ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 5

Introducción al Método de Elementos Finitos

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

Mayo de 2022

Plan

1: OBJETIVOS DEL TEMA

2: TEMARIO

2: INTRODUCCIÓN AL MEF

3: SISTEMAS INGENIERILES

4: EJEMPLOS SENCILLOS (lapiz y papel)

OBJETIVOS DEL TEMA

- Introducir el Método de Elementos Finitos (MEF).
- Presentar los fundamentos del MEF
- Señalar las etapas del cálculo mediante el MEF.
- Resolver problemas sencillos de interés ingenieril.
- Relacionar con temas previos de la U5: MRD y Programa Analysis

TEMARIO

1. Introducción al Método de Elementos Finitos (MEF). Ejemplos. Breve Historia. Etapas del Cálculo.

2. Análisis de problemas ingenieriles. Sistemas Discretos y continuos. Análisis de Sistemas Discretos. Cálculo Matricial. Ejemplos

3. Sistemas continuos. Método de Ritz. Aproximación. Secuencia minimizante. Ejercicios.

TEMARIO (Continuación)

4. Discretización del dominio. Concepto de MEF. Funciones de forma. Ejemplos. Requisitos de las funciones de forma.

5. Esquema Matricial. Elemento patrón. Coordenadas naturales. Integración numérica. Elementos lineales y cuadráticos. Aplicación a la ecuación de la barra. Ejercicios

INTRODUCCION AL MEF

El MEF se conoce como tal desde finales de la década del 50.

Sus primeras aplicaciones tuvieron lugar en problemas de estructuras y elasticidad

Fue un método ideado por ingenieros, debido a la necesidad de resolver problemas prácticos.

Tuvo un fuerte impulso originado en las industrias aeronaútica y aeroespacial. Boeing 747

INTRODUCCION AL MEF

Posteriormente se avanzó en diferentes campos:

- Fundamentos del MEF.
- Extensión del MEF a otros campos: fluidos, calor, mecánica no lineal, etc.
- Aspectos matemáticos.
- Estimación de error en los resultados.

INTRODUCCION AL MEF

Actualmente es una herramienta esencial en las tareas de ingeniería en ambientes industriales.

Permite resolver estructuras complejas, probar diferentes diseños, ahorrar tiempo, etc.

Se engloba en el contexto de las Técnicas conocidas como CAD-CAM-CAE

INTRODUCCION AL TEMA: Elementos Finitos

Muchas veces surge la siguiente pregunta:

Qué es el Método de Elementos Finitos?

- Una cuestión que preocupa a muchos usuarios del MEF. En general lo utilizan pero no conocen suficientemente bien sus bases.
- No hay una respuesta sencilla, ya que es una técnica que aúna diferentes disciplinas.

INTRODUCCION AL MEF

Podemos responder:

- Es una técnica numérica.
- O bien que es un programa para resolver estructuras (bastante común en Ingeniería Civil).
- Una forma de resolver ODE’s y PDE’s

Estos conceptos se proponen con el fin de brindar la respuesta a la pregunta y destacar los aspectos claves del método.

Intentemos adelantar algunas ideas...

INTRODUCCION AL MEF

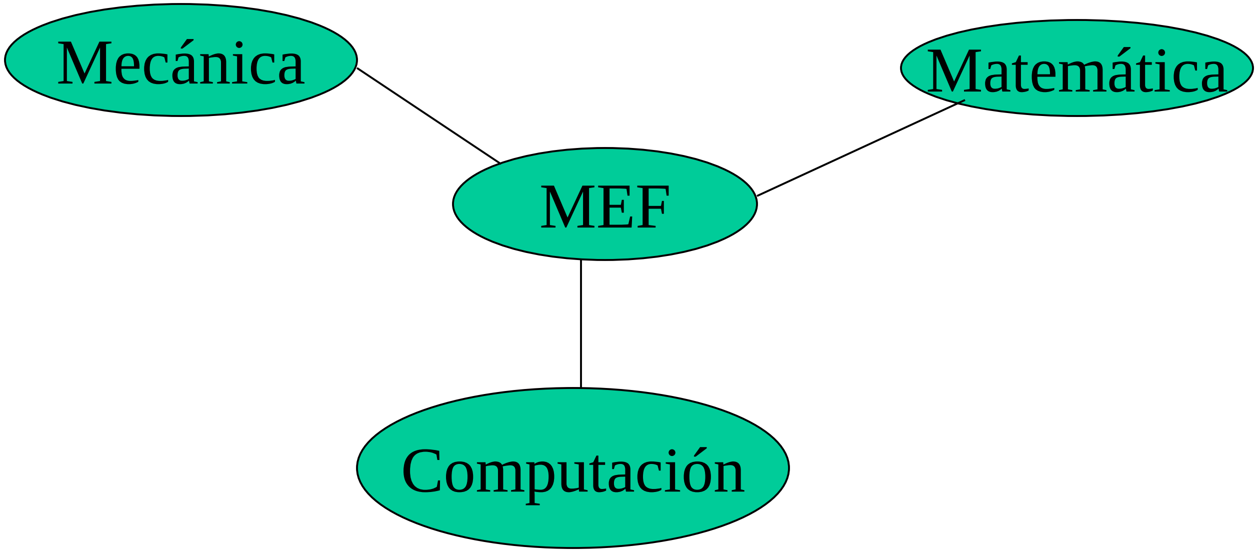
Un problema de ingeniería supone el aporte de diversos campos:

- La Física y la Mecánica: proveen las leyes de comportamiento.
- Matemática: nos brinda ecuaciones para modelar dichas leyes
- Tecnología: nos aporta conocimiento acerca de materiales, técnicas de fabricación, etc.

INTRODUCCION AL TEMA: Elementos Finitos

No siempre pueden resolverse los problemas de matemática de manera analítica

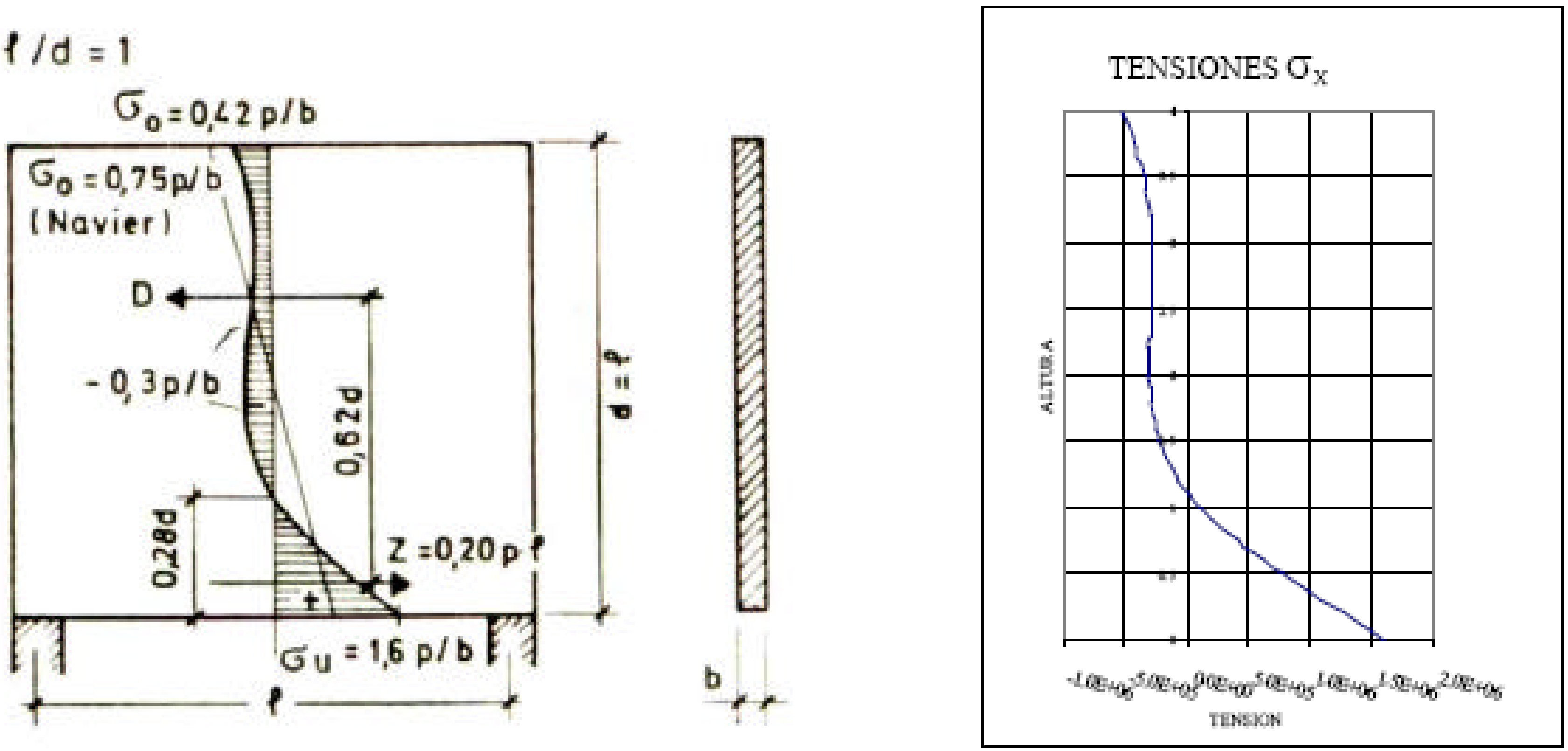
La computadora, vía métodos numéricos, nos permite resolver muchos problemas...



INTRODUCCION AL MEF

Veamos algunos ejemplos...

Viga Pared: Godoy y Ciancio, Mecánica Computacional Vol. XII



a) Modelo teórico b) Modelo numérico

Figura 4: Distribución de tensiones

Viga Pared: Godoy y Ciancio, Mecánica Computacional Vol. XII

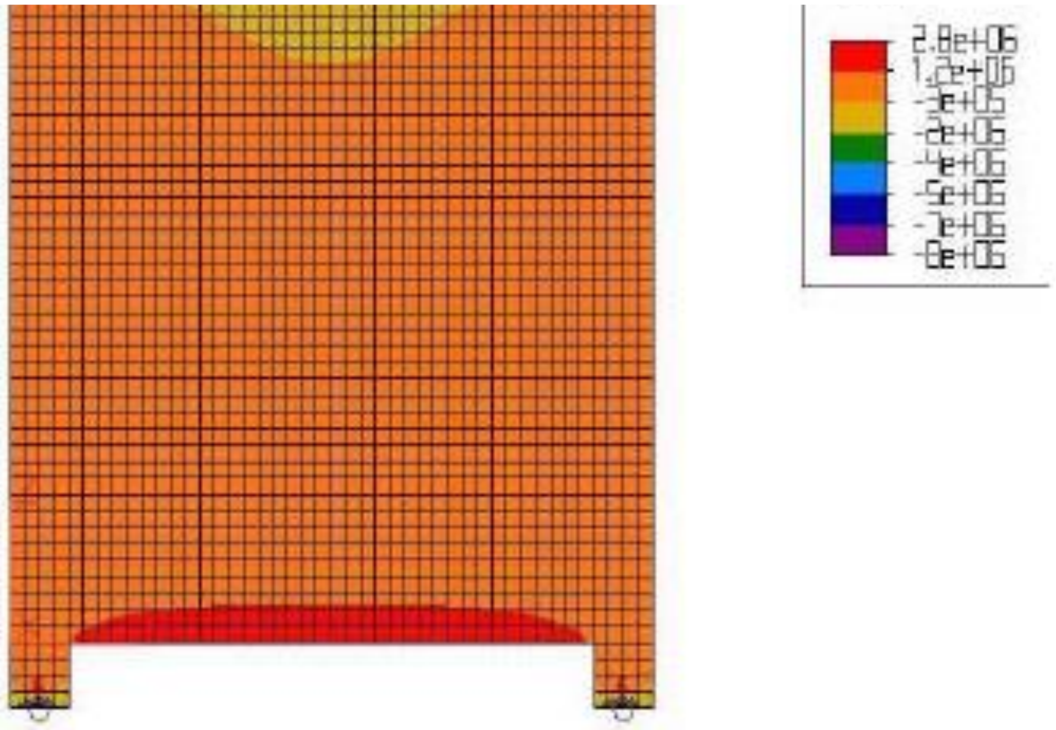
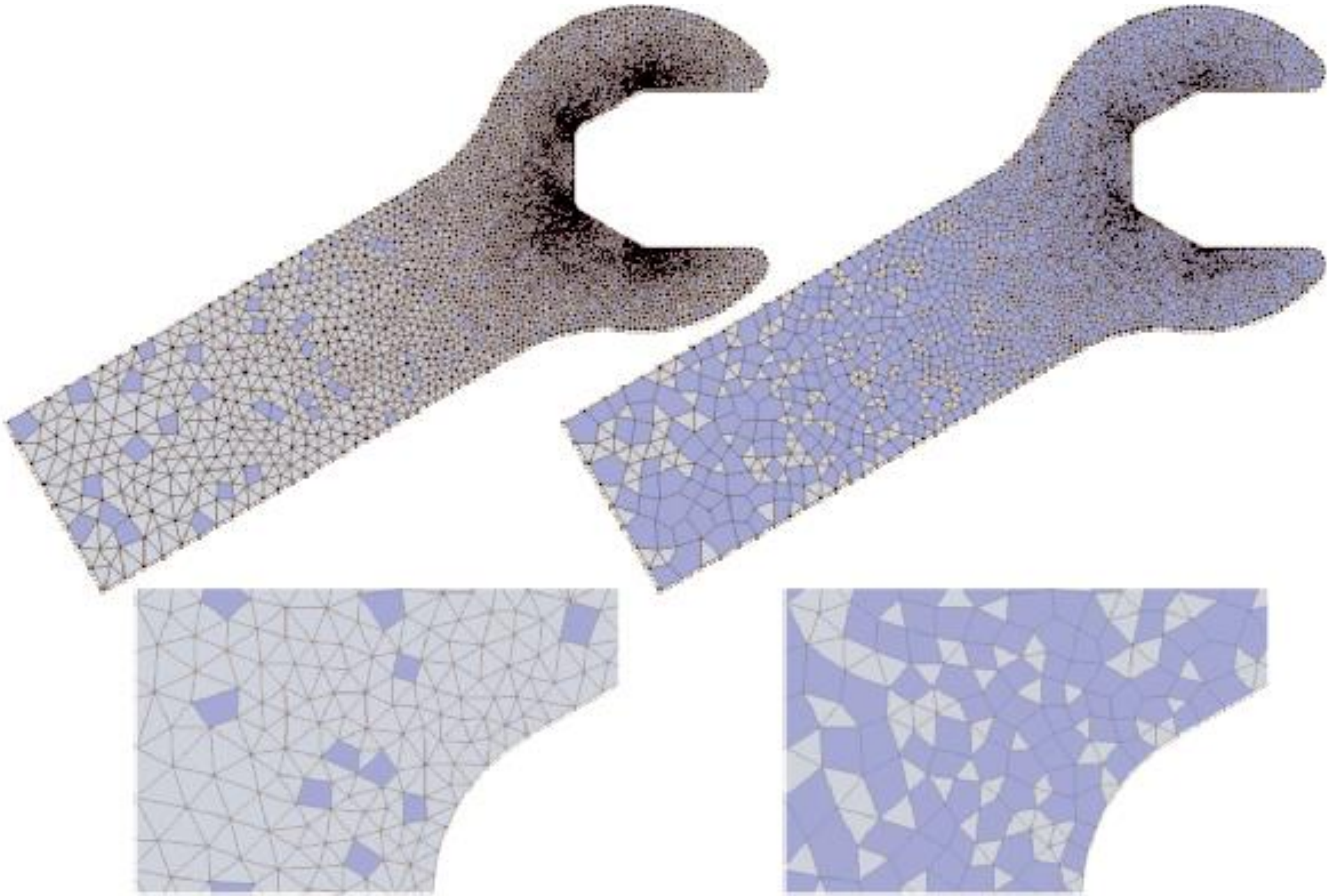
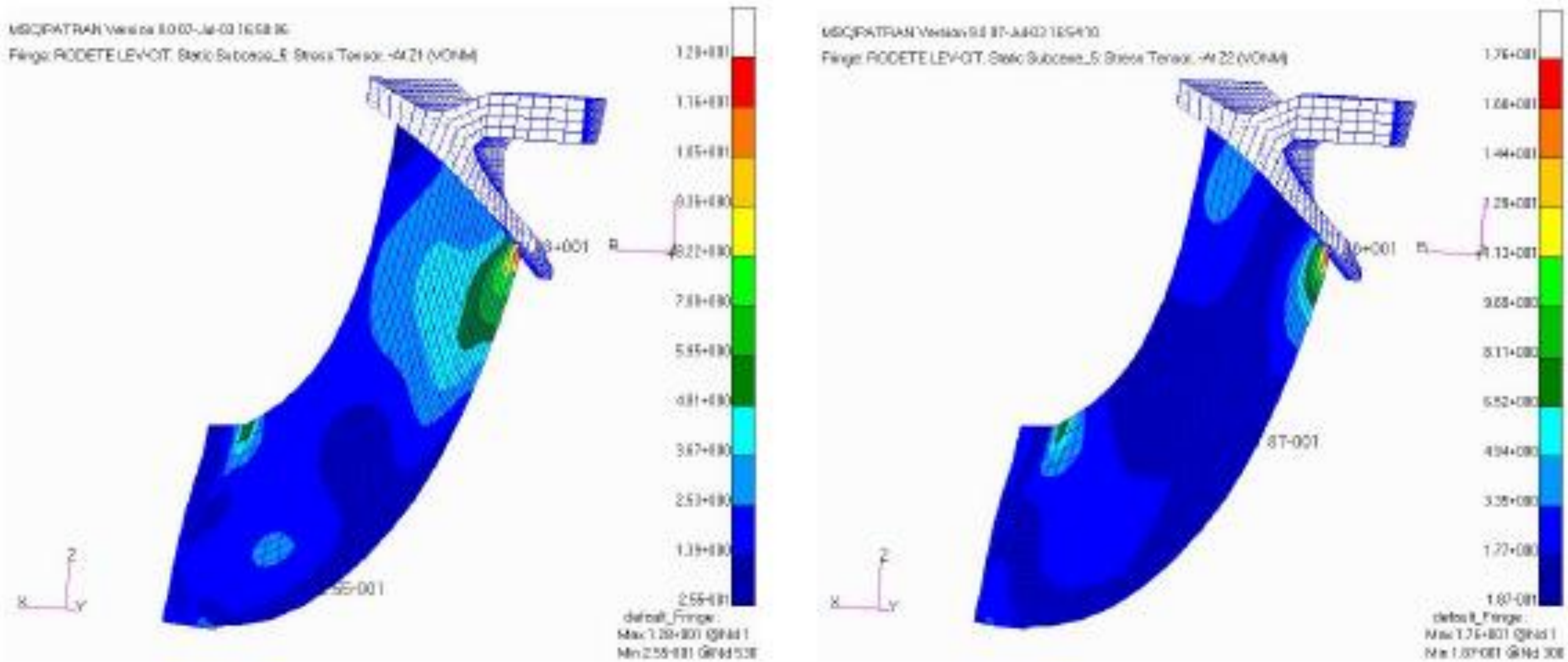


Figura 5: Mapa de tensiones σ_x

Generación de Mallas: Calvo e Idelsohn, Mecánica Computacional Vol. XII



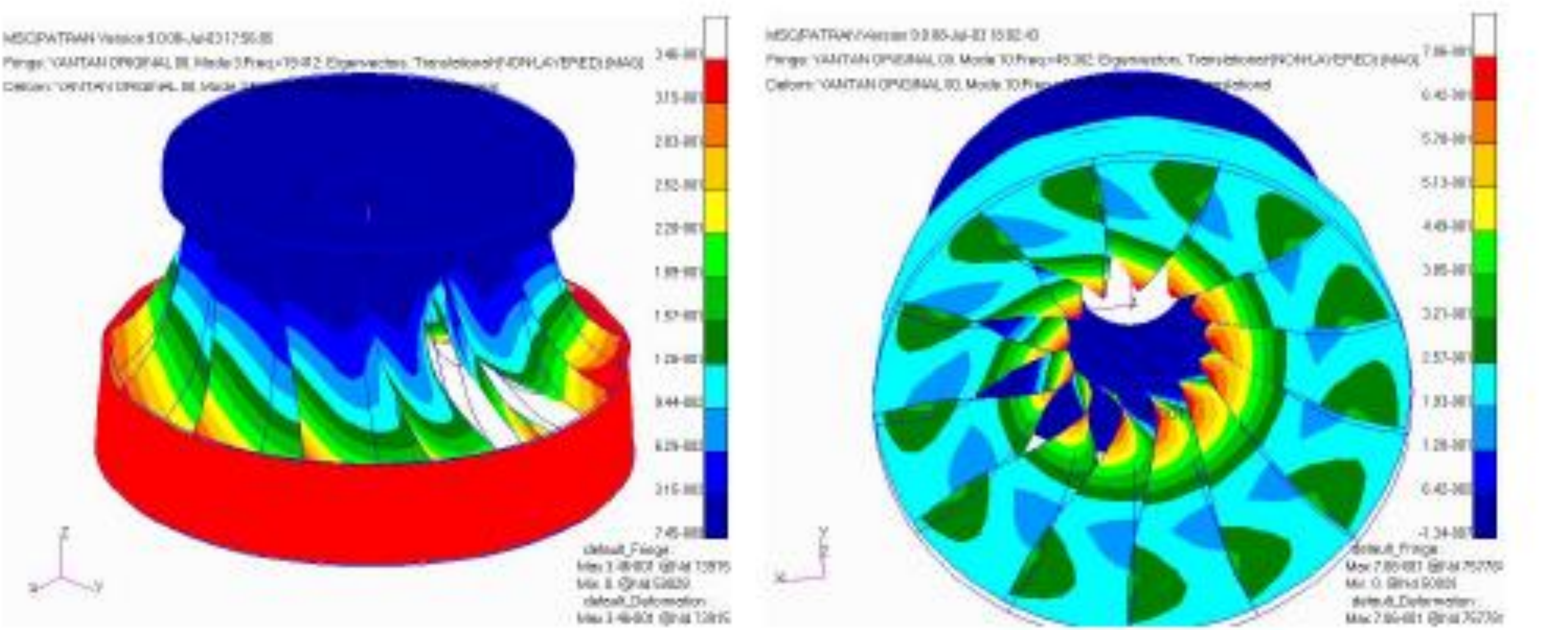
Turbinas: Mirasso y Millán, Mecánica Computacional Vol. XII



(a) Lado presión (b) Lado succión

Figura 3: Tensiones de Von Misses (kg/mm^2) para Condición Nominal.

Turbinas: Mirasso y Millán, Mecánica Computacional Vol. XII

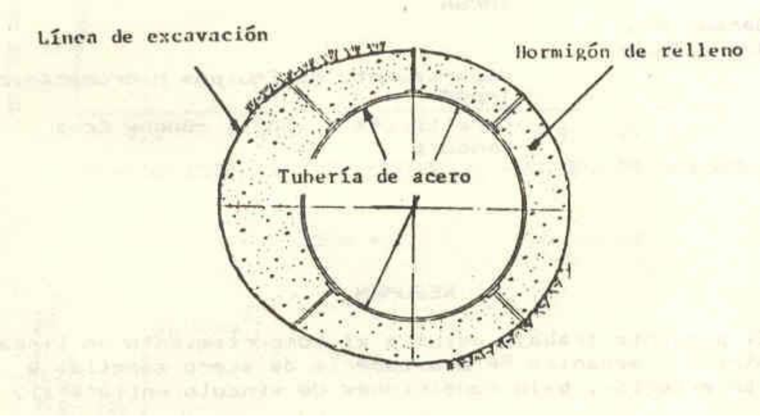


(a) 13.5 Hz en Agua

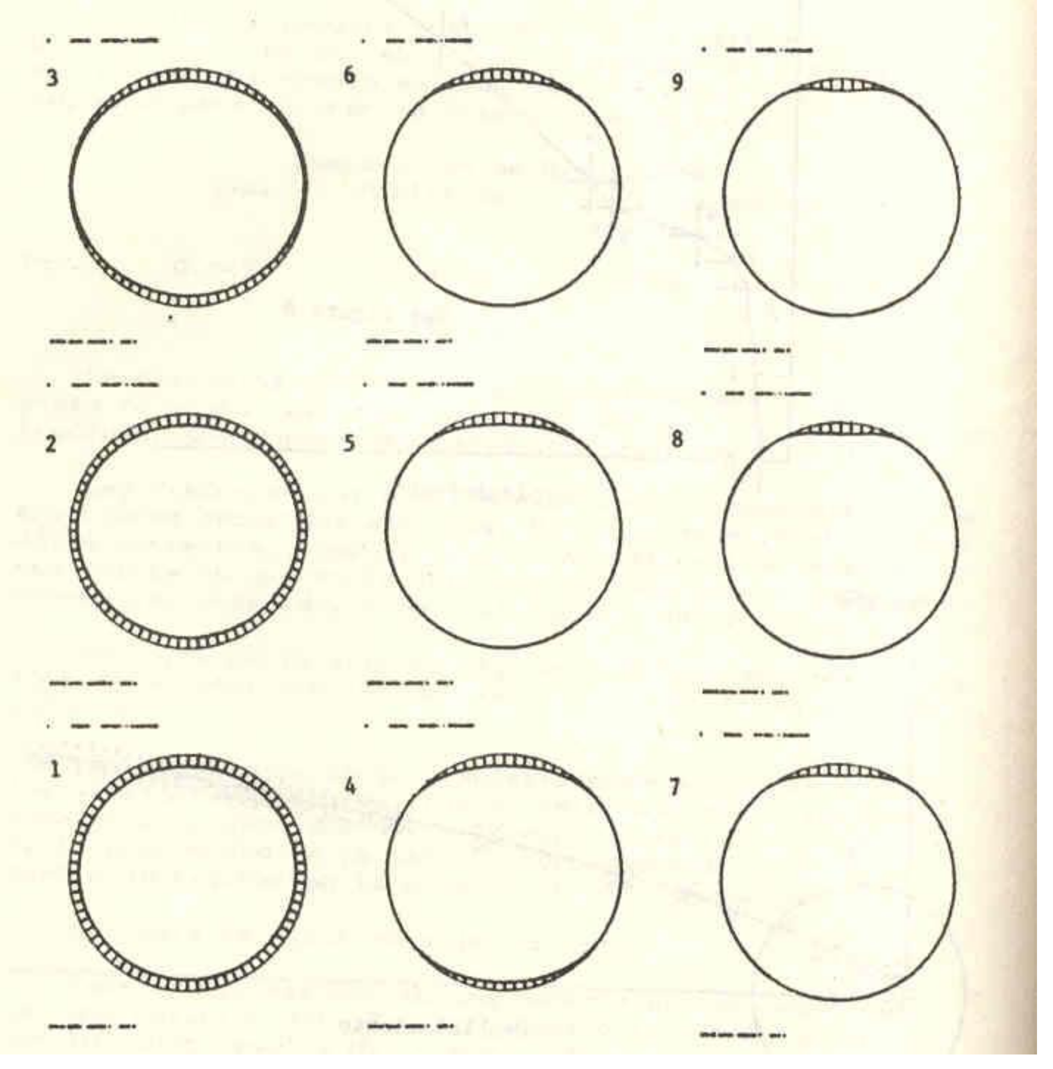
(b) 36.9 Hz en Agua

Figura 8: Modos Naturales de Vibración.

Tubería enterrada: García Garino et al, Mecánica Computacional Vol. X



Tubería enterrada: García Garino et al, Mecánica Computacional Vol. X



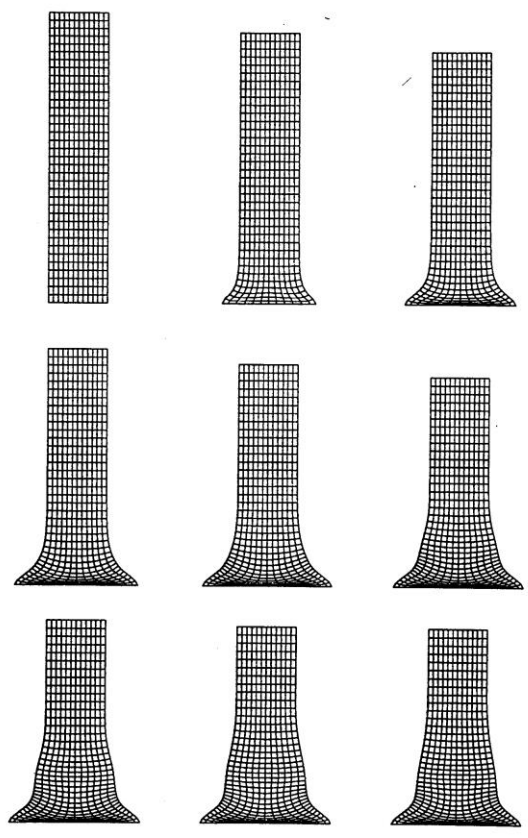
INTRODUCCION AL MEF

Problemas de interés actual:

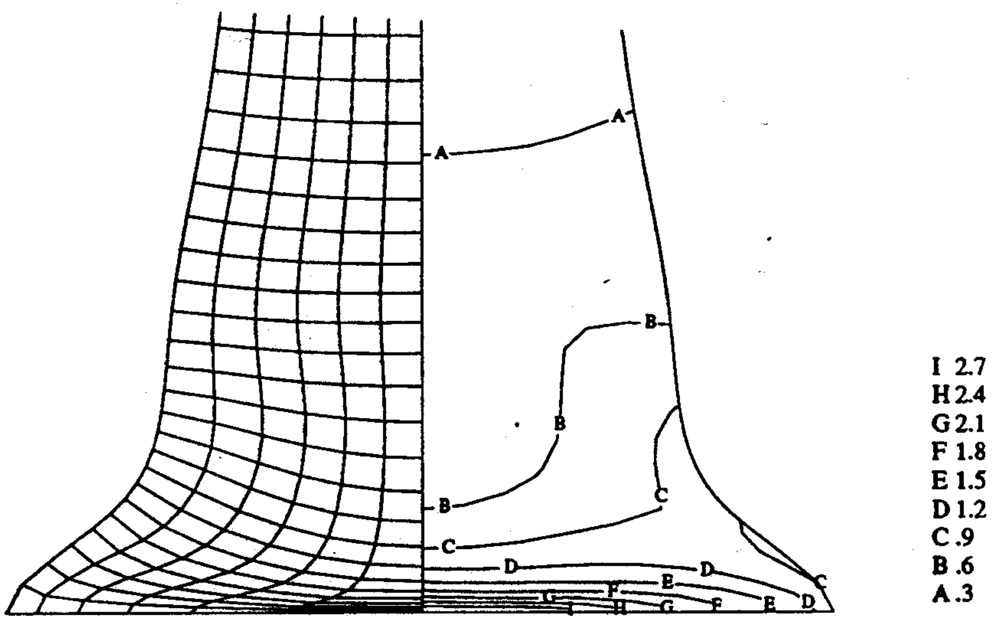
- Choque e impacto
- Caracterización de Materiales
- Biomecánica.

Impacto de una barra elastoplástica (García Garino y otros)

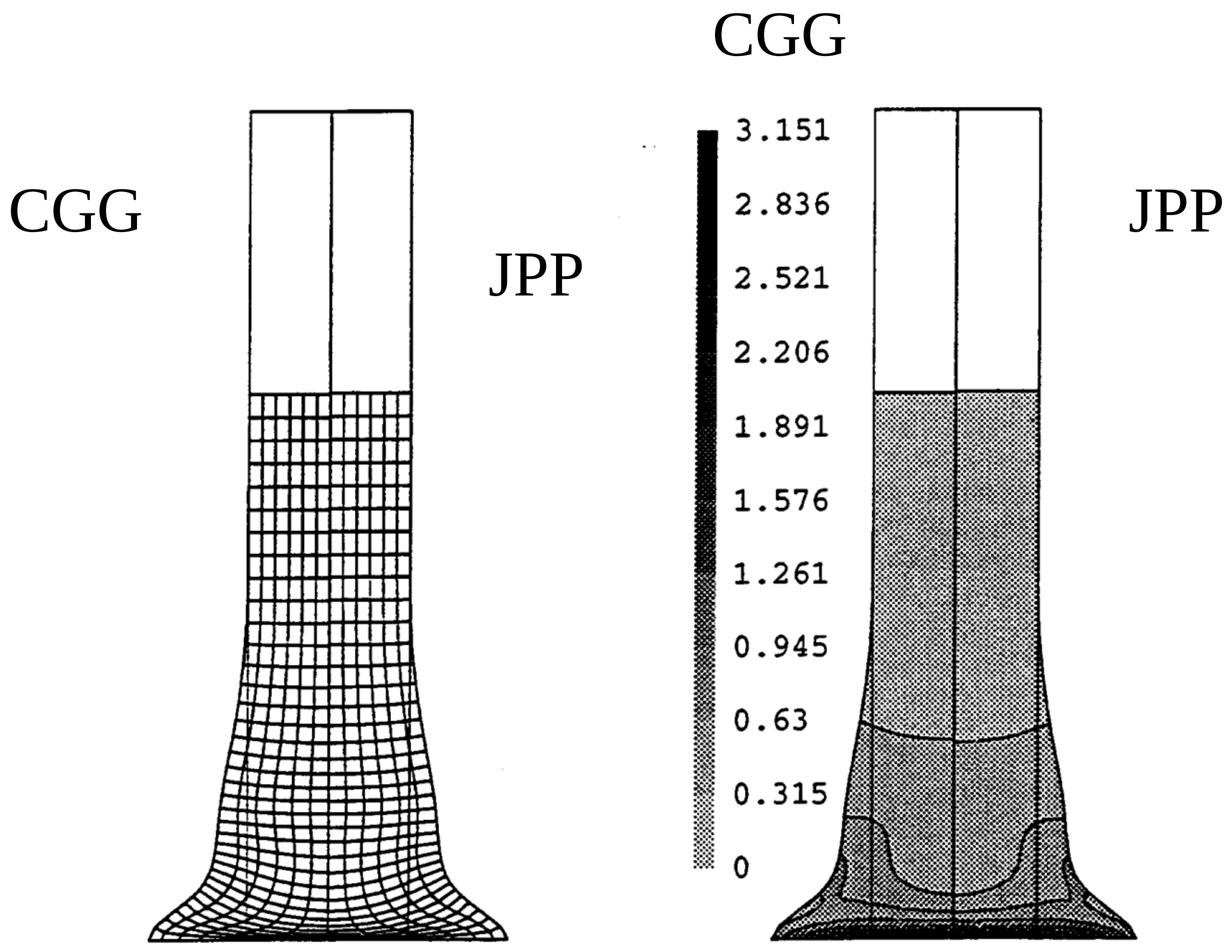
Secuencia del impacto



Impacto de una barra elastoplástica: Deformada final

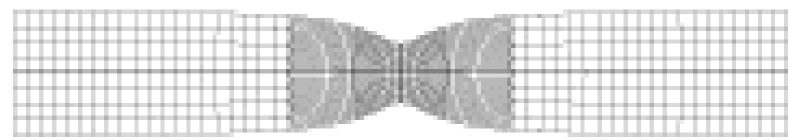


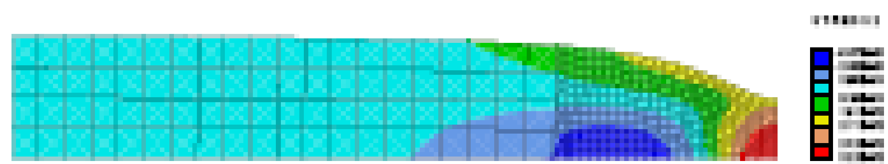
Impacto de una barra elastoplástica: Comparación de resultados



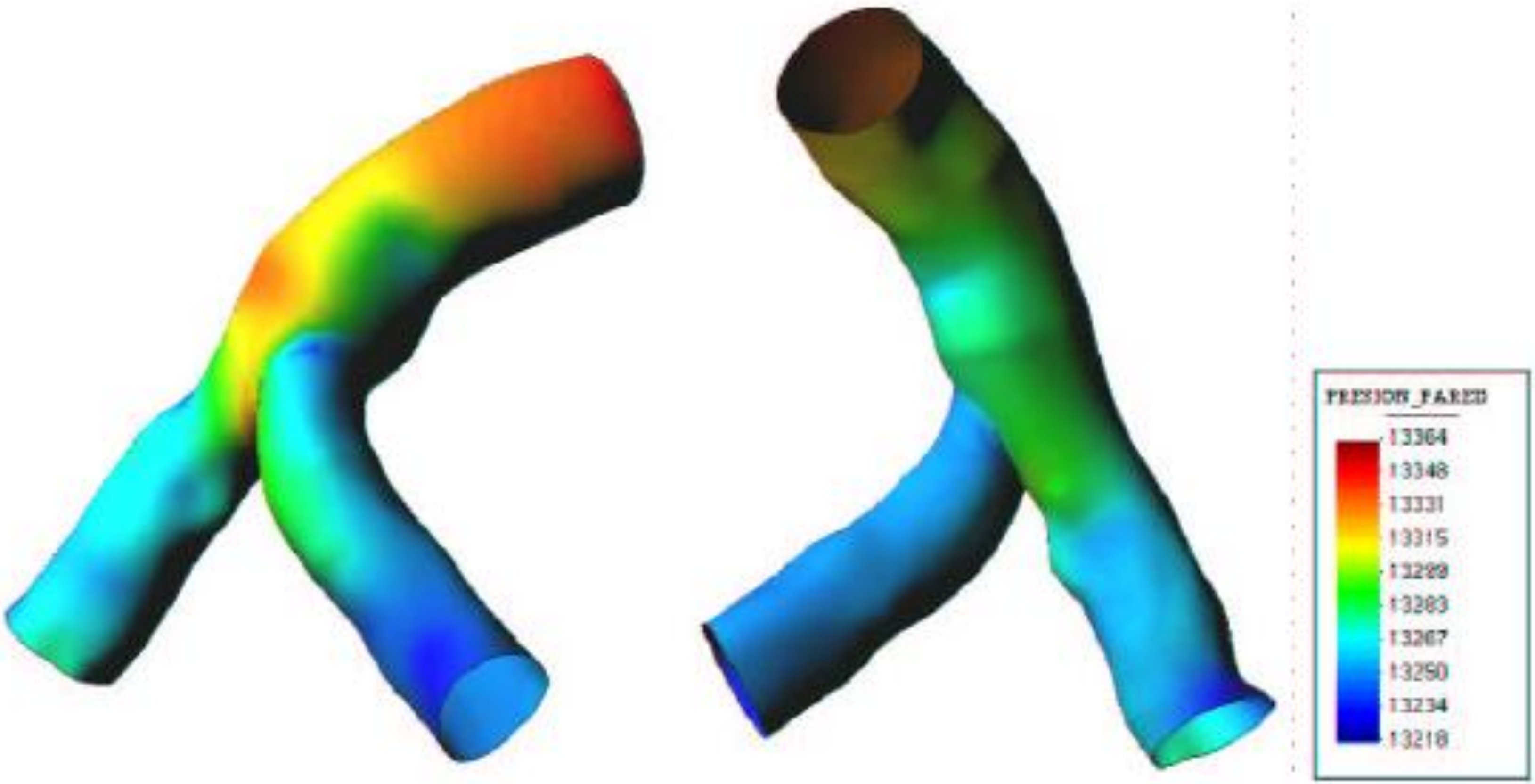
Caracterización de materiales (García Garino, Gabaldón, Goicolea, Mirasso y Raichman)

http://w3.mecanica.upm.es/papers/informe-hyper.pdf





Bifurcación de arterias: J. Rodriguez et al. (UPM, Madrid)



INTRODUCCION AL MEF

Otra pregunta, quizás tan importante como la anterior es preguntarse ¿quien puede utilizar el MEF?

O, si se prefiere ¿que requisitos hacen falta para su uso habitual?

Hay un requisito general:

Conocer mucho la disciplina en la cual se aplica el MEF

Diferentes perfiles para abordar el método...

INTRODUCCION AL MEF

Investigadores

Programadores

Usuarios avanzados

Ingenieros de Diseño

INTRODUCCION AL TEMA: Elementos Finitos

En el contexto de este clase nos interesa el perfil de alguien que se inicia y que en el futuro puede ser un Usuario avanzado o incluso un Investigador (posgrado mediante!).

Para ello intentaremos:

- Conocer los fundamentos.
- Resolver problemas sencillos.
- Capacidad de avanzar a partir de estas clases.

Sistemas Ingenieriles

Sistemas Discretos

Sistemas Continuos

Sistemas Ingenieriles

Sistemas Discretos: se caracterizan mediante un número finito de variables de estado, los cuales proveen la respuesta del sistema real. Se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas.

Sistemas Ingenieriles

Sistemas Continuos: La formulación de las ecuaciones que gobiernan el problema se plantean de manera similar a un sistema discreto. Sin embargo en este caso la respuesta del sistema esta definida mediante ecuaciones diferenciales.

Salvo unos pocos casos sencillos no es posible encontrar soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales que satisfagan las ecuaciones de contorno

En general deben emplearse métodos numéricos que reduzcan el problema continuo a uno discreto.

Sistemas Ingenieriles

El *Sistema real* se idealiza mediante un ensamble de elementos

Equilibrio del elemento: las ecuaciones de equilibrio se establecen en función de las variables de estado.

Ensamble de elementos: la interconexión de los elementos (que conforma el todo del sistema en estudio) permiten establecer un sistema de ecuaciones para las incógnitas del problema.

Solución del sistema: la solución del sistema de ecuaciones resultante permite conocer las variables de estado y caracterizar la respuesta del sistema.

Calculo Matricial

El Cálculo Matricial permite automatizar el proceso de cálculo y análisis de sistemas físicos y de ingeniería

En el caso de estructuras se habla de cálculo matricial de estructuras, pero se puede extender a otras ramas de la física (electricidad, fluidos, calor, etc.)

Se plantea una relación matricial global entre las acciones (fuerzas) y las incógnitas (desplazamientos):

$$K\,u = R$$

donde K es la matriz de rigidez que caracteriza al sistema.

Cálculo Matricial

Los parámetros que definen el comportamiento del sistema que se estudia, en este caso desplazamientos, se denominan grado de libertad del sistema.

El conjunto de grados de libertad del sistema constituye las incógnitas del problema.

La matriz de rigidez K expresa las propiedades del sistema (geometría, propiedades del material, etc.).

En el planteo de la matriz se tiene en cuenta las leyes que gobiernan el sistema, en este caso hablamos de equilibrio de fuerzas.

Cálculo Matricial

El planteo matricial implica desmembrar o aislar los elementos que componen la estructura para estudiar su comportamiento.

Se plantean de esa manera relaciones entre las variables elementales

Posteriormente dichas relaciones elementales se ensamblan para recuperar el comportamiento global.

En muchos casos la discretización es inmediata. En otros depende del calculista y no existe una discretización única (caso de Elementos Finitos).

Cálculo Matricial

A los miembros o componentes elementales se los denomina *elementos*

Para cada elemento se escogen variables independientes, llamadas *desplazamientos nodales*, y a partir de ellas se calculan los *esfuerzos elementales*

Las ecuaciones que relacionan los desplazamientos nodales con los esfuerzos elementales se plantean en forma matricial.

Cálculo Matricial

Dicha relación se escribe de manera genérica como

$$K^{(e)}\, u^{(e)} = f^{(e)}$$

donde:

$K^{(e)}$ es la matriz de rigidez elemental

$u^{(e)}$ son los desplazamientos nodales de cada elemento

$f^{(e)}$ son los esfuerzos elementales

Cálculo Matricial

La respuesta global del sistema se obtiene ensamblando las contribuciones elementales:

$$K = \Sigma \; K^{(e)}$$

$$u = \Sigma \; u^{(e)}$$

$$f = \Sigma \; f^{(e)}$$

que permite obtener el sistema global:

$$K\,u = R$$

MECANICA ESTRUCTURAL

Si recordamos los campos de la mecánica:

Desplazamientos $\boldsymbol{K}$ Fuerzas

Deformaciones Tensiones

Notamos que la matriz de rigidez relaciona los campos de las fuerzas con los desplazamientos. Implícitamente se tienen en cuenta las relaciones entre cada campo.

Sistemas Continuos

Como hemos dicho los sistemas continuos en general están gobernados por ecuaciones diferenciales.

También hemos dicho que en general es necesario recurrir en estos casos a métodos numéricos que brinden una forma de discretizar y/o aproximar el problema.

El Método de Raleygh-Ritz es una posibilidad. También es posible recurrir a otros caminos para caracterizar la respuesta del sistema.

Método de Rayleigh-Ritz

Se debe encontrar una función incógnita y(x) que haga estacionario el funcional:

$$I = \int_0^L f(y, \frac{\partial y}{\partial x}) dx$$

$$y(0) = y(L) = 0$$

Método de Rayleigh-Ritz

El método de Rayleigh-Ritz se basa en aproximar la función desconocida mediante una aproximación adecuada, que contiene un número finito de términos:

$$y \cong \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i$$

Dónde las $\boldsymbol{a_i}$ constantes desconocidas denominadas coordenadas generalizadas y juegan el rol de variables de estado y las $\boldsymbol{\phi_i}$ son funciones conocidas.

Método de Rayleigh-Ritz

Las funciones de prueba deben satisfacer las condiciones de contorno, de la misma forma que lo hace la función incógnita:

$$\phi_i(0) = \phi_i(0) = 0$$

Las funciones deben ser continuas, pero sus derivadas pueden ser discontinuas.

Método de Rayleigh-Ritz

Reemplazando la función desconocida y por la aproximación planteada, en el funcional ***I***, la condición de estacionaridad impone:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0$$

Que conduce a un sistema de n ecuaciones para las n coordenadas generalizadas a_1 , a_2, ...,a_n. Si f es una función de segundo grado, el sistema de ecuaciones es lineal.

Método de Rayleigh-Ritz

Las funciones aproximantes deben satisfacer las siguientes condiciones de admisibilidad:

Continuidad: las funciones deben ser continuas hasta un orden menor a la máxima derivada dentro del integrando

Condiciones de Contorno: cada una de las funciones debe satisfacer las condiciones de contorno principales o esenciales.

Método de Rayleigh-Ritz

La secuencia de funciones debe ser completa:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^L \Big(F-\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i\Big)^2 dx = 0$$

Por completitud se entiende que el error medio cuadrado se anula en el límite.

Los polinomios y las funciones trigonométricas son buenos candidatos para este Método.

Método de Rayleigh-Ritz

Se debe medir la convergencia de la solución aproximada hacia la solución real (desconocida). Para ello se resuelve al menos dos veces el problema planteando una *secuencia minimizante*:

$$y^{(1)} = a_1^{(1)}\phi_1$$

$$y^{(2)} = a_1^{(2)}\phi_1 + a_2^{(2)}\phi_2$$

$$y^{(j)} = a_1^{(j)}\phi_1 + a_2^{(j)}\phi_3 + ... + a_j^{(j)}\phi_j$$

Método de Rayleigh-Ritz

Como cada una de las aproximaciones contiene la solución anterior resulta:

$$I^{(1)} \geq I^{(2)} \geq \ldots \geq I^{(j)}$$