UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD
DE INGENIERÍA

- **2021**

# CILINDROS

# ESFUERZOS Y CORRIMIENTOS

## Estructuras Laminares

**Prof. Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ**

# CILINDROS

## Contenido

- Geometría y Cargas
- Hipótesis de Comportamiento
- Esfuerzos y Corrimientos
- Relación Carga-Corrimiento
- Solución General y Particular
- Amortiguamiento de las Solicitaciones
- Aplicaciones

# CILINDROS. Geometría y Cargas

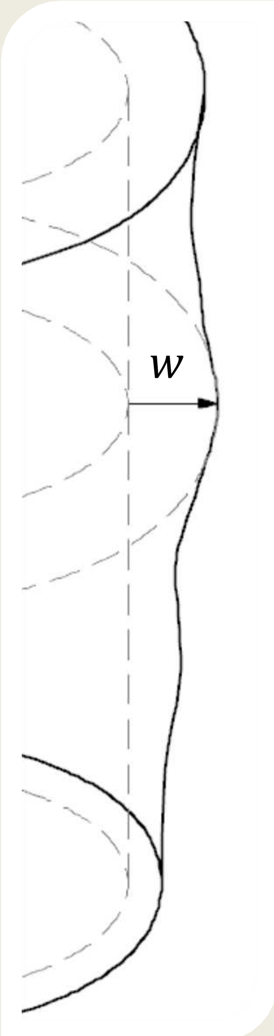
## Geometría y Cargas

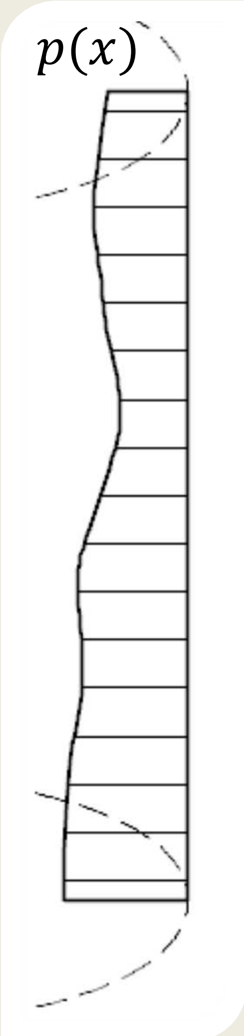
$t = f(x)$

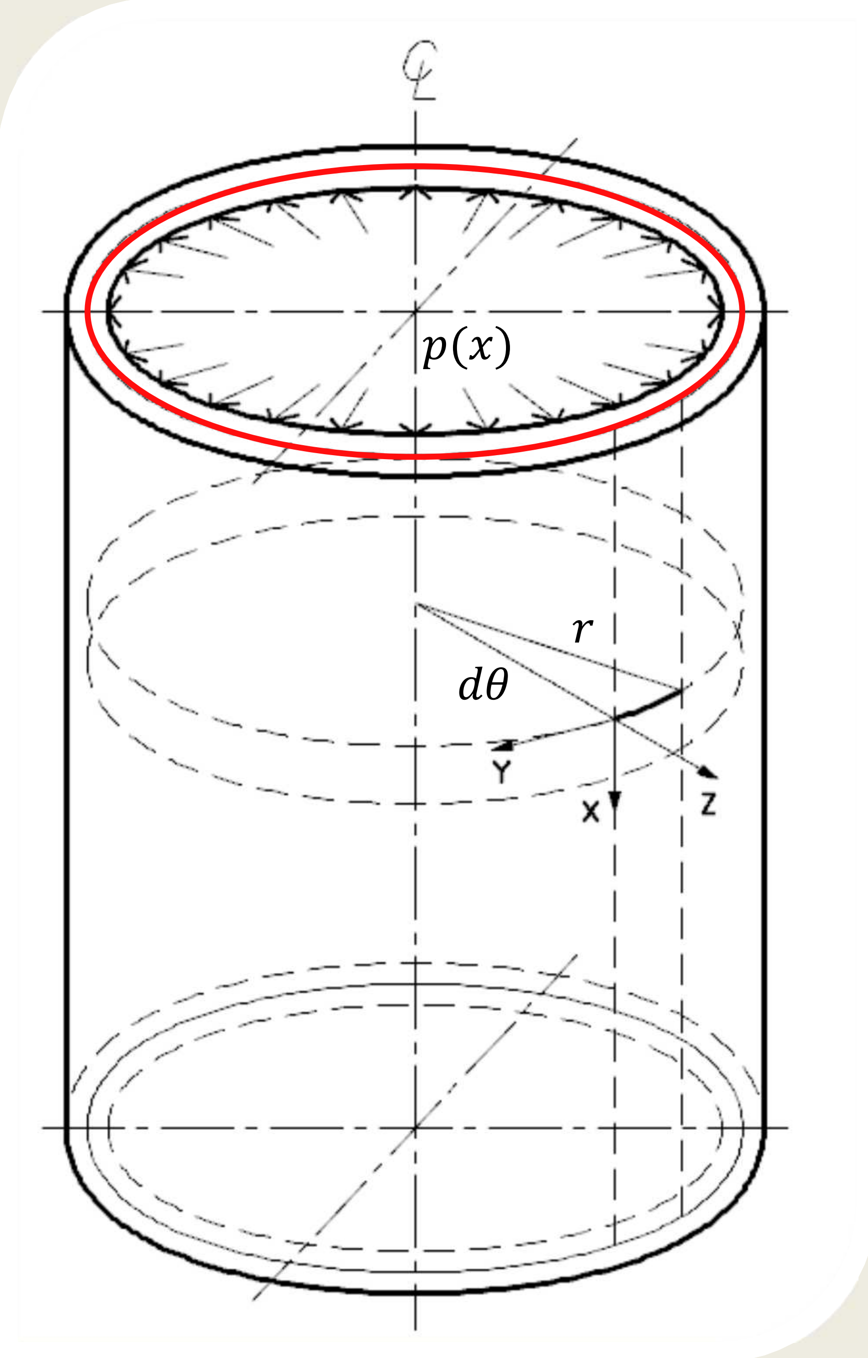
$p = g(x)$

$r = R_\phi = R_\theta = R$

$w = \Delta r$



# CILINDROS. Relación entre carga y corrimientos

## Relación entre w y p

### Deformación Radial

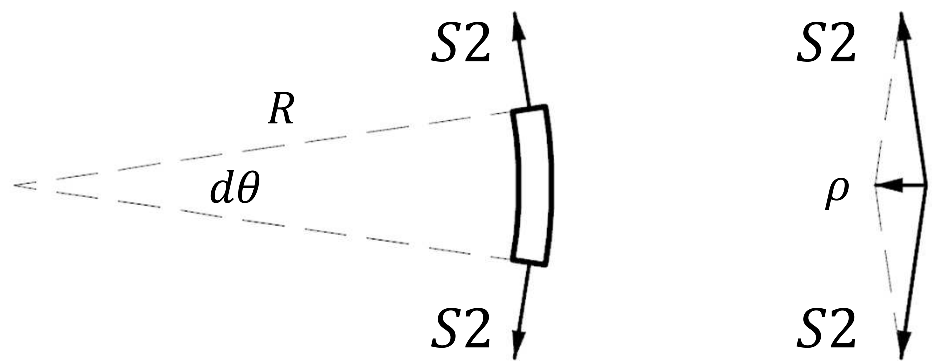
$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi\, w}{2\pi\, R} = \frac{w}{R}$$

### Suponiendo $\sigma_1 \cong 0$

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = \frac{E\,w}{R}$$

$$S2 = \sigma_2 t = \frac{E\,t\,w}{R} \qquad \rho = \frac{S2}{R}$$

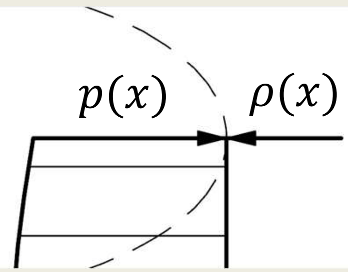
$$\rho = \frac{E\,t\,w}{R^2} = \beta\,w \qquad \beta = \frac{E\,t}{R^2}$$




$$\frac{\rho}{2} = S2\ sen\,\frac{d\theta}{2} = S2\,\frac{d\theta}{2} = \frac{S2}{2R} \qquad \rho = \frac{S2}{R}$$

$$\frac{E}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\partial^4}{\partial x^4}(t^3 w) = p - \beta\,w$$

$$p - \rho = p\ -\ \beta w$$




$$\boxed{\frac{E}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\partial^4}{\partial x^4}(t^3 w) + \beta\,w = p}$$

# CILINDROS. Relación entre carga y corrimientos

**Conocido w**

$$S2 = \frac{E\,t}{R} w \qquad M = B\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad B = \frac{E\,t^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\varphi = -\frac{\partial w}{\partial x} \qquad T = B\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

Para calcular $w$ debemos resolver la ecuación diferencial

$$\frac{E}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\partial^4}{\partial x^4}(t^3 w) + \beta\, w = p$$

$$w = Integral\ Particular + Integral\ General\ Ec.Homogénea$$

# CILINDROS. Integral Particular

**Caso t= ctte**

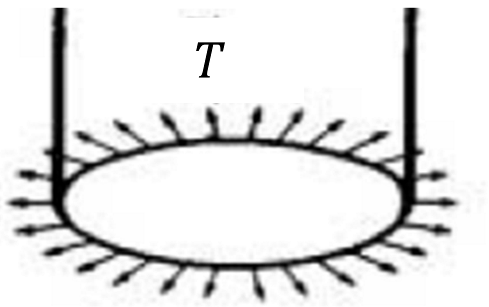
$$\beta = \frac{E\ t}{R^2} = ctte \qquad \alpha^4 = \frac{\beta}{4B}$$

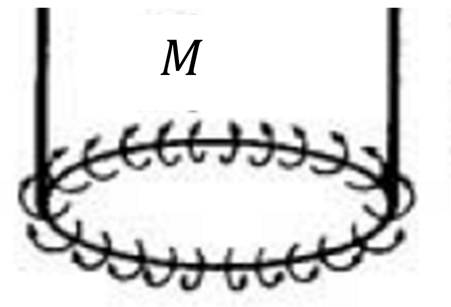
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4B}} = \sqrt[4]{\frac{E\ t/R^2}{4E\ t^3/12(1-\nu^2)}} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rt}} \cong \frac{1.3}{\sqrt{Rt}}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}w + 4\ \alpha^4 w = \frac{p}{B}$$

Representa el efecto de $p$, sin $M$ ni $T$

$M$ y $T$ pueden ser cagas o estar impuestos por las condiciones de contorno



# CILINDROS. Integral Particular

**Caso t= ctte**

$$\beta = \frac{E\,t}{R^2} = ctte \qquad \alpha^4 = \frac{\beta}{4B}$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4B}} = \sqrt[4]{\frac{E\,t/R^2}{4E\,t^3/12(1-\nu^2)}} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rt}} \cong \frac{1.3}{\sqrt{Rt}}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} w + 4\,\alpha^4 w = \frac{p}{B}$$

Representa el efecto de $p$, sin $M$ ni $T$

Si $p(x) = c\,x^n \ \ \forall\, n < 4$

$$w = \frac{p}{4\,\alpha^4 B}$$

$$w = \frac{c}{4\,\alpha^4 B}\,x^n = \frac{c}{\beta}\,x^n$$

Particular para $p = c\,x^n \ y \ \ t = ctte$

$$w = \frac{p\,R^2}{E\,t}$$

Particular para $p = ctte \ y \ \ t = ctte$

# CILINDROS. Integral General Ec. Homogénea

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} w + 4\,\alpha^4 w = 0$$

$$w = C_1 e^{\alpha x}\ sen\ \alpha x + C_2 e^{\alpha x}\ cos\ \alpha x + C_3 e^{-\alpha x}\ sen\ \alpha x + C_4 e^{-\alpha x}\ cos\ \alpha x$$

Representa el efecto de $M$ y $T$, es decir el efecto de las condiciones de borde.

Recordar

$$w = IP + IG$$

Para cilindros largos y en la práctica no muy cortos también $C_1 = C_2 = 0$

$$w = C_3 e^{-\alpha x}\ sen\ \alpha x + C_4 e^{-\alpha x}\ cos\ \alpha x$$

Para $x = 0$ en el borde cargado

# CILINDROS. Integral General Ec. Homogénea

$$C_3 = C \cos \psi$$

$$C_4 = C \operatorname{sen} \psi$$

Donde

$$C = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \quad \text{y} \quad tg\psi = \frac{C_4}{C_3}$$

$$\boxed{w = Ce^{-\alpha x}\, sen\,(\alpha x + \psi)}$$

Es una función sinusoidal amortiguada

$C$: ctte a determinar

$e^{-\alpha x}$ : factor de amortiguamiento

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}\sqrt{R\,t} \cong 4.83\sqrt{R\,t}$$

# CILINDROS. Integral General Ec. Homogénea

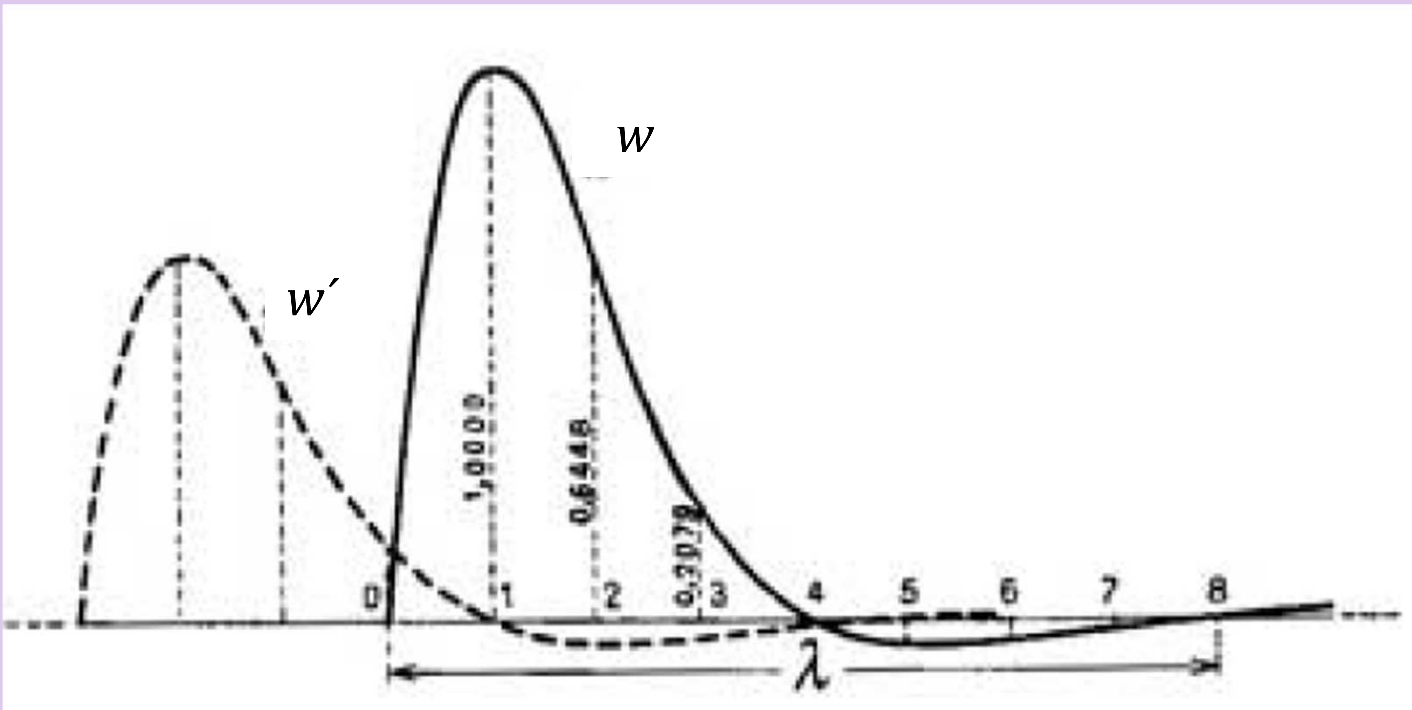
Derivando

$$w = Ce^{-\alpha x}\, sen\,(\alpha x + \psi)$$

$$w' = -\sqrt{2}\alpha\, Ce^{-\alpha x}\, sen\left(\alpha x + \psi - {}^{\pi}/_{4}\right)$$

$$w'' = 2\,\alpha^2\, Ce^{-\alpha x}\, sen\left(\alpha x + \psi - 2\,{}^{\pi}/_{4}\right)$$

$$w''' = -2\,\sqrt{2}\,\alpha^3\, Ce^{-\alpha x}\, sen\left(\alpha x + \psi - 3\,{}^{\pi}/_{4}\right)$$




Se observa que

$w'$ esta adelantada a $w$ en ${}^{3}/_{8}\,\lambda$

Vale para $w''$ y $w'''$

El efecto de las condiciones de borde sobre $w$ desaparece en $x = \lambda$

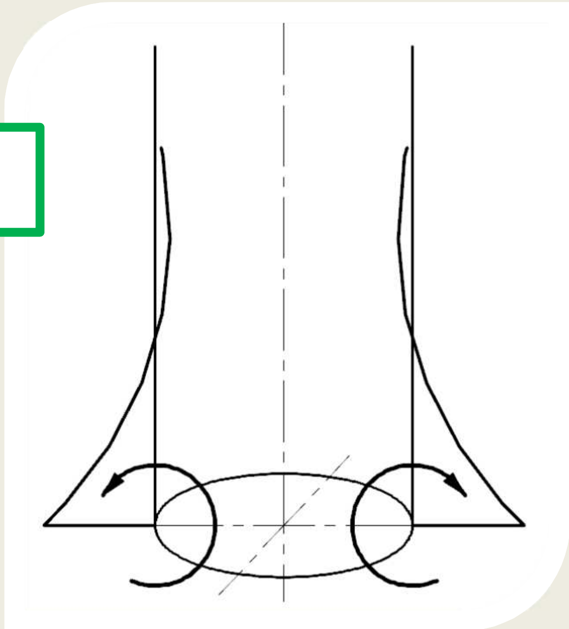
# CILINDROS. Amortiguamiento de las Solicitaciones

Conocidas las derivadas

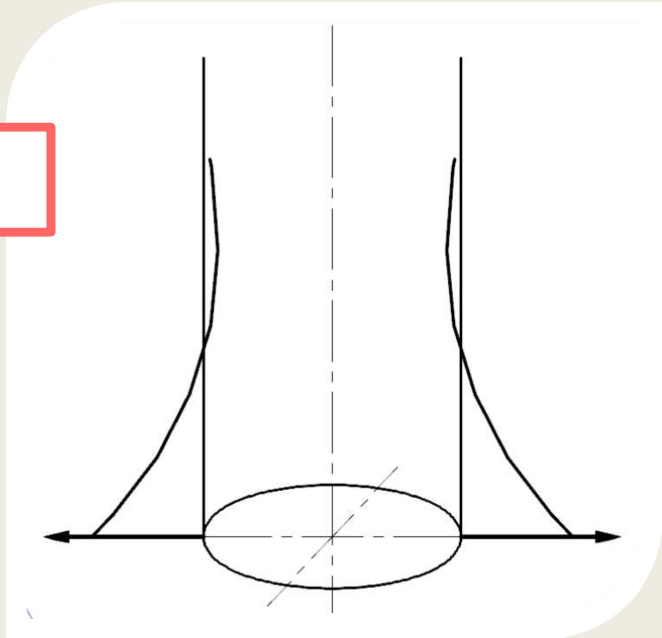
$$M = 2\,\alpha^2\,B\,Ce^{-\alpha x}\,sen\left(\alpha x + \psi - 2\,{}^{\pi}/_{4}\right)$$

$$T = -2\sqrt{2}\,\alpha^3\,B\,Ce^{-\alpha x}\,sen\left(\alpha x + \psi - 3\,{}^{\pi}/_{4}\right)$$

***M***



***T***



$$x = 0 \quad \rightarrow \quad e^{-\alpha x} = 1.00000$$
$$x = {}^{\lambda}/_{2} \quad \rightarrow \quad e^{-\alpha x} = 0.43214$$
$$x = \lambda \quad \rightarrow \quad e^{-\alpha x} = 0.001867$$

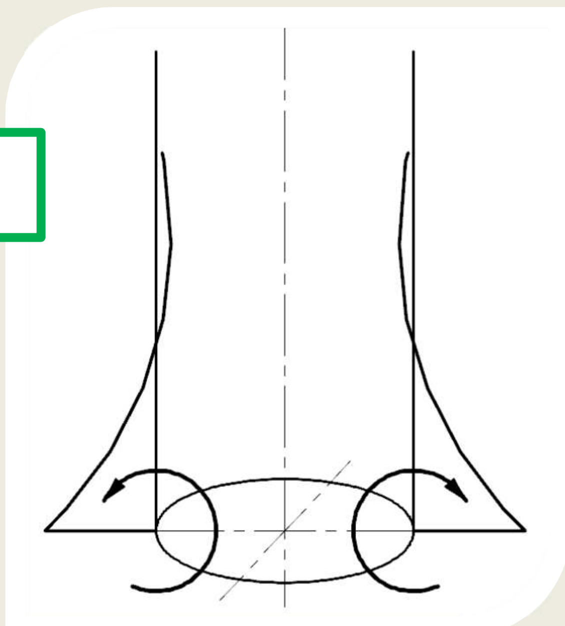
# CILINDROS. Amortiguamiento de las Solicitaciones

Conocidas las derivadas

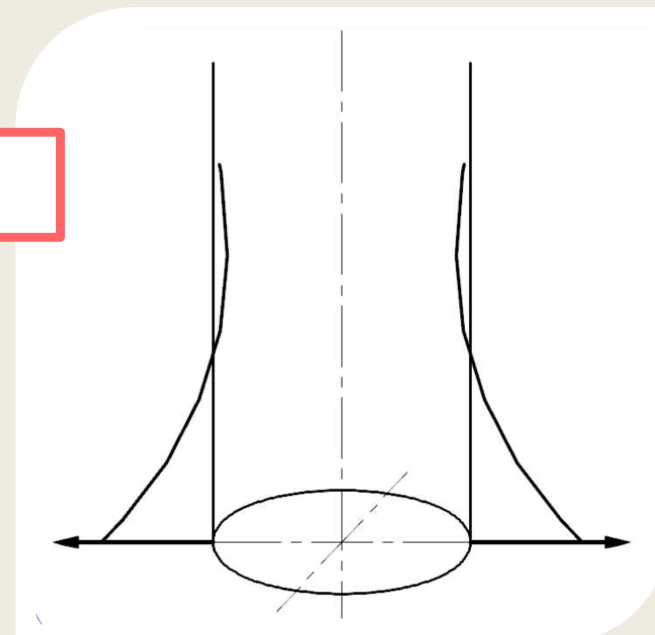
$$M = 2\,\alpha^2\,B\,Ce^{-\alpha x}\,sen\left(\alpha x + \psi - 2\,{}^{\pi}/_{4}\right)$$

$$T = -2\sqrt{2}\,\alpha^3\,B\,Ce^{-\alpha x}\,sen\left(\alpha x + \psi - 3\,{}^{\pi}/_{4}\right)$$

***M***



***T***



$x = 0 \quad \rightarrow \; e^{-\alpha x} = 1.00000$

$x = {}^{\lambda}/_{2} \; \rightarrow \; e^{-\alpha x} = 0.43214$

$x = \lambda \quad \rightarrow \; e^{-\alpha x} = 0.001867$

$x = 0 \quad \rightarrow M = Mo$

$x = {}^{\lambda}/_{2} \; \rightarrow M = {}^{Mo}/_{23.14}$

$x = \lambda \quad \rightarrow M = {}^{Mo}/_{535.5}$

A cierta distancia
del borde
$w \cong IP$

# BILIOGRAFÍA


- Odone Belluzzi. “Ciencia de la Construcción III”. Ed. Nicola Zanichelli. 1967. Aguilar España 1970.

- Villafañe et al, C. “Estructuras Laminares. Teoría y Aplicaciones”. Apuntes de clase, Facultad de Ingeniería. UNC. 2006.