el trabajo de las fuerzas exteriores.

Para el problema de la barra 1D, la relación entre tensiones y deformaciones está definida mediante la Ley de Hooke:

$$\sigma = E \varepsilon$$

Donde $\sigma = \frac{N}{A}$ es la tensión en la sección normal al eje de la barra debida al esfuerzo normal N que actúa sobre la misma, A es el área de la sección transversal de la barra, E el módulo de elasticidad del material y ε expresa a las deformaciones que sufre la barra.

Para este problema, la energía interna específica, o energía por unidad de volumen, U_e resulta, de acuerdo con el gráfico de la figura 2:

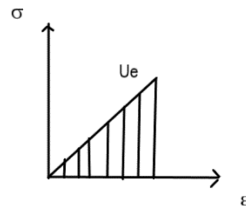


Figura 2. Energía específica de deformación U_e

$$U_e = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

La energía total U se obtiene integrando la energía específica U_e en el volumen V de la barra:

$$U = \int_V U_e = \int_0^l U_e dV = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma \varepsilon A dx = \frac{A E}{2} \int_0^l \varepsilon^2 dx$$

El trabajo de las fuerzas exteriores se escribe como:

$$W = \int_0^l q u dx + \sum P_i u_i$$

Donde q es la carga repartida uniforme que actúa sobre la barra, u expresa la función desplazamiento del problema y P_i y u_i indican las cargas concentradas impuestas a la barra y sus puntos de aplicación, respectivamente.

Luego la expresión de la Mínima Energía Potencial Total π se expresa como:

$$\pi = U - W = \frac{AE}{2} \int_0^l \varepsilon^2 dx - \int_0^l q u dx - \sum P_i u_i$$

El principio de la Mínima Energía Potencial Total establece que la solución del problema se encuentra para un estado de u y $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ que satisfagan:

$$\frac{\partial \pi}{\partial u} = 0$$

Generalmente es muy difícil encontrar una solución analítica a este problema para los datos y características de los problemas de interés ingenieril. Luego se recurre a Métodos Numéricos, como puede ser el método de Rayleigh-Ritz o el Método de Elementos Finitos, que se verá más adelante.

4. Solución mediante el Método de Rayleigh-Ritz

El método de Rayleigh-Ritz se basa en proponer soluciones aproximadas. Para ello pueden emplearse funciones trigonométricas o polinomios. En este caso resulta práctico considerar una secuencia de soluciones \hat{u}_i que aproximan a la solución analítica u del problema. Por ejemplo, pueden considerarse soluciones lineales y cuadráticas:

i) $\hat{u}_1 = a_1 x$

ii) $\hat{u}_2 = a_1 x + a_2 x^2$

Puede observarse que las soluciones *aproximantes*, se plantean como el producto de funciones conocidas por constantes a_i desconocidas que constituyen las incógnitas del problema *aproximado*. Si se reemplaza la función u por la función aproximante correspondiente, pueden obtenerse expresiones aproximadas para la energía Potencial Total π , la energía interna U y el trabajo de las fuerzas exteriores W como:

$$\hat{\pi} = \hat{U} - \hat{W} = \frac{EA}{2} \int_0^l \hat{\varepsilon}^2 dx - q \int_0^l \hat{u} dx - \sum P_i \hat{u}_i$$

En la cual $\hat{\varepsilon} = \frac{d\hat{u}}{dx}$ y \hat{u}_i indica el desplazamiento del punto de aplicación de la carga P_i .

Es importante destacar que el funcional dado por el potencial π es una forma integral, que se satisface en un sentido promediado. Más aún, el integrando está ahora asociado a la derivada $\hat{\varepsilon} = \frac{d\hat{u}}{dx}$, con lo cual las funciones de aproximación de Rayleigh Ritz tienen menos exigencias que las que impone la ecuación diferencial del problema. A esta forma integral, por las razones indicadas, se la conoce en Matemática como la forma débil del problema y es el punto de partida para el empleo de los Métodos Numéricos en problemas gobernados por ecuaciones diferenciales.

Reemplazando ahora \hat{u} por $\hat{u}_1 = a_1 x$ y teniendo en cuenta que $\hat{\varepsilon}_1 = \frac{d\hat{u}_1}{dx} = \frac{d(a_1 x)}{dx} = a_1$, queda:

$$\hat{\pi}_1 = \hat{U}_1 - \hat{W}_1 = \frac{EA}{2} \int_0^l \hat{\varepsilon}_1^2 dx - q \int_0^l \hat{u}_1 dx - P a_1 l$$

En la expresión aproximada $\hat{\pi}_1$ el trabajo de las fuerzas exteriores se particularizó para el problema de interés, que posee una carga concentrada en el extremo $x = l$. Para dicho punto resulta: $\hat{u}_l = a_1 l$.

Ahora se puede plantear la condición de minimización que expresa el Principio de la Mínima Energía Potencial Total para el caso aproximado como:

$$\frac{\partial \hat{\pi}_1}{\partial a_1} = 0$$

Que se escribe según:

$$\frac{\partial \hat{\pi}_1}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \left(\frac{EA}{2} \int_0^l a_1^2 dx - q \int_0^l a_1 x dx - P a_1 l \right)}{\partial a_1} = 0$$

Calculando la derivada e integrando, resulta:

$$EA a_1 l - q \frac{l^2}{2} - P l = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{ql}{2} \right)$$

Entonces, la solución aproximada y su derivada quedan:

$$\hat{u}_1 = a_1 x = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{ql}{2} \right) x; \hat{\varepsilon}_1 = \frac{d\hat{u}_1}{dx} = a_1 = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{ql}{2} \right)$$

Puede observarse que la solución obtenida, como era de esperar, es lineal en la variable independiente x . El término correspondiente a la carga concentrada P es exacto, pero el término asociado a la carga repartida q es aproximado. Particularizando para el extremo de la viga $x = l$ resulta:

$$\hat{u}_l = a_1 l = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{ql}{2} \right) l = \frac{1}{EA} \left(P l + \frac{ql^2}{2} \right)$$

Resultado que coincide con la solución exacta en dicho punto. Fácilmente puede comprobarse, por ejemplo, que la solución aproximada no coincide con la exacta para $x = \frac{l}{2}$.

También es importante analizar la derivada de la función solución aproximada, ya que la misma indirectamente fija el valor de la tensión. En este caso, como se ha visto antes, la derivada es constante. Para $x = \frac{l}{2}$ coincide las derivadas de la solución exacta con la derivada de la solución aproximada.

Ahora corresponde repetir el procedimiento para el caso ii) $\hat{u}_2 = a_1 x + a_2 x^2$. En este caso la derivada resulta:

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{d\hat{u}_2}{dx} = \frac{d(a_1 x + a_2 x^2)}{dx} = a_1 + 2 a_2 x$$

Luego el Potencial $\hat{\pi}_2$ resulta:

$$\hat{\pi}_2 = \hat{U}_2 - \hat{W}_2 = \frac{EA}{2} \int_0^l \hat{\varepsilon}_2^2 dx - q \int_0^l \hat{u}_2 dx - P (a_1 + 2 a_2 l)$$

En este caso la minimización del funcional expresado por $\hat{\pi}_2$ impone:

$$\frac{\partial \hat{\pi}_2}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \hat{\pi}_2}{\partial a_2} = 0$$

Entonces:

$$\frac{\partial \hat{\pi}_2}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \left[\frac{EA}{2} \int_0^l (a_1 + 2 a_2 x)^2 dx - q \int_0^l (a_1 x + a_2 x^2) dx - P(a_1 l + a_2 l^2) \right]}{\partial a_1} = 0$$

La derivada resulta:

$$EA \int_0^l (a_1 + 2 a_2 x) dx - q \int_0^l x dx - P l = 0$$

Integrando se obtiene la primera ecuación:

$$EA (a_1 l + a_2 l^2) - q \frac{l^2}{2} - P l = EA (a_1 + a_2 l) - q \frac{l}{2} - P = 0 \quad (1)$$

De la misma forma:

$$\frac{\partial \hat{\pi}_2}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \left[\frac{EA}{2} \int_0^l (a_1 + 2 a_2 x)^2 dx - q \int_0^l (a_1 x + a_2 x^2) dx - P(a_1 l + a_2 l^2) \right]}{\partial a_2} = 0$$

La derivada resulta:

$$EA \int_0^l (a_1 + 2 a_2 x) 2 x dx - q \int_0^l x^2 dx - P l^2 = 0$$

Integrando se obtiene la segunda ecuación:

$$EA (a_1 l^2 + \frac{4}{3} a_2 l^3) - q \frac{l^3}{3} - P l^2 = EA (a_1 + \frac{4}{3} a_2 l) - q \frac{l}{3} - P = 0 \quad (2)$$

Luego, el sistema de ecuaciones resultante queda:

$$\left. \begin{aligned} EA (a_1 + a_2 l) - q \frac{l}{2} - P &= 0 \\ EA (a_1 + \frac{4}{3} a_2 l) - q \frac{l}{3} - P &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= \frac{P + q l}{EA} \\ a_2 &= -\frac{q}{2EA} \end{aligned}$$

Luego la solución resulta:

$$\hat{u}_2 = a_1 x + a_2 x^2 = \frac{1}{EA} \left[(P + q l) x - \frac{q}{2} x^2 \right] = \frac{1}{EA} \left[P x + q \left(l x - \frac{x^2}{2} \right) \right]$$

Que coincide con la solución original. Caben las siguientes consideraciones:

i) Cuando se aproxima con una función lineal, la respuesta es lineal y la solución aproximada coincide con la solución exacta para algunos puntos particulares. De la misma manera, para una solución aproximada lineal, la derivada correspondiente es constante e igual a la derivada de la solución exacta en el centro del intervalo de interés.

ii) Si la solución aproximante es cuadrática, hay mayor trabajo algebraico y de cálculo, pero se captura la solución exacta para problemas cuya solución analítica es cuadrática.

4. Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos brinda la solución numérica de distintos problemas de interés, en este caso el de la barra 1D sometida a esfuerzo normal. El método se basa en construir soluciones aproximadas, similares a las vistas en el Método de Rayleigh-Ritz, pero además agrega otra consideración esencial, cual es la discretización espacial.

4.1 Consideraciones generales.

El concepto de discretización espacial consiste en particionar el intervalo de interés en un conjunto de subintervalos que lo cubran sin generar ni solapamientos ni huecos. Dichos subintervalos están definidos por los llamados puntos de control o *nodos* que se disponen a tal efecto. Entre los diferentes nodos se conectan elementos.

Las funciones de aproximación tienen validez para cada uno de los elementos mencionados. Nótese, en el ejemplo de la figura 3, que la barra de interés, se ha *discretizado* o subdividido en tres elementos.

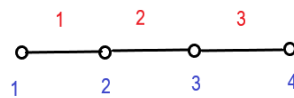


Figura 3. Discretización mediante Elementos Finitos. Tres elementos de 2 nodos (indicados en color rojo) y 4 nodos (indicados en color azul)

La calidad de los resultados de un problema modelado por Elementos Finitos, depende de la discretización de la malla, o si se prefiere de la cantidad de nodos y elementos. En la Figura 4 se muestra, para un problema genérico cuya solución es $u(x)$ las aproximaciones que se obtienen por Elementos Finitos para dos y tres nodos, respectivamente, que se ilustran en color rojo (2 nodos) y verde (3 nodos).

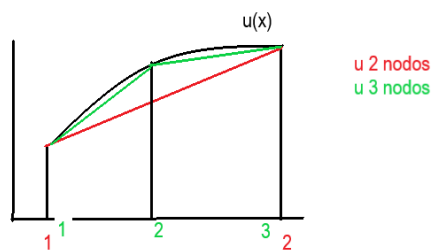


Figura 4. Calidad de la aproximación por Elementos Finitos en función de la malla utilizada.

En general el error en la solución se mide, en términos de energía, como el área comprendida entre la solución exacta $u(x)$ en negro y las soluciones aproximadas, en rojo para dos nodos y en verde para tres nodos. Puede notarse que al agregar un nodo intermedio, para un problema cuya solución no presenta cambios bruscos, el error disminuye considerablemente. Este efecto se pone de manifiesto todavía más si se refina todavía más la malla, es decir se agregan nodos como se observa en la figura 5

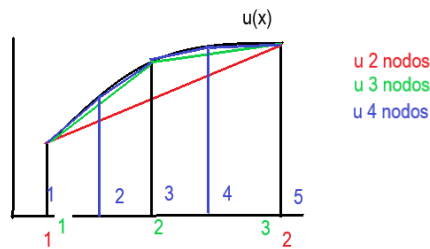


Figura 5. Mejora de la calidad de la aproximación por Elementos Finitos en función de la malla utilizada.

En general, la cantidad y tipo de elementos queda a elección del analista que modela el problema y para ello, es fundamental su experiencia. Es importante destacar que la solución de elementos finitos es continua por trozos. Los valores nodales en la variable principal coinciden en los nodos, pero sus derivadas pueden mostrar diferencias considerables para los elementos adyacentes a un nodo. En general el *salto* en la derivada de la solución aproximada por Elementos Finitos, tiene a disminuir a medida que se refina la malla.

Para un elemento finito dado se puede obtener la Matriz de Rigidez K_e y el vector de cargas f_e elementales, llamados así para distinguirlos de la Matriz de Rigidez y del vector de cargas globales, K y f respectivamente.

En resumen, la Matriz de Rigidez K_e y el vector de cargas elementales f_e se calculan teniendo en cuenta:

- i) Soluciones aproximadas que dependen del tipo de elemento escogido
- ii) Discretización espacial

Que permiten plantear un funcional $\hat{\pi}_e$ que representa la Mínima Energía Potencial Total del elemento, a partir del cual siguiendo un procedimiento similar al planteado para el Método de Rayleigh-Ritz, permite calcular K_e y f_e .

4.2 Elemento de barra 1D de dos nudos: Deducción de K_e y f_e

Los elementos de dos nodos poseen funciones de aproximación, también llamadas funciones de interpolación o *funciones de forma*, como se las denomina habitualmente.

Las funciones de forma son de *soporte compacto*, es decir que son no nulas en el elemento al cual caracterizan y nulas en el resto del dominio de integración de interés. Además, las funciones de forma toman valor 1 para uno de los nodos y cero para los restantes.

Se acostumbra a denominar mediante N_i a las funciones de forma, donde el subíndice i indica la función de forma correspondiente a cada nodo. Para el elemento de dos nodos existen dos funciones de forma N_1 y N_2 , cuyo gráfico se muestra en la figura 6, y que para las coordenadas locales del elemento se escriben:

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$N_2 = \left(\frac{x}{l}\right)$$

Es inmediato notar que $N_1(0) = 1$ y $N_1(l) = 0$. Análogamente resulta: $N_2(0) = 0$ y $N_2(l) = 1$



Figura 6. Funciones de forma del elemento finito de 2 nudos.

Los desplazamientos en el intervalo de interés del elemento se pueden escribir como:

$$\hat{u}_e = N_1 a_1 + N_2 a_2 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) a_1 + \left(\frac{x}{l}\right) a_2$$

Puede observarse que las funciones de forma son adimensionales, luego las incógnitas a_1 y a_2 tienen el sentido físico de un desplazamiento, en particular los desplazamientos nodales. Los desplazamientos pueden expresarse como un producto de la matriz de funciones de forma \mathbf{N} y el vector de desplazamientos nodales \mathbf{a} . Luego resulta:

$$\hat{u}_e = \mathbf{N} \mathbf{a}$$

Donde la matriz \mathbf{N} y el vector \mathbf{a} se escriben como:

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \left(\frac{x}{l}\right) \right]; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Recordando que las deformaciones $\hat{\epsilon} = \frac{d\hat{u}}{dx}$ resulta:

$$\hat{\epsilon}_e = \frac{d\hat{u}_e}{dx} = \frac{d(\mathbf{N} \mathbf{a})}{dx} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a}$$

Donde la matriz \mathbf{B} es la matriz derivada de las funciones de forma:

$$\mathbf{B} = [B_1 \quad B_2] = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right]$$

El Potencial $\hat{\pi}_e$ para un elemento de barra genérico de 2 nudos se escribe:

$$\hat{\pi}_e = \hat{U}_e - \hat{W}_e = \frac{EA}{2} \int_0^l \hat{\epsilon}_e^2 dx - q \int_0^l \hat{u}_e dx$$

El término $\hat{\epsilon}_e^2$ y los desplazamientos \hat{u}_e pueden expresarse matricialmente como:

$$\hat{\epsilon}_e^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{a}; \quad \hat{u}_e = \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T$$

Luego el potencial $\hat{\pi}_e$ se escribe como:

$$\hat{\pi}_e = \frac{EA}{2} \int_0^l (\mathbf{a}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{a}) dx - q \int_0^l (\mathbf{a}^T \mathbf{N}^T) dx$$

La minimización de la Energía Potencial Total del elemento $\hat{\pi}_e$ se expresa ahora como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\pi}_e}{\partial \mathbf{a}} &= EA \left[\int_0^l (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx \right] \mathbf{a} - q \int_0^l \mathbf{N}^T dx \\
&= EA \left[(\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \int_0^l dx \right] \mathbf{a} - q \int_0^l \mathbf{N}^T dx = \\
&= EA l \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \mathbf{a} - q \int_0^l \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ \left(\frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} dx - \mathbf{f}_P^T
\end{aligned}$$

De donde surgen la matriz de rigidez K_e y el vector de cargas f_e del elemento:

$$\mathbf{K}_e = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}; \mathbf{f}_e = q \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \end{bmatrix}$$

Por supuesto a nivel elemental se cumple:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{a} = \mathbf{f}_e$$

En la mayoría de los casos de interés hay más de un elemento. Entonces las matrices y vectores de carga elementales deben *ensamblarse* para obtener la matriz de rigidez y el vector de cargas globales \mathbf{K} y \mathbf{f} , respectivamente. Para ello puede emplearse un método similar al empleado en MRD y que se ilustrará directamente en un ejercicio. En caso de existir cargas concentradas P las mismas se añaden directamente en el vector de cargas global, en el nudo que corresponda.

4.3 Ejercicio de Aplicación

Se resolverá el problema 2.1 del Ejercicio II, del TP5, utilizando una malla de dos elementos finitos como se muestra en la figura. Luego, en base al ejemplo discutido se podrá resolver el problema con las mallas de 4 y 8 elementos.

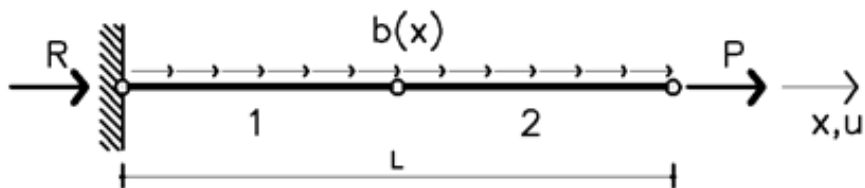


Figura 7. Barra discretizada mediante dos elementos finitos de dos nodos.

Para cada uno de los elementos con que se ha discretizado el problema se debe utilizar la matriz de rigidez K_e y el vector de cargas f_e del elemento, según se ha mostrado en el punto anterior. Es muy importante tener en cuenta que, en este caso dado que hay dos elementos, la longitud de cada elemento resulta $l_e = \frac{L}{2}$ y dicho valor se debe reflejar en la matriz de rigidez y en el vector de cargas de ambos elementos.

$$K_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; f_1 = \frac{ql}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; f_2 = \frac{ql}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estas matrices y vectores, representan, cada una de ellas, a los elementos 1 y 2, como se muestra en la figura

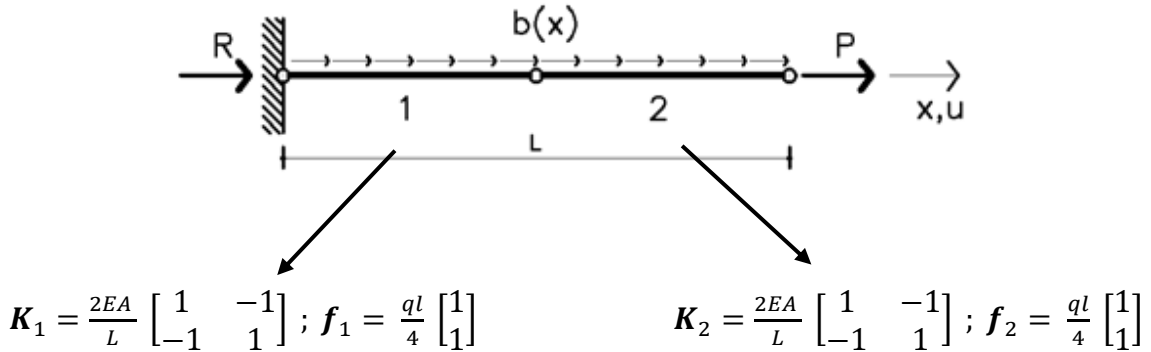


Figura 8. Matrices K_1 y K_2 y vectores f_1 y f_2 para la barra discretizada con dos elementos.

Una vez conocidas las matrices y vectores elementales, se deben ensamblar la matriz y el vector global, que son de 3×3 y 3×1 , respectivamente. Lo que se hace, por inspección es colocar las matrices elementales de 2×2 y los vectores elementales de 2×1 en la matriz y vector globales.

Elemento 1

$$K_{G1} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f_{G1} = \frac{ql}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

$$K_{G2} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad f_{G2} = \frac{ql}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz global K_G y el vector global f_G se obtienen directamente como la suma de las matrices y vectores elementales:

$$K_G = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad f_G = \frac{ql}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Añadiendo el vector de cargas nodales f_P , el sistema de ecuaciones que representa a la barra queda:

$$K_G a = f_G + f_P$$

Que expresado en componentes se escribe:

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{ql}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para tener en cuenta la condición de contorno del nudo 1, que debido al vínculo existente causa los desplazamientos sean nulos, se deben eliminar la primera fila y la primera columna del sistema, ya que $a_1 = 0$. Luego resulta:

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{ql}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema resulta:

$$a_2 = \frac{L}{EA} \left(\frac{P}{2} + \frac{3}{8} qL \right) ; \quad a_3 = \frac{L}{EA} \left(P + \frac{ql}{2} \right)$$

Recordando que la solución analítica es $u(x) = \frac{P x + q \left(l x - \frac{x^2}{2} \right)}{EA}$ resulta:

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{EA} \left(\frac{P}{2} + \frac{3}{8} qL \right) ; \quad u(L) = \frac{L}{EA} \left(P + q \frac{L}{2} \right)$$

Luego, por comparación, se observa que los resultados de elementos finitos coinciden con la solución exacta, aun para una discretización relativamente grosera, como la empleada.

Las deformaciones pueden obtenerse fácilmente haciendo, para cada elemento

$$\hat{\varepsilon}_e = \mathbf{B} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \text{ Teniendo en cuenta que } l = \frac{L}{2} \text{ queda:}$$

$$\hat{\varepsilon}_e = \frac{2}{L} (a_2 - a_1)$$

Qué es la expresión del gradiente de los desplazamientos en cada elemento. Además dicho valor es constante porque las funciones de forma son lineales, y luego su derivada debe ser constante. Finalmente puede observarse que se verifica la deformación ingenieril: $\hat{\varepsilon}_e = \frac{\Delta a}{\Delta x}$. Para los elementos 1 y 2 las deformaciones resultan:

$$\hat{\varepsilon}_1 = \frac{2}{L} \left[\frac{L}{EA} \left(\frac{P}{2} + \frac{3}{8} qL \right) - 0 \right] = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{3ql}{4} \right)$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{2}{L} \left[\frac{L}{EA} \left(P + \frac{ql}{2} \right) - \frac{L}{EA} \left(\frac{P}{2} + \frac{3}{8} qL \right) \right] = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{ql}{4} \right)$$

Si ahora se particulariza la expresión exacta de las deformaciones $\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{1}{EA} [P + q(l-x)]$ para $x = \frac{L}{4}$ y $x = \frac{3L}{4}$, que son las coordenadas de los elementos 1 y 2, resulta:

$$\varepsilon\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{1}{EA} \left[P + q \left(l - \frac{L}{4} \right) \right] = \frac{1}{EA} \left(P + q \frac{3L}{4} \right)$$

$$\varepsilon\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{1}{EA} \left[P + q \left(l - \frac{3L}{4} \right) \right] = \frac{1}{EA} \left(P + q \frac{L}{4} \right)$$

Se obtienen los mismos valores que los calculados mediante Elementos Finitos. Luego surge que las deformaciones, para el elemento de dos nodos, sometido a una carga repartida uniforme, son exactas en el centro del elemento.

Tal como se había comentado en el punto 4.1 la solución por elementos finitos es continua por partes. En los nodos coinciden los valores de los desplazamientos para los elementos adyacentes, pero no sus derivadas, como pudo verse en el cálculo de las deformaciones $\hat{\varepsilon}_1$ y $\hat{\varepsilon}_2$ que son constantes en el intervalo de interés del elemento y, en general, pueden diferir para elementos adyacentes, como se ilustra en la Figura 9.

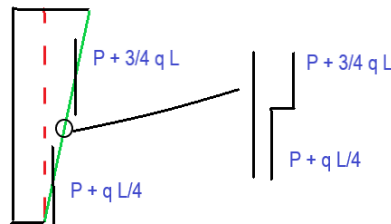


Figura 9. Salto en la derivada de la solución por Elementos Finitos en un nodo. Caso de dos elementos de 2 nodos. Diferencia en las deformaciones.

4.4 Solución del problema anterior utilizando una malla con 4 elementos.

Para el caso de la barra discretizada con una malla de 4 elementos, se deben disponer 4 nudos. Luego se debe tener en cuenta que $l_e = \frac{L}{4}$ y que las matrices de rigidez y el vector de cargas elementales resultan en este caso:

$$\mathbf{K}_i = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{f}_i = \frac{ql}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El proceso de ensamble es similar al problema resuelto en el punto anterior. La matriz global es de 5 x 5 y se debe eliminar la primera fila y la primera columna para tener en cuenta las condiciones de contorno del nudo 1. La solución del problema, expresada en función del vector de incógnitas nodales queda:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{EA} \left(\frac{P}{4} + \frac{7}{32} ql \right) \\ \frac{L}{EA} \left(\frac{P}{2} + \frac{3}{8} ql \right) \\ \frac{L}{EA} \left(\frac{3P}{4} + \frac{15}{32} ql \right) \\ \frac{L}{EA} \left(P + \frac{ql}{2} \right) \end{bmatrix}$$

4.4 Elemento de 3 nudos

La deducción del elemento de 3 nudos requiere introducir conceptos adicionales como las coordenadas paramétricas y el elemento patrón, que se omiten en esta oportunidad por razones del tiempo disponible para el dictado del tema.

Para este elemento hay tres funciones de forma cuadráticas, que se muestran en la figura 10.

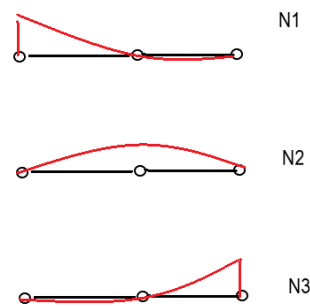


Figura 10. Funciones de forma cuadráticas para el Elemento Finito de 3 nudos.

Para el elemento de 3 nudos, la matriz de rigidez y el vector de cargas pueden calcularse siguiendo un procedimiento similar al caso del elemento de 2 nudos. La expresión de la matriz K_e y del vector de cargas f_e resultan para este caso:

$$K_e = \frac{EA}{6l} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix} ; f_e = \frac{ql}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$