ANALISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 5

Introducción al Método de Elementos Finitos
Parte 2

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

Mayo de 2022

PLAN

1. Problema de la barra 1D. Solución por Resistencia de Materiales

2. Ecuación diferencial del problema

3. Principio Mínima Energía Potencial Total

4. Aproximacion por Rayleigh Ritz

5. Elementos Finitos

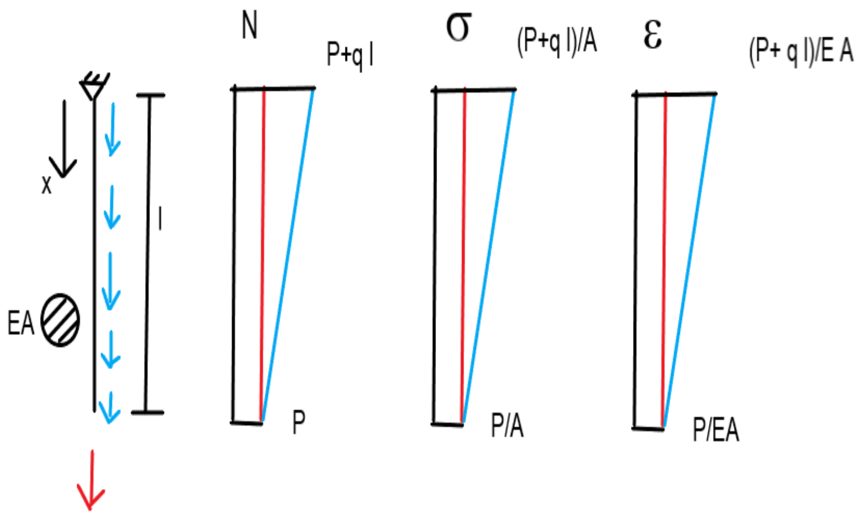
5.1 Consideraciones Generales

5.2 Deducción elemento 2 nudos

5.3-5.4 Problemas de Aplicación

5.5 Elemento de 3 nudos

1. Problema de la barra 1D.



$$N\ (x) = P + q\ (l - x)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P + q\ (l - x)}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} = \frac{P + q\ (l - x)}{EA}$$

1. Problema de la barra 1D.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} = \frac{P + q\,(l - x)}{EA} \qquad\qquad \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$u(x) = \int \frac{P + q\,(l - x)}{EA}\, dx + C$$

$$u(x) = \frac{P\,x + q\left(l\,x - \dfrac{x^2}{2}\right)}{EA} + C$$

Por condiciones de contorno (vínculo):$x = 0$, $u(0) = 0$. Luego resulta $C = 0$.

$$u(x) = \frac{P\,x + q\left(l\,x - \dfrac{x^2}{2}\right)}{EA}$$

2. Ecuación diferencial del problema.

Derivando dos veces $u(x)$ se obtiene la Ec. Diferencial del problema:

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + q = 0$$

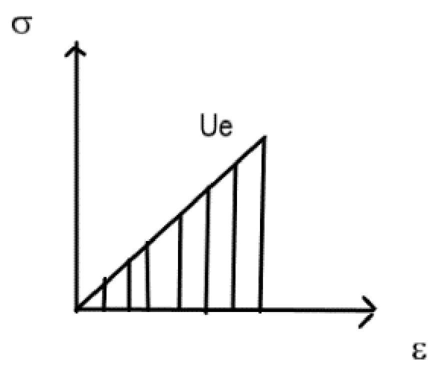
Que es una ecuación diferencial ordinaria homogénea de segundo orden, conocida en Matemática como la *forma fuerte* del problema ya que se debe satisfacer en todos los puntos del intervalo de interés, en nuestro caso, en todos los puntos de la barra.

3. Principio de Mínima Energía Potencial Total

$$\pi = U - W$$

Donde U es la energía interna almacenada en la barra y W el trabajo de las fuerzas exteriores. La relación entre tensiones y deformaciones está definida mediante la Ley de Hooke:

$$\sigma = E\ \varepsilon$$



$$U_e = \frac{1}{2}\ \sigma\ \varepsilon$$

3. Principio de Mínima Energía Potencial Total

La energía interna U se obtiene integrando la energía específica en el volumen del sólido:

$$U = \int_V U_e = \int_0 U_e \, dV = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma \, \varepsilon \, A \, dx = \frac{A\,E}{2} \int_0^l \varepsilon^2 \, dx$$

El trabajo de las fuerzas exteriores se escribe como:

$$W = \int_o^l q \, u \, dx + \sum P_i \, u_i$$

El Potencial π queda :

$$\pi = U - W = \frac{A\,E}{2} \int_0^l \varepsilon^2 \, dx - \int_o^l q \, u \, dx - \sum P_i \, u_i$$

4. Aplicación del Principio de Rayleigh-Ritz

La minimización de π se obtiene haciendo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial u} = 0$$

Se proponen las siguientes funciones aproximantes de Rayleigh-Ritz

i) $\hat{u}_1 = a_1 x$

ii) $\hat{u}_2 = a_1 x + a_2 x^2$

$$\hat{\pi} = \widehat{U} - \widehat{W} = \frac{EA}{2} \int_0^l \hat{\varepsilon}^2 \, dx - q \int_0^l \hat{u} \, dx - \sum P_i \, \hat{u}_i$$

En la cual $\hat{\varepsilon} = \frac{d\hat{u}}{dx}$ y $\hat{u}_i$ indica el desplazamiento del punto de aplicación de la carga P_i.

4. Aplicación del Principio de Rayleigh-Ritz

$$\hat{\pi} = \widehat{U} - \widehat{W} = \frac{EA}{2}\int_0^l \hat{\varepsilon}^2\, dx - q\int_0^l \hat{u}\ dx - \sum P_i\, \hat{u}_i$$

Es importante destacar que el funcional dado por el potencial π es una forma integral, que se satisface en un sentido promediado. Más aún, el integrando está ahora asociado a la derivada $\hat{\varepsilon} = \frac{d\hat{u}}{dx}$, con lo cual las funciones de aproximación de Rayleigh Ritz tienen menos exigencias que las que impone la ecuación diferencial del problema. A esta forma integral, por las razones indicadas, se la conoce en Matemática como la forma débil del problema y es el punto de partida para el empleo de los Métodos Numéricos en problemas gobernados por ecuaciones diferenciales.

4. Aplicación del Principio de Rayleigh-Ritz

Reemplazando ahora $\hat{u}$ por $\hat{u}_1 = a_1 x$ y teniendo en cuenta que $\hat{\varepsilon}_1 = \frac{d\hat{u}_1}{dx} = \frac{d(a_1 x)}{dx} = a_1$, queda:

$$\hat{\pi}_1 = \widehat{U}_1 - \widehat{W}_1 = \frac{EA}{2} \int_0^l \hat{\varepsilon}_1^2 \, dx - q \int_0^l \hat{u}_1 \, dx - P \, a_1 \, l$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}_1}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\left(\frac{EA}{2} \int_0^l a_1{}^2 \, dx - q \int_0^l a_1 \, x \, dx - P \, a_1 \, l\right)}{\partial a_1} = 0$$

$$EA \, a_1 l - q \, \frac{l^2}{2} - P \, l = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{ql}{2}\right)$$

4. Aplicación del Principio de Rayleigh-Ritz

$$\hat{u}_1 = a_1 x = \frac{1}{EA}\left(P + \frac{ql}{2}\right) x \; ; \; \hat{\varepsilon}_1 = \frac{d\hat{u}_1}{dx} = a_1 = \frac{1}{EA}\left(P + \frac{ql}{2}\right)$$

$$\hat{u}_l = a_1 l = \frac{1}{EA}\left(P + \frac{ql}{2}\right) l = \frac{1}{EA}\left(P\, l + \frac{ql^2}{2}\right)$$

4. Aplicación del Principio de Rayleigh-Ritz

Reemplazando ahora $\hat{u}$ por $\hat{u}_2 = a_1 x + \ a_2 x^2$ y teniendo en cuenta que $\hat{\varepsilon}_2 = \frac{d\hat{u}_2}{dx} = \frac{d\left(a_1 x + \, a_2 x^2\right)}{dx} = \ a_1 + 2\, a_2\, x$:

$$\hat{\pi}_2 = \widehat{U}_2 - \widehat{W}_2 = \ \frac{EA}{2} \int_0^l \hat{\varepsilon}_2^2 \, dx - q \ \int_0^l \hat{u}_2 \, dx - \ P \left(a_1 + 2\, a_2\, l\right)$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}_2}{\partial a_1} = 0 \ ; \ \frac{\partial \hat{\pi}_2}{\partial a_2} = 0$$

4. Aplicación del Principio de Rayleigh-Ritz

$$\frac{\partial \hat{\pi}_2}{\partial a_1} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial\left[\frac{EA}{2}\int_0^l (a_1 \;+ 2\, a_2\, x)^2\, dx - \;q\; \int_0^l (a_1 x + \; a_2 x^2)\, dx - \;P(a_1 l \;+\; a_2\, l^2)\right]}{\partial a_1} = 0$$

$$EA\,(a_1\, l + \; a_2\, l^2) - \;q\;\frac{l^2}{2} - P\,l = \;EA\,(a_1 + a_2\, l) - \;q\;\frac{l}{2} - P = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}_2}{\partial a_2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial\left[\frac{EA}{2}\int_0^l (a_1 \;+ 2\, a_2\, x)^2\, dx - \;q\; \int_0^l (a_1 x + \; a_2 x^2)\, dx - \;P(a_1 l \;+\; a_2\, l^2)\right]}{\partial a_2} = 0$$

$$EA\,(a_1\, l^2 + \;\frac{4}{3} a_2\, l^3) - \;q\;\frac{l^3}{3} - P\,l^2 = EA\,(a_1 + \frac{4}{3} a_2\, l) - \;q\;\frac{l}{3} - P = 0 \;\; (2)$$

4. Aplicación del Principio de Rayleigh-Ritz

$$\left.\begin{aligned} EA\,(a_1 + a_2\, l) - q\,\frac{l}{2} - P = 0 \\ EA\,(a_1 + \frac{4}{3} a_2\, l) - q\,\frac{l}{3} - P = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= \frac{P + q\, l}{EA} \\ a_2 &= -\frac{q}{2EA} \end{aligned}$$

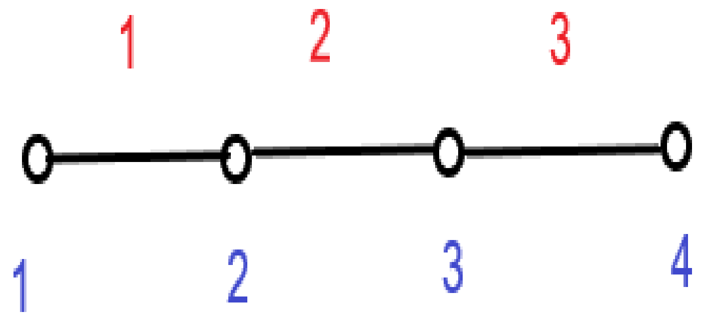
$$\hat{u}_2 = a_1 x + a_2 x^2 = \frac{1}{EA}[(P + q\, l\,)x - \frac{q}{2}\, x^2\,] = \frac{1}{EA}\left[P\,x + q\left(l\,x - \frac{x^2}{2}\right)\right]$$

i) Cuando se aproxima con una función lineal, la respuesta es lineal y la solución aproximada coincide con la solución exacta para algunos puntos particulares. De la misma manera, para una solución aproximada lineal, la derivada correspondiente es constante e igual a la derivada de la solución exacta en el centro del intervalo de interés.

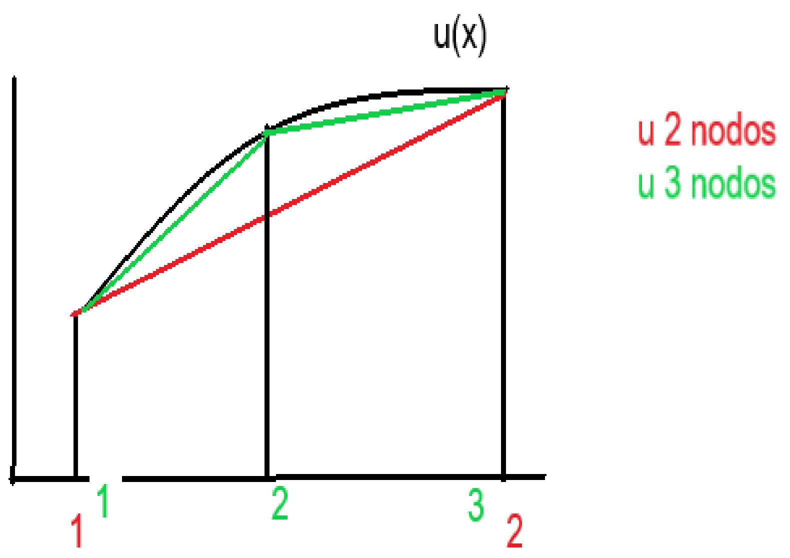
ii) Si la solución aproximante es cuadrática, hay mayor trabajo algebraico y de cálculo, pero se captura la solución exacta para problemas cuya solución analítica es cuadrática.

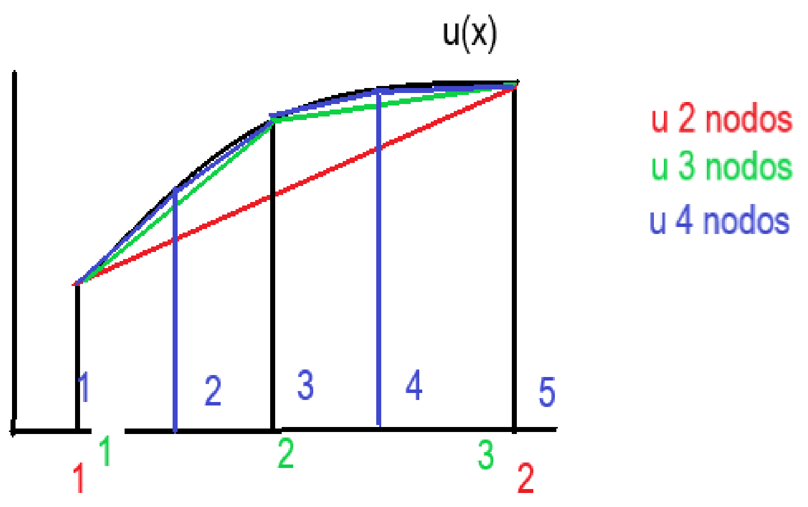
5. Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos brinda la solución numérica de distintos problemas de interés, en este caso el de la barra 1D sometida a esfuerzo normal. El método se basa en construir soluciones aproximadas, similares a las vistas en el Método de Rayleigh-Ritz, pero además agrega otra consideración esencial, cual es la discretización espacial.



5. Método de Elementos Finitos





5. Método de Elementos Finitos

$$N_1 = (1 - \frac{x}{l})$$

$$N_2 = (\frac{x}{l})$$

$$\hat{u}_e = N_1 a_1 + N_2 a_2 \;\; = \left(1 - \frac{x}{l}\right) a_1 + \left(-\frac{x}{l}\right) a_2$$

$$\hat{u}_e = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{N} = \;[N_1 \quad N_2] = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \left(\frac{x}{l}\right)\right] \; ; \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

5. Método de Elementos Finitos

$$\hat{\varepsilon}_e = \frac{d\hat{u}_e}{dx} = \frac{d\,(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{a})}{dx} = \frac{d\boldsymbol{N}}{dx}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

5. Método de Elementos Finitos

$$\hat{\pi}_e = \widehat{U}_e - \widehat{W}_e = \frac{EA}{2} \int_0^l \hat{\varepsilon}_e^2 \, dx - q \int_0^l \hat{u}_e \, dx$$

$$\hat{\varepsilon}_e^2 = \boldsymbol{a}^T \, \boldsymbol{B}^T \, \boldsymbol{B} \, \boldsymbol{a} \, ; \; \hat{u}_e = \boldsymbol{a}^T \, \boldsymbol{N}^T$$

$$\hat{\pi}_e = \frac{EA}{2} \int_0^l (\boldsymbol{a}^T \, \boldsymbol{B}^T \, \boldsymbol{B} \, \boldsymbol{a}) \, dx - q \int_0^l \left(\boldsymbol{a}^T \, \boldsymbol{N}^T\right) dx$$

5. Método de Elementos Finitos

$$\frac{\partial \hat{\pi}_e}{\partial \boldsymbol{a}} = EA\,[\int_0^l (\,\boldsymbol{B}^T\ \boldsymbol{B}\,)dx\,]\,\boldsymbol{a} - q\ \int_0^l \boldsymbol{N}^T\,dx$$

$$= EA\,[\,(\,\boldsymbol{B}^T\ \boldsymbol{B}\,)\int_0^l dx\,]\,\boldsymbol{a} - q\ \int_0^l \boldsymbol{N}^T\,dx =$$

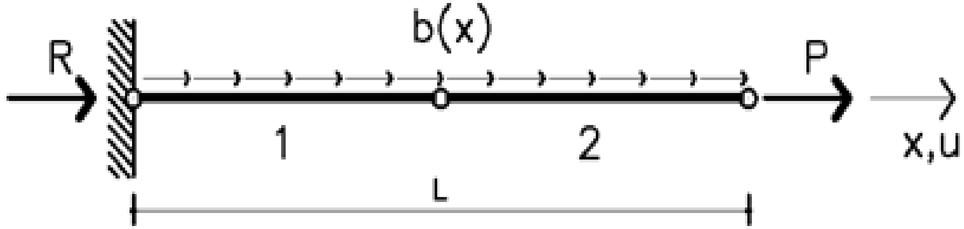
$$= EA\ l\ \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \boldsymbol{a}\ -\ q\ \int_0^l \begin{bmatrix} \left(1-\frac{x}{l}\right) \\ \left(\frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} dx - \ \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{P}}^T$$

5. Método de Elementos Finitos

$$\boldsymbol{K}_e = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} ; \ \boldsymbol{f}_e = q \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_e \, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}_e$$

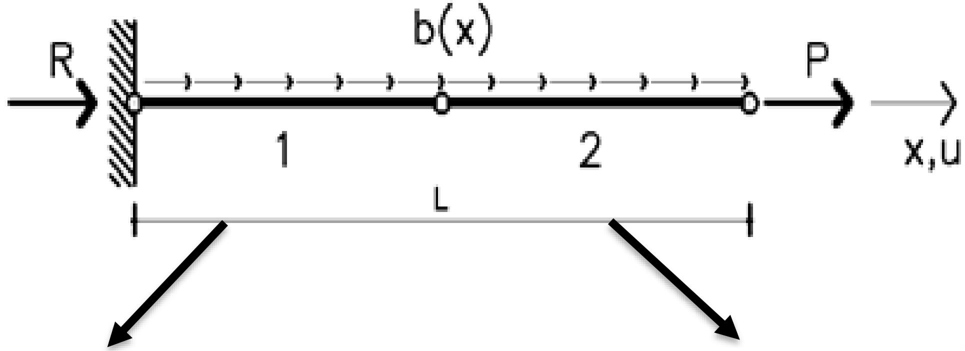
5. Problema de Aplicación



$$\boldsymbol{K}_1 = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{f}_1 = \frac{ql}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_2 = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{f}_2 = \frac{ql}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Problema de Aplicación



$$\boldsymbol{K}_1 = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{f}_1 = \frac{ql}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}_2 = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{f}_2 = \frac{ql}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{G1} = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}_{G1} = \frac{ql}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{G2} = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}_{G1} = \frac{ql}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Problema de Aplicación

$$K_G\ a = f_G + f_P$$

$$\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{ql}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{P}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{ql}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{P}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \frac{L}{EA}\left(\frac{P}{2} + \frac{3}{8}\, qL\right) \quad ; \quad a_3 = \frac{L}{EA}\left(P + \frac{ql}{2}\right)$$

5. Problema de Aplicación

$$u(x) = \frac{P\,x + q\left(l\,x - \frac{x^2}{2}\right)}{EA}$$

$$u(\tfrac{L}{2}) = \frac{L}{EA}\,(\tfrac{P}{2} + \tfrac{3}{8}\,qL) \quad ; \quad u(L) = \frac{L}{EA}\,(P + q\,\tfrac{L}{2})$$

5. Problema de Aplicación

$$\hat{\varepsilon}_e = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

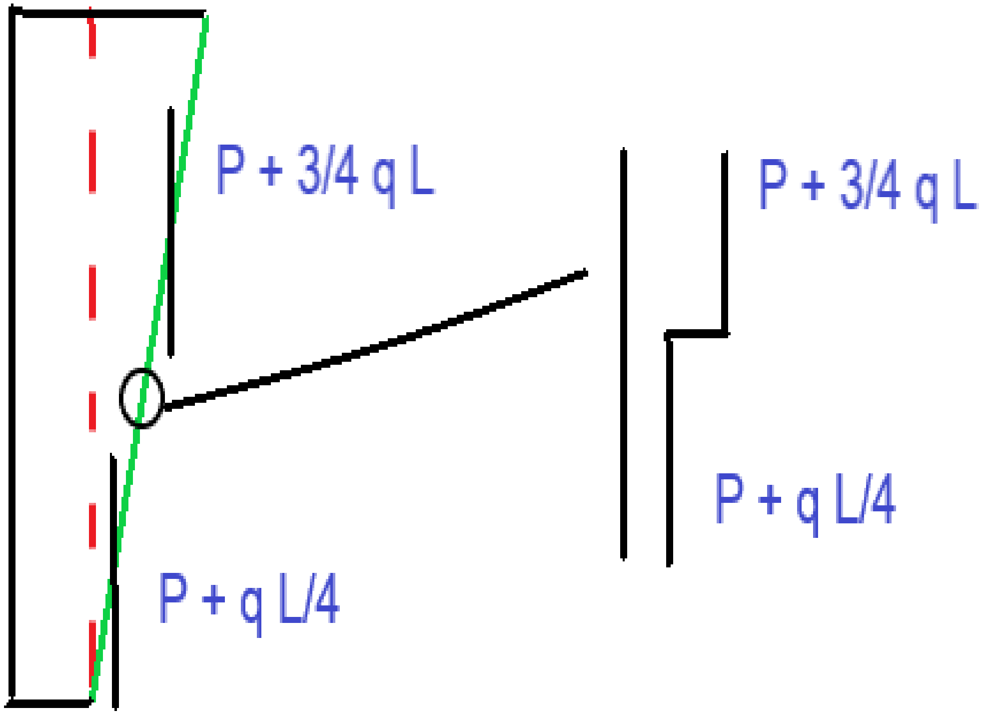
$$\hat{\varepsilon}_e = \frac{2}{L}(a_2 - a_1)$$

$$\hat{\varepsilon}_e = \frac{\Delta a}{\Delta x}$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \frac{2}{L}\left[\frac{L}{EA}\left(\frac{P}{2} + \frac{3}{8}\,qL\right) - 0\right] = \frac{1}{EA}\left(P + \frac{3ql}{4}\right)$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{2}{L}\left[\frac{L}{EA}\left(P + \frac{ql}{2}\right) - \frac{L}{EA}\left(\frac{P}{2} + \frac{3}{8}\,qL\right)\right] = \frac{1}{EA}\left(P + \frac{ql}{4}\right)$$

5. Problema de Aplicación

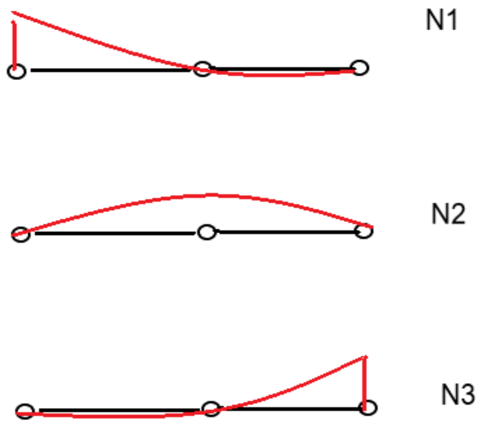


5. Problema de Aplicación – 4 Elementos $l_e = \frac{L}{4}$

$$\boldsymbol{K}_i = \frac{4EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \ \boldsymbol{f}_i = \frac{ql}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{EA} \ (\frac{P}{4} + \ \frac{7}{32} \ qL \\ \frac{L}{EA} \ (\frac{P}{2} + \ \frac{3}{8} \ qL) \\ \frac{L}{EA} \ (\frac{3P}{4} + \ \frac{15}{32} \ qL) \\ \frac{L}{EA} \ (P + \ \frac{ql}{2}) \end{bmatrix}$$

5. Elemento 3 nudos



$$K_e = \frac{EA}{6l}\begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix} \; ; \; f_e = \frac{ql}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$