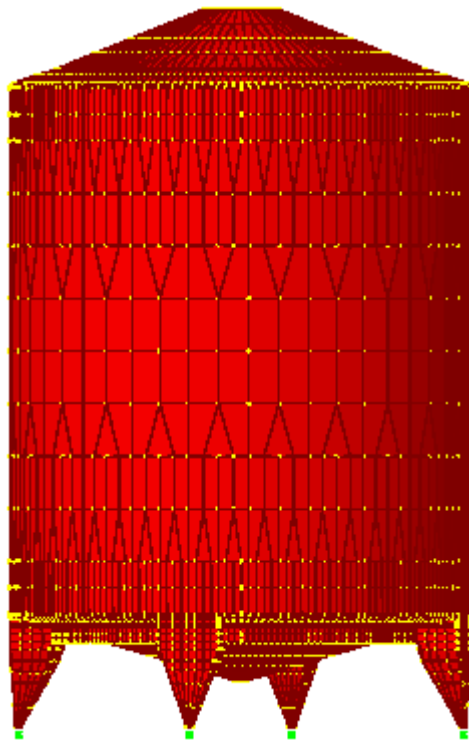


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

# ESTRUCTURAS LAMINARES

TEORIA Y APLICACIONES.



Titular: Ing. Elbio Villafañe.

Jefe de trabajos Prácticos: Ing. Daniel López.

# ÍNDICE GENERAL

Parte 1: Año 1969.

**CAPÍTULO 1. Estructuras Especiales: Apuntes de cátedra del Ing. Francisco Sentinelli. Recopilación realizada por Miguel y Elbio Villafaña (1969).**

Parte 2: Año 2002.

**CAPÍTULO 2. Vasija Vinaria de Acero Inoxidable.**

**2.1 Aplicación de la Teoría de Odone Belluzzi.  
Ariel Iván Guglielmi**

**SECCIÓN 2.1.1:** Presentación  
**SECCIÓN 2.1.2:** Desarrollo  
**SECCIÓN 2.1.3:** Conclusiones  
**SECCIÓN 2.1.4:** Anexos

**2.2 Aplicación de Método de los Elementos Finitos  
Elemento Plano. Juan Carlos Pina**

**SECCIÓN 2.2.1:** Presentación  
**SECCIÓN 2.2.2:** Desarrollo  
**SECCIÓN 2.2.3:** Conclusiones  
**SECCIÓN 2.2.4:** Anexos

**2.3 Aplicación del Método de los Elementos Finitos. Elemento  
Simetría Axil. Pablo Quiroga**

**SECCIÓN 2.3.1:** Introducción  
**SECCIÓN 2.3.2:** Modelado por Elemento Finito  
**SECCIÓN 2.3.3:** Aplicación Tanque Metálico  
**SECCIÓN 2.3.4:** Condiciones de Borde  
**SECCIÓN 2.3.5:** Variación de las tensiones en la sección media  
**SECCIÓN 2.3.6:** Resultados del Análisis

## **CAPÍTULO 3. Cálculo de un Tanque de Hormigón Armado**

### **3.1 Aplicación del Método de los Elementos Finitos. Elemento Plano. Daniel Lucero**

**SECCIÓN 2.3.1:** Introducción  
**SECCIÓN 2.3.2:** Geometría  
**SECCIÓN 2.3.3:** Cargas  
**SECCIÓN 2.3.4:** Vínculos  
**SECCIÓN 2.3.5:** Modelo  
**SECCIÓN 2.3.6:** Resultados  
**SECCIÓN 2.3.7:** Comparación  
**SECCIÓN 2.3.8:** Conclusiones.

### **3.2 Aplicación del Método de los Elementos Finitos. Elementos Simetría Axil. Celina González**

**SECCIÓN 2.3.1:** Introducción  
**SECCIÓN 2.3.2:** Análisis del Problema Real  
**SECCIÓN 2.3.3:** Análisis del elemento elegido para el problema  
**SECCIÓN 2.3.4:** Consideraciones sobre el modelo  
**SECCIÓN 2.3.5:** Resultado del análisis y Conclusiones

**Por medio de la presente obra se quiere rendir un sencillo homenaje al Ingeniero Francisco Sentinelli; quien con su incansable labor realizara grandes aportes a la Ingeniería Civil.**

**En las páginas siguientes se expone la teoría de las membranas y las cáscaras curvas acompañadas de aplicaciones prácticas de ambas. En la primera parte se encuentran los apuntes de cátedra del Ingeniero Francisco Sentinelli cuya recopilación fue realizada por los hermanos Villafañe. En la segunda parte, se presentan las aplicaciones. Estas corresponden a la resolución de problemas utilizando la Teoría clásica de Belluzi y el Método de los Elementos Finitos.**

# ESTRUCTURAS ESPECIALES

## ESTRUCTURAS LAMINARES O CASCARAS

Podemos definir una cáscara como una estructura portante de forma superficial y en la cual el espesor es muy pequeño con respecto a las otras dimensiones.

El uso de las cáscaras tiene gran aplicación por ejemplo en depósitos cúpulas, naves industriales, etc..

Las cáscaras las podemos clasificar en 2 grupos fundamentales:

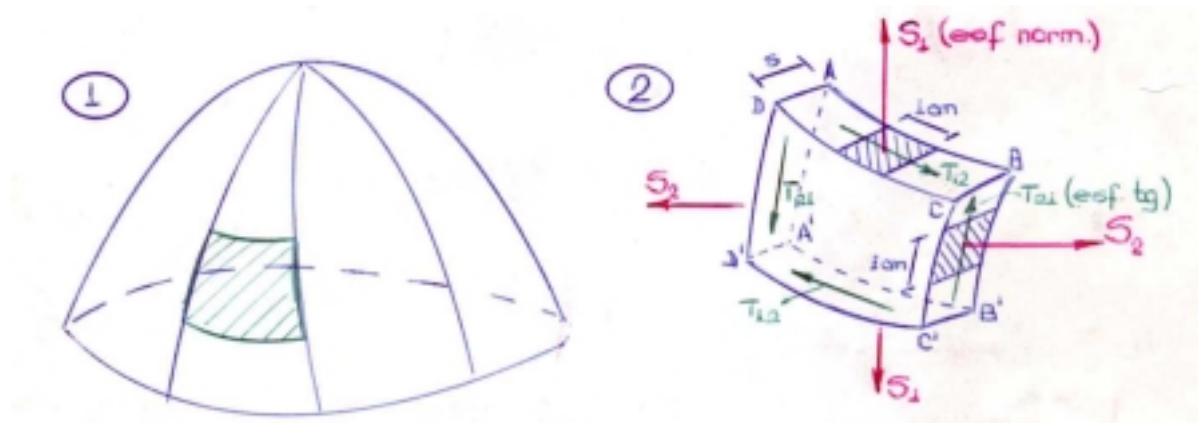
CASCARAS DE PEQUEÑO ESPESOR: que se suelen llamar Membranas o Láminas

CASCARAS DE MAYOR ESPESOR: que se suelen llamar placas (Esto no significa de gran espesor, sino de un espesor mayor que las primeras)

Consideramos en las de pequeño espesor que la lámina o membrana no tiene rigidez, ni a flexión, ni a torsión; y únicamente se desarrollan esfuerzos en las membranas que son: esfuerzos normales y pueden haber también esfuerzos tangenciales en algunos casos.- En cambio cuando son de mayor espesor, en las placas se desarrollan además de los esfuerzos normales y tangenciales, esfuerzos de flexión o sea momentos flectores pueden desarrollar esfuerzos de corte relacionados con los momentos flectores y pueden desarrollarse también momentos torsores.

Vamos a ver cuales son los posibles esfuerzos internos que pueden desarrollarse en una CASCARA.

Sea una. cáscara como la siguiente, la cual aislamos un elemento diferencial:



En los planos o elementos de superficie ABCD, A'B'C'D', CBB'C' y AA'DD' se desarrollan esfuerzos normales que son perpendiculares a dichos planos.

Los esfuerzos internos en las cáscaras se indican por comodidad y por razones de practica en el cálculo por unidad de longitud.

Es decir que si indicamos con un esfuerzo  $S_1$  normal o axial; es muy semejante a un esfuerzo normal o axial a una viga.

Este esfuerzo es un esfuerzo externo respecto al elemento pero inter no respecto a la cáscara.

Si  $(s)$  es el espesor del elemento,  $S_1$  se refiere al esfuerzo que actúa por unidad de longitud en dicho espesor.

Esta unidad de longitud puede ser dada en (cm) o (m), luego las unidades del esfuerzo serán:

$$S_1 \text{ (Kg/cm) ó (Kg/m)}$$

Es decir que los esfuerzos aparecen en las expresiones como si fueran una carga continua.

Es muy importante aclarar que este esfuerzo  $S_1$  actúa ó está determinado por unidad de longitud a diferencia en lo que ocurre en la determinación con el esfuerzo normal en una viga en la que este se relaciona a toda la sección. Nuestro caso es análogo al de la carga continua sobre una viga.

Por lo tanto el esfuerzo total sobre una sección determinada del elemento será  $S_1$  por la longitud del mismo y así también para los otros esfuerzos.

Todos los esfuerzos internos se deben indicar en la misma forma.

Por ejemplo  $S_2$  es el esfuerzo que actúa en la cara  $BB'CC'$  para una unidad de longitud, lo mismo ocurre con la cara opuesta en ambos casos.

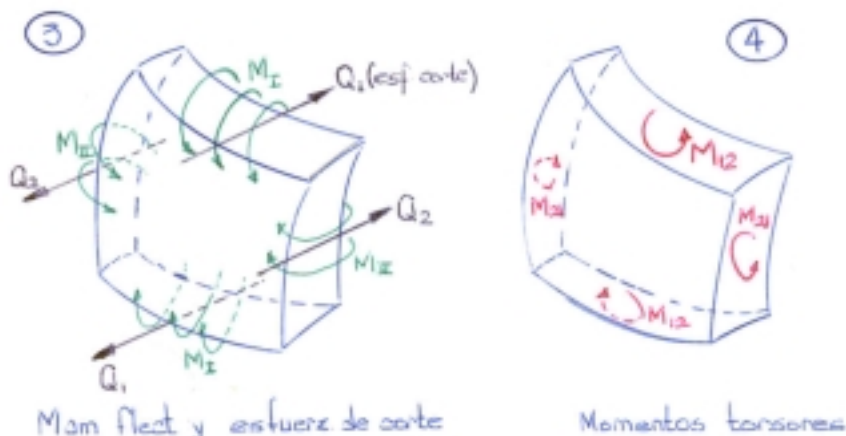
Se desarrollan además otros esfuerzos cuya dirección es tal que coinciden con el plano de la sección (El plano tangente en el punto en cuestión), (T).

Debemos distinguir este esfuerzo del esfuerzo de corte ya que el esfuerzo de corte es normal a la superficie de la cáscara mientras que el tangencial está contenido en la sección de la cáscara considerada pero en el plano tangente en dicho punto. Como el elemento a considerar es un elemento diferencial se puede decir que el esfuerzo tangencial está contenido en el plano tangente a la cáscara mientras que el de corte es normal al mismo.

La notación a seguir para distinguir los esfuerzos tangenciales será con dos subíndices (T21); el primer subíndice indica que se encuentra en el plano normal a la dirección que indica el número dos (2) y el segundo subíndice indica que se encuentra en un plano paralelo a la dirección uno (1).

En las caras  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  se desarrollan esfuerzos tangenciales que de acuerdo a la notación serán T12 en ambas secciones.

Otros de los esfuerzos internos que se pueden presentar son los que dibujamos en las

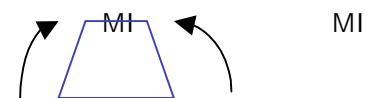


figuras 3 y 4.

La superficie es curva que puede ser también recta. Los momentos flectores en la sección son también dados por unidad de longitud, en la otra cara se desarrollan otros momentos iguales y opuestos.  $M_I$  (por que está en la dirección 1).- por consiguiente  $M_{II}$  actuará en la dirección II.

Estos momentos son semejantes a los que se generan al aislar un elemento diferencial en una viga.

Relacionado con los momentos flectores (con la variación de Momentos flectores entre una sección y otra aparecen esfuerzos cortantes) tendremos un corte que está en el plano de la sección y normal a la superficie de la cáscara.



También se puede presentar en cada una de las caras el momento Torsor.

El momento torsor es un par contenido en el plano de la sección; estos momentos se pueden representar como está indicado en la figura o si no mediante un vector que será normal al plano de la sección. La designación se hace siguiendo las mismas notaciones que en el caso de los esfuerzos tangenciales.

Estos son todos los esfuerzos internos que se nos presentan en el caso más general:

En la figura 2 tenemos: 4 ( $S_1$ )= $(S_1)$  ;  $S_2= S_2$  ;  $T_{21} = T_{21}$ ;  $T_{12} = T_{12}$

En la figura 3 tenemos: 4  $M_I$ ;  $M_{II}$  ;  $Q_1$ ;  $Q_2$

En la figura 4 tenemos:  $2 M_{12}$  ;  $M_{21}$

-----  
Total **10** Esfuerzos internos distintos.

Estos diez esfuerzos distintos no se pueden resolver con las solas ecuaciones de la estática. Las ecuaciones de la estática para este tipo de elemento nos pueden plantear seis (6) ecuaciones de equilibrio.

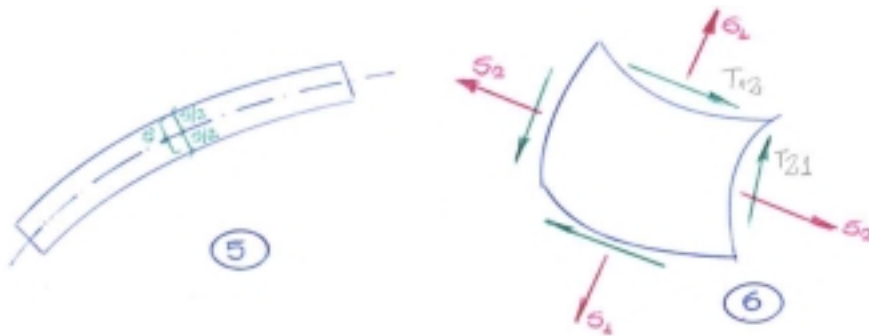
Estas son las tres (3) ecuaciones de proyección con respecto a tres ejes y tres (3) ecuaciones de momento con respecto a dichos tres ejes. Es decir que tenemos 10 incógnitas y solo 6 ecuaciones, luego el problema no se puede resolver por las ecuaciones de la estática solamente, hay que recurrir a ecuaciones de la elasticidad, es decir es un hiperestático internamente en cualquier punto, lo cual no tiene nada que ver con la sustentación de la estructura que puede ser isostática o hiperestática.

El conocimiento de los esfuerzos internos en un punto cualquiera de la lámina o de la membrana, exige la resolución de un problema con 4 incógnitas en este caso general.

Comenzaremos el estudio por los casos mas simples: teniendo.

### LAS MEMBRANAS - CASCARAS DE PEQUEÑO ESPESOR - MEMBRANAS CURVAS

Si tenemos una membrana, es importante definir que se entiende por superficie media: Es la superficie que divide a la cáscara o membrana en cada punto en dos partes iguales, es decir que el espesor de la membrana queda dividido en dos partes iguales.



En este caso hacemos también lo mismo que se hará o mejor dicho se hacía en el caso de una viga en el cual trabajamos con el plano de simetría (los esfuerzos internos los referimos actuando en el eje de simetría para simplificar el problema); luego estudiaremos los problemas en la superficie media y los esfuerzos internos que se consideran que actúan en la superficie media.  $S_1$ ;  $S_2$ ;  $T_{12}$ ;  $T_{21}$ .

O sea que si tomamos un elemento de la figura 5 correspondiente a la superficie media tendremos que los esfuerzos internos que actúan pueden ser  $S_1$ ;  $S_2$ ;  $T_{12}$ ;  $T_{21}$ .

Que pasa en las membranas curvas o cáscaras de pequeño espesor por el hecho de que tienen poco espesor se consideran sin rigidez a la flexión es decir que los momentos flectores son iguales a cero (0)

$$1) M_I = M_{II} = 0$$

Como los esfuerzos de corte están relacionados a los momentos flectores y estos son cero por consiguiente los esfuerzos de corte necesariamente tienen que ser igual a cero (0)

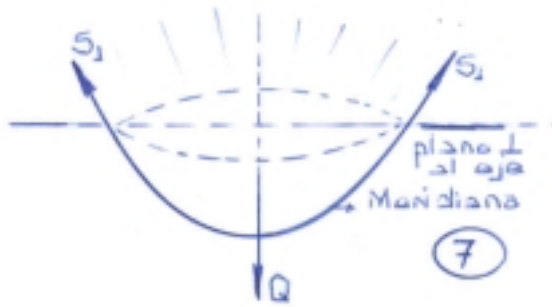
$$2) Q_1 = Q_2 = 0$$

Se considera además que no existe rigidez a torsión por cuanto el espesor de la membrana es muy pequeño.

$$3) M_{12} = M_{21} = 0$$

Luego nos quedan únicamente 3 esfuerzos internos a los cuales se les llama esfuerzos de membrana, que son los que tenemos en la figura 2.

Vamos a simplificar aún más el problema considerando ahora las membranas curvas de Revolución cargadas con simetría radial.



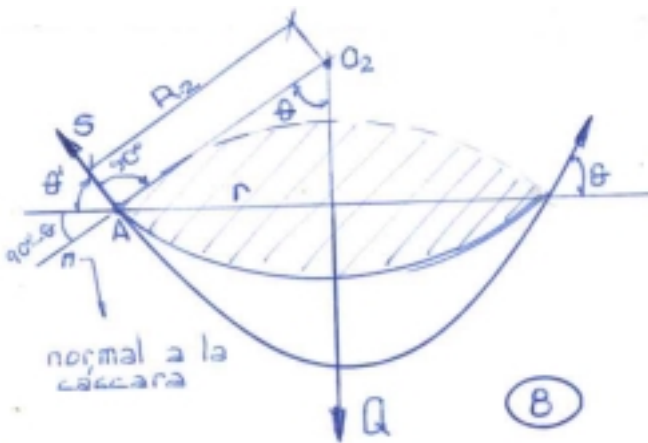
Una membrana cualquiera de revolución es una superficie engendrada por la rotación de una curva en torno a un eje; a esta curva que gira se la denomina MERIDIANA/O Si las cargas que actúan sobre esta membrana. son tales que determinan una resultante que coincide con el eje (Q) en este caso decimos que la membrana está cargada con simetría radial.

Con estas características el problema de la resolución de los esfuerzos internos se simplifica.

### DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS INTERNOS

Para la determinación de esfuerzos de una membrana de revolución del tipo dado en la figura 7 vamos a seguir el siguiente procedimiento:

Haciendo un corte por medio de un plano perpendicular al eje vamos a obtener un paralelo, estudiamos el equilibrio de la parte de abajo que dibujamos aparte ver figura 8.



Tenemos un casquete sometido a una carga "Q" para abajo y además en los bordes de este casquete a lo largo de la circunferencia el esfuerzo que nosotros llamamos S1 que actúa según la dirección de la tangente al meridiano en cada punto del mismo.

El cálculo se desarrolla de la siguiente manera:

Si tomamos la notación de tita para el ángulo que forma la tangente con el eje horizontal.

Si aplicamos la ecuación de proyección sobre el eje vertical (y) tenemos:  $\Sigma y = 0$

El esfuerzo S1 está dado por unidad de longitud, luego para el cálculo del esfuerzo total habrá que multiplicarlo por el desarrollo de la circunferencia y como se necesita la proyección sobre el eje vertical estará afectado por  $\text{sen } \theta$ .

La otra carga o fuerza que actuará es Q en la dirección del eje pero de sentido opuesto a la proyección de S1; luego:

$$S_1 \cdot 2 \pi r \text{ sen } \theta - Q = 0$$

$$S_1 = \frac{Q}{2 \pi r \text{ sen } \theta} \quad (1)$$

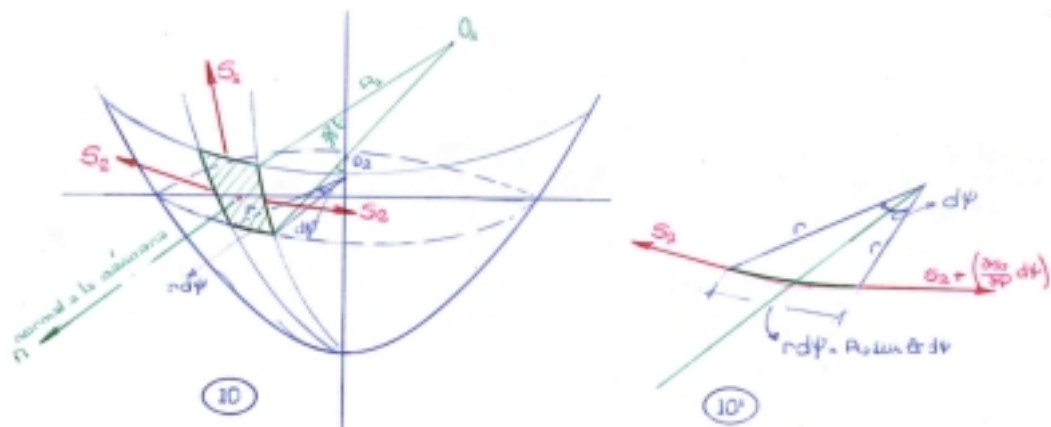
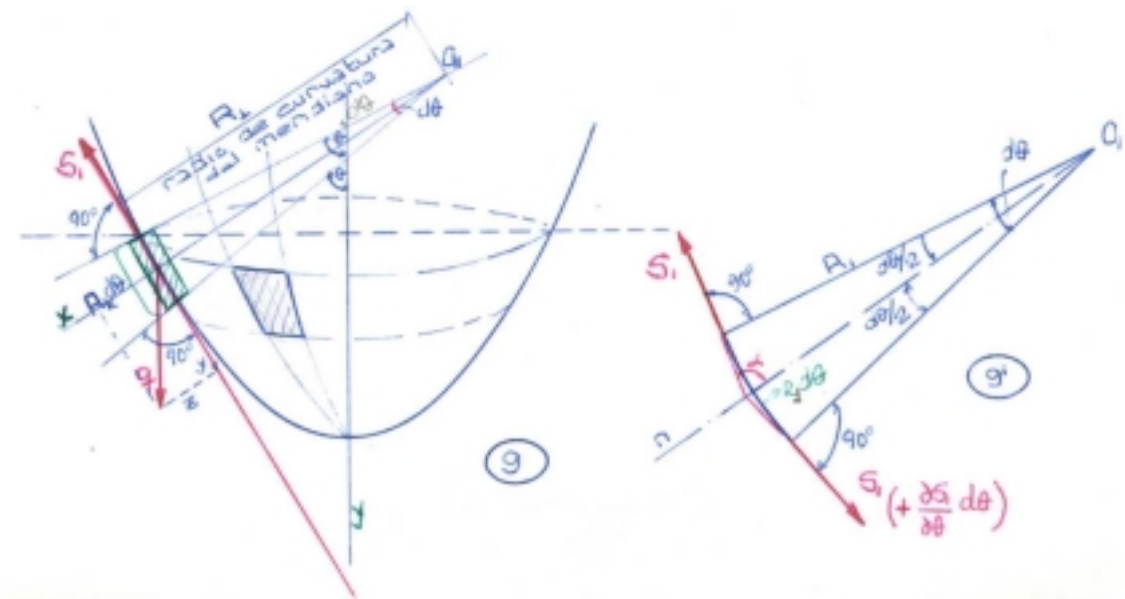
Este esfuerzo se puede colocar también en función de otro radio que es el que se obtiene trazando la normal a la cáscara en el punto A (normal al plano tangente y al meridiano en ese punto); esta normal corta al eje y en el punto O<sub>2</sub> y forma con el eje un ángulo que también es  $\theta$  ya la distancia AO<sub>2</sub> se la llama R<sub>2</sub>.

$$\text{Siendo: } r = R_2 \text{ sen } \theta$$

$$\text{reemplazando en (1) nos queda: } S_1 = \frac{Q}{2 \pi R_2 \text{ sen }^2 \theta} \quad (2)$$



Veamos ahora el otro esfuerzo S2 en la dirección del paralelo:



En la figura 9 hemos dibujado nuevamente el esfuerzo S1. Si trazamos ahora las normales a la cáscara por dos puntos extremos de un elemento diferencial estas se cortan en  $O_1$ ; que nos determina con la superficie de la cáscara una distancia  $R_1$ , que es el radio de curvatura de ese elemento diferencial de meridiano.

Tratándose de un elemento diferencial los ángulos que forman con el eje vertical y las normales a la cáscara son prácticamente iguales entre sí siendo  $d\theta$  el ángulo entre ellas.

Por tanto la longitud diferencial de nuestro elemento en la dirección del meridiano es  $R_1 \cdot d\theta$ .

En la figura 10 se han dibujado los esfuerzos S1 y S2 así como también los distintos ángulos y radios siendo la longitud de ese elemento en la dirección del paralelo:  $(r \cdot d\psi)$

Siendo:

$$r = R_2 \sen \theta \quad \text{tenemos:}$$

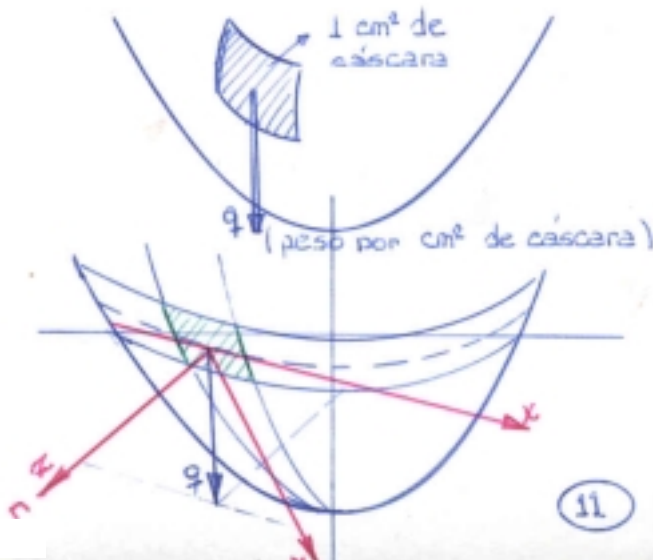
$$r \cdot d\psi = R_2 \sen \theta \cdot d\psi \quad (\text{demostración hecha en figura 8})$$

Esto es válido siempre que se desprecien los infinitésimos de orden superior por cuanto en realidad los radios de los paralelos ( $r$ ) no son iguales, pero que se desprecian dichas diferencias como veremos luego en las operaciones siguientes. Luego consideramos que los radios se mantienen constantes para dicho elemento.

El esfuerzo S2 actúa en una dirección normal al meridiano y tangente al paralelo (ver figura 10)

Para plantear una ecuación de equilibrio, proyectamos las fuerzas en dirección de la normal a la cáscara en el elemento que estamos considerando (en el centro del elemento diferencial).

Para ello tenemos que considerar las fuerzas exteriores, o sea las cargas que actúan sobre la cáscara.



Si tenemos una superficie unitaria (figura 11) y sobre esa superficie unitaria actúa una fuerza exterior

cualquiera por  $\text{cm}^2$  de cáscara ( $q$ ) que puede ser nieve, peso propio, proyectada según la normal a la cáscara (en forma general)

La proyección la designamos con  $Z$  con

signo positivo hacia afuera.

La proyectamos también según la tangente al paralelo que lo designamos con  $X$ .

La podemos proyectar también según una tangente al meridiano que la designamos con  $Y$ .

Esta es la forma general de considerar las proyecciones.

Para nuestro caso particular en

cáscara de revolución cargada con simetría radial, que para poder determinar una resultante en sentido vertical esas cargas deben ser verticales, es decir que solo tienen componentes ( $Z$ ) e ( $Y$ ) (ver figura 9), ambas positivas (hacia afuera).

La carga  $q$  puede ser por ejemplo el peso propio y por lo tanto su dirección será vertical.

Luego para obtener  $S_2$  planteamos la siguiente ecuación de equilibrio.

Sumatoria de todas las fuerzas proyectadas sobre la normal igual a cero  $\sum n = 0$

Veamos entonces cuales son las fuerzas que proyectamos sobre la normal.

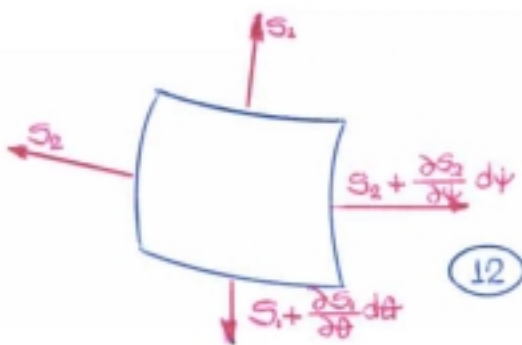
Si la componente de la carga exterior la hemos llamado  $Z$  y es por unidad de superficie para obtener la fuerza total hay que multiplicar  $Z$  por esta superficie elemental luego será: (figura 9' y 10)

$$\text{Superficie elemental} = R_1 \cdot d\theta \cdot r \cdot d\psi$$

La proyección de la carga total  $q$  sobre la dirección  $n$  (normal) vale:

$$Z \cdot R_1 \cdot d\theta \cdot r \cdot d\psi \quad (\text{positiva})$$

Hablando estrictamente, los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  no son iguales a sus homólogos sino que habría un incremento que se señala en las figuras 9', 10' y 12.



Obsérvese que el incremento de  $S_1$  por ejemplo es la derivada parcial de  $S_1$  respecto a su variable en este caso es ( $\theta$ ) por el diferencial de esta.

Veremos que cuando al proyectar sobre la normal a la cáscara, los incrementos de  $S_1$  y  $S_2$  se convierten en infinitésimos de orden superior y es por ello que generalmente no se tienen en cuenta.

Los pondremos en las expresiones analíticas para ver el porqué de las simplificaciones.

Vamos a proyectar los esfuerzos  $S_1$  sobre la normal a la cáscara (ver figura 9'). Ambas proyecciones serán negativas de acuerdo a la convención adoptada.

Como los esfuerzos  $S_1$  están dados por unidad de longitud; el esfuerzo total de nuestro elemento será el esfuerzo por la longitud diferencial de paralelo que vale ( $r \cdot d\psi$ )

La proyección se obtiene multiplicando la fuerza por el coseno de alfa que es igual a:

$$\cos \alpha = \frac{\sin \frac{d\theta}{2}}$$

Luego el valor de la proyección S1 sobre la normal será:

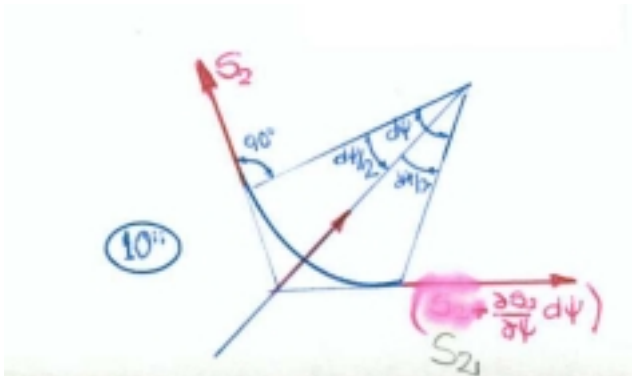
$$-2 \cdot S1 \cdot r \cdot d\psi \sin \frac{d\theta}{2} - \frac{\delta S1}{\delta \theta} d\theta \cdot r \cdot d\psi \cdot \sin \frac{d\theta}{2}$$

(valor que despreciamos por ser infinitésimos de orden superior)

Vamos a proyectar ahora los esfuerzos S2; obsérvese que los esfuerzos S2 actúan en planos horizontales, mientras que la normal a la cáscara tiene una dirección determinada oblicua.

Luego para proyectarlo en primer lugar lo hacemos sobre un eje radial que pasa por el centro, determinando una resultante central contenida en el paralelo.

Determinamos el valor de las fuerzas multiplicando por la longitud del arco sobre la que actúa, que vale (R1 · dθ) luego las fuerzas valen:



$$\left( S2 \cdot R1 \cdot d\theta \right) ; \quad (S2 + \frac{\delta S2}{\delta \psi} d\psi) \cdot R1 \cdot d\theta$$

Las proyecciones centrales valen (figura 10'')

$$\left( S2 \cdot R1 \cdot d\theta \right) \cdot \sin \frac{d\psi}{2} ; \quad \left[ \left( S2 + \frac{\delta S2}{\delta \psi} d\psi \right) R1 \cdot d\theta \right] \sin \frac{d\psi}{2}$$

Ahora bien el ángulo que forma esta proyección con la normal es (90° - θ) (ver figura 8) y al proyectar sobre la normal será de sentido entrante, (negativo) y por ser coseno (90° - θ) = sen θ

tenemos finalmente:

$$-2 \cdot \underbrace{S2 \cdot R1 \cdot d\theta}_{\text{Longitud de meridiana}} \cdot \sin \frac{d\psi}{2} \cdot \sin \theta - \underbrace{\frac{\delta S2}{\delta \psi} \cdot d\psi \cdot R1 \cdot d\theta \cdot \sin \frac{d\psi}{2} \cdot \sin \theta}_{\text{término que se desprecia}}$$

Colocando la expresión general sumatoria de n igual a cero y reemplazando los valores hallados se tiene:

$$\sum n = 0 = Z \cdot R1 \cdot d\theta \cdot r \cdot d\psi - 2 \cdot S1 \cdot r \cdot d\psi \cdot \sin \frac{d\theta}{2} - 2 \cdot S2 \cdot R1 \cdot d\theta \cdot \sin \frac{d\psi}{2} \cdot \sin \theta = 0$$

Reemplazando los senos de diferencial por el valor del diferencial y simplificando se tiene:

$$Z \cdot R1 \cdot d\theta \cdot r \cdot d\psi - S1 \cdot r \cdot d\psi \cdot d\theta - S2 \cdot R1 \cdot d\theta \cdot d\psi \cdot \sin \theta = 0$$

Simplificando dθ y dψ y reemplazando r = R2 · sen θ se tiene:

$$Z \cdot R2 \cdot d\theta \cdot r \cdot d\psi - S1 \cdot r \cdot d\psi \cdot d\theta - S2 \cdot R1 \cdot d\theta \cdot d\psi \cdot \sin \theta = 0$$

$$Z \cdot R1 \cdot R2 \cdot \sin \theta - S1 \cdot R2 \cdot \sin \theta - S2 \cdot R1 \cdot \sin \theta = 0$$

$$Z \cdot R1 \cdot R2 - S1 \cdot R2 - S2 \cdot R1 = 0$$

operando :

$$Z = \frac{S1}{R1} + \frac{S2}{R2} \quad (3)$$

Con las expresiones (1) y/o (2) se calcula  $S_1$  que luego se introduce en (3) para determinar ( $S_2$ ).

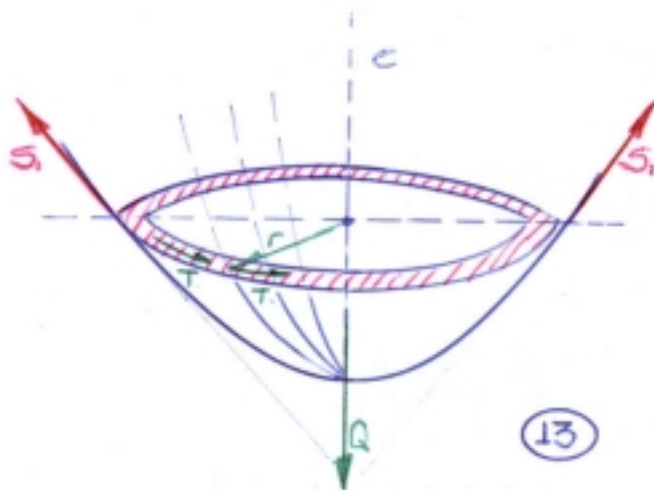
No hemos hecho intervenir los esfuerzos tangenciales  $T_{12}$ ,  $T_{21}$ , por cuanto en el caso de cáscaras cargadas con simetría radial estos esfuerzos son nulos.

$$T_{12} - T_{21} = 0$$

Demostramos que son iguales a cero de la siguiente manera:

Si consideramos la parte inferior de la membrana una vez que hemos cortado con un plano normal al eje y estudiamos su equilibrio.

Los esfuerzos que tenemos son: la carga que actúa  $Q$ , además tenemos los  $S_1$  que actúan a lo largo de la circunferencia del paralelo y logicamente suponiendo la existencia de los esfuerzos tangenciales ( $T$ ) en el borde rayado (figura 13)



Si tomamos momentos con  $r$  de todas las fuerzas que tienen que estar en equilibrio respecto del eje de la membrana.

$$\sum M^{(e)} = 0$$

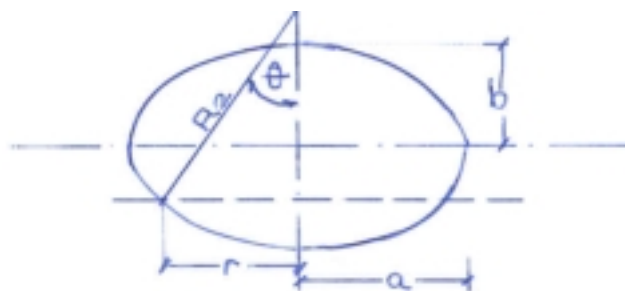
$Q$  tiene momento nulo respecto al eje ya que coincide con el mismo.

Las  $S_1$  todas se van a cortar en un punto del eje, ya que son tangentes a la meridiana luego su momento también es nulo. Luego nos queda solamente el momento producido por las fuerzas  $T$  y no siendo nulas las distancias ( $r$ ) necesariamente deben ser nulas las fuerzas  $T$ .

#### DETERMINACION DE LAS EXPRESIONES GENERALES PARA EL CALCULO DE LOS ESFUERZOS INTERNOS $S_1$ y $S_2$ en DEPOSITOS SOMETIDOS A "PRESION INTERIOR CONSTANTES" (gas por ejemplo)

Supongamos que en la figura A hemos aislado la parte inferior de una cáscara sometida a presión interior constante para el estudiar el equilibrio de la misma.

Precisamos conocer  $Q$  para introducir dicho valor en la expresión de  $S_1$ .



$Q$  es la resultante de todas las presiones, por simetría será vertical y coincidente con la dirección del eje de revolución.

Consideremos un elemento infinitesimal de superficie igual a:  $2\pi \cdot x \cdot ds$

En el cual se desarrolla un diferencial de fuerza que vale:

$$dp = p \cdot 2\pi \cdot x \cdot ds$$

cuya proyección vertical será  $dq$  y vale:

$$dq = dp \cos \alpha = p \cdot 2\pi \cdot x \cdot ds \cos \alpha = p \cdot 2\pi \cdot x \cdot dx \quad \therefore \quad dq = p \cdot 2\pi \cdot x \cdot dx$$

$$Q = \int_0^r p \cdot 2\pi \cdot x \, dx = p \cdot 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} = p \cdot \pi \cdot r^2 \quad \therefore \quad Q = p \cdot \pi \cdot r^2 \quad (1)$$

introducimos Q en la expresión S1

$$S1 = \frac{Q}{2\pi \cdot R2 \cdot \sin^2 \theta} \quad z = p \quad R2 = \frac{r}{\sin \theta}$$

$$S1 = \frac{p \cdot \pi \cdot r^2}{2\pi \cdot R2 \cdot \sin^2 \theta} = \frac{p \cdot r}{2 \sin \theta} = p \cdot \frac{R2}{2} \quad S1 = \frac{p}{2} \cdot R2 \quad (2)$$

para obtener S2 utilizamos las expresión general:

$$Z = \frac{S1}{R1} + \frac{S2}{R2} = p$$

Como Z es la carga por unidad de superficie que actúa normalmente a la cáscara, resulta Z = p

$$p = \frac{S1}{R1} + \frac{S2}{R2}$$

$$p = \frac{p}{2} \cdot \frac{S1}{R1} + \frac{S2}{R2} \quad \therefore \quad \frac{S2}{R2} = p - p \cdot \frac{R2}{2R1} = \frac{p}{2} \cdot \left(2 - \frac{R2}{R1}\right)$$

$$S2 = p \cdot \frac{R2}{2} \cdot \left(2 - \frac{R2}{R1}\right) \quad \therefore \quad S2 = S1 \cdot \left(2 - \frac{R2}{R1}\right) \quad (3)$$

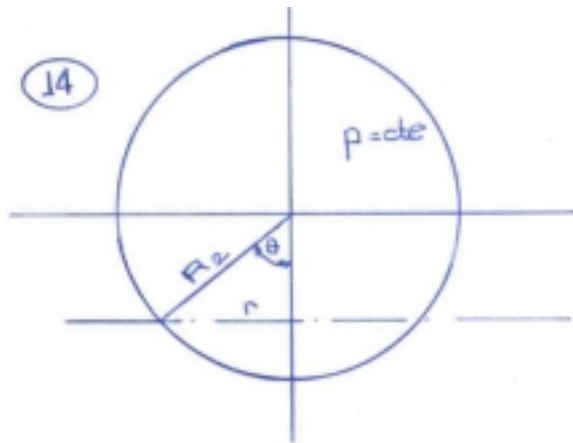
Las expresiones (2) y (3) son las fórmulas generales para el cálculo de S1 y S2 en cáscaras sometidas a presión interior constante.

Segun sea la forma del recipiente, variable con el meridiano, serán los valores de R1 y R2 que debemos introducir en estas expresiones.



## APLICACION PARA DEPOSITOS QUE ALMACENAN GAS

Si tenemos una esfera sometida a presión interior constante sabemos que los esfuerzos internos a que están sometidos  $S_1$  y  $S_2$  están dados por las expresiones siguientes:



$$S_1 = p \frac{R_2}{2}$$

$$S_2 = S_1 \cdot \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Las expresiones dadas se cumplen solamente para recipientes cuya presión interior es constante.

En una esfera (figura 14) sabemos que los radios  $R_1 = R_2 = R$

Recordemos que  $R_1$  es el radio de curvatura de meridiano.

$$R_2 = \frac{r}{\text{sen } \theta} ; \quad r = R_2 \text{ sen } \theta$$

luego:

$$S_1 = p \frac{R}{2}$$

$$S_2 = S_1 = p \frac{R}{2}$$

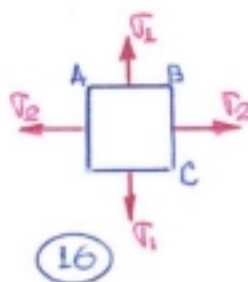
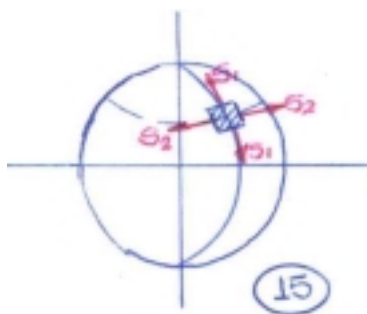
Es decir que los dos esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  son iguales en las dos direcciones (en la dirección del meridiano y en la del paralelo).

Quiere decir que si en cualquier punto de la esfera tomamos un pequeño elemento tenemos dos tensiones o esfuerzos unitarios (figura 15)

Sabemos que si tenemos los esfuerzos y los dividimos por el espesor del elemento obtenemos las tensiones.

Si llamamos  $s$  al espesor del elemento tenemos:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{S_1}{s} = \frac{S_2}{s}$$



$S_1$  está en la dirección del meridiano y  $S_2$  en la dirección del paralelo.

Separamos el elemento considerado (figura 16) y observamos que sobre los planos normales actúan las tensiones:  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , normales a los mismos ya que las tensiones tangenciales en dichos planos son cero.

Si hacemos un círculo de Mohr para esta situación tenemos, ya que éstos

sirven para estudiar las variaciones de tensiones.

Existe un criterio práctico para la construcción del círculo de Mohr que es el siguiente:

Sobre el par de ejes coordenados tenemos en abscisas las tensiones normales y en ordenadas las tangenciales que para nuestro caso son cero (figura 17)

Representamos en coordenadas los valores de las tensiones del sistema plano dado (figura



16)

Por ejemplo tomamos el plano horizontal AB, en este plano tenemos solamente tensión normal ya que la tangencial es cero.

En abscisa colocamos el valor de  $\sigma_1$  y la ordenada es cero, luego el punto está representado en (A) y nos representa las tensiones que se desarrollan en el plano horizontal AB.

Luego para representar las tensiones sobre otro plano BC y como las tensiones son positivas (tracción) las tomamos hacia la derecha del eje, pero como las dos tensiones son iguales tenemos que el valor de ambas es OA; luego el círculo de Mohr se reduce a un punto.

El círculo de Mohr se reduce a un punto cuando en cualquier plano inclinado la tensión se mantiene la misma, siempre constante e igual a la tensión  $\sigma$  que se determina en el gráfico y no hay tensiones tangenciales en ningún plano inclinado.

Luego el dimensionado se hace perfectamente bien:

supongamos por ejemplo un depósito que tenga un radio de 2 metros, a una presión interior de  $10 \text{ kg/cm}^2$  y queremos determinar el espesor del depósito.

Si fijamos una tensión admisible para chapa:

$$\sigma_{adm} = 1.200 \text{ Kg./cm}^2$$

$$p = 10 \text{ Kg./cm}^2$$

$$R = r = 2 \text{ m.}$$

luego:

$$S_1 = S_2 = S = p \frac{R}{2} \qquad \sigma = \frac{S}{s} \qquad s = \frac{S}{\sigma}$$

Reemplazando valores tenemos:

$$S = 10 \text{ kg/cm}^2 \cdot \frac{200 \text{ cm}}{2} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

(dicho esfuerzo siempre nos dará en Kg. por centímetro de longitud)

despejando s (espesor) tenemos:

$$s = \frac{S}{\sigma_{adm}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} / 1200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 0,84 \text{ cm.}$$

$$s = 0,84 \text{ cm.}$$

### DEPOSITO CILINDRICO

Si tenemos un depósito cilíndrico sometido a presión constante  $p = \text{cte.}$  supongamos que el radio del cilindro sea R.

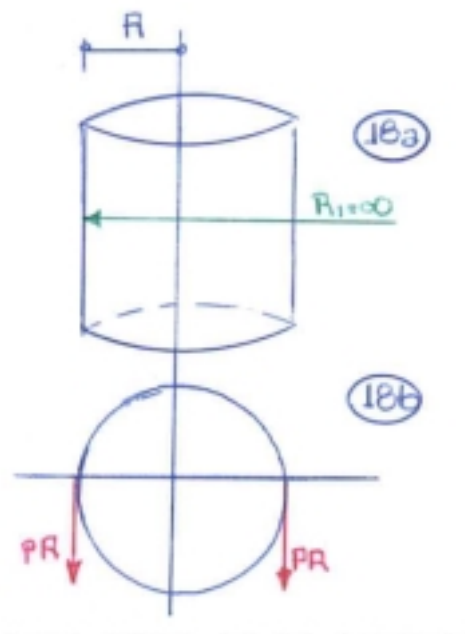
En este caso podemos tomar que la generatriz del cilindro es el meridiano, en cuyo caso el radio de curvatura del meridiano es  $R_1$  de valor infinito (ver figura 18 a)

El radio  $R_2$  se hace igual R.  $R_2 = R$

Luego los esfuerzos valen:

$$S_1 = p \frac{R_2}{2}$$

$$S_2 = p \frac{R}{2} = \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) = p \cdot R$$



por ser  $R_1 = \infty$  nos queda  $\frac{R_2}{R_1} = 0$  luego  $S_2 = p.R$

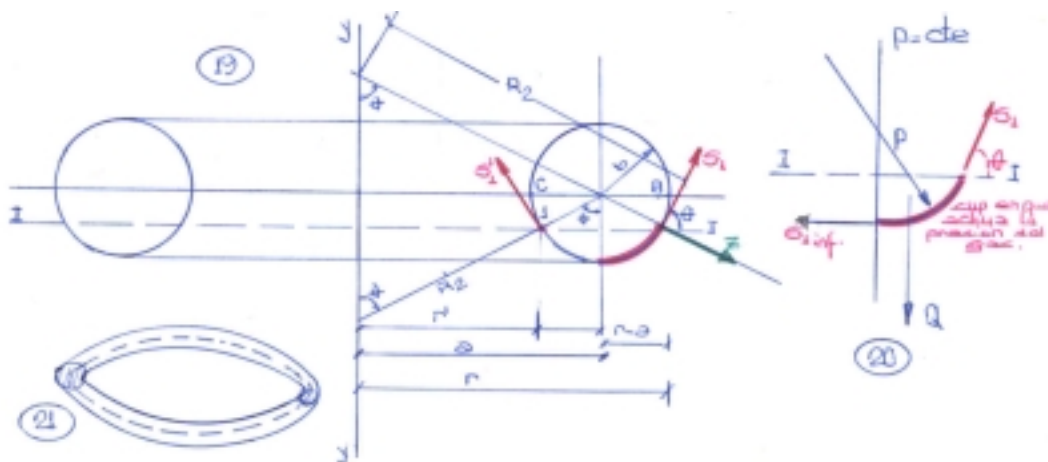
Como vemos se ha llegado a las mismas expresiones del esfuerzo que se obtienen en resistencia de materiales de un cilindro (o sea calderas) (figura 18b), en el cual el esfuerzo anular vale  $p.R$

### RECIPIENTE EN FORMA de TORO (Tórico)

Supongamos tener un recipiente de forma tórica (figura 19).

El toro es la superficie de revolución que se engendra cuando una circunferencia gira en torno a un eje.

El radio de la circunferencia lo llamamos  $b$ . El toro está sometido a una presión interna constante.



Veremos los esfuerzos que se desarrollan.

Para el estudio de los mismos hacemos un corte como lo indica la fig.19

Estudiaremos el equilibrio de la porción indicada en rojo. Esta porción está sometida a los siguientes esfuerzos:

Tangencialmente está sometido a los esfuerzos  $S_1$  en la parte superior del mismo que lo dibujamos aparte. (fig. 20)

En la parte inferior del elemento actúa también un esfuerzo normal según la la tangente que lo llamamos  $S_{inf}$ .

También actúa la presión del gas ( $p$ ) sobre la superficie del elemento pero esta desarrolla una fuerza en dirección vertical ( $Q$ ) que se calcula en la forma ya vista.

Es decir que se obtenía multiplicando la presión por la superficie de proyección normal a la dirección de la fuerza que queremos calcular.



Es necesario aclarar que la superficie en cuestión es la de revolución que corresponde al elemento considerado, luego la fuerza Q que se estudia corresponde a toda la superficie de revolución.

El elemento del cual se estudia el equilibrio tiene la forma indicada en la figura 21; sobre este elemento actúa una presión que origina una fuerza Q y la resultante de dicha fuerza "Q" no quiere decir que esté actuando en la porción del elemento de la figura 20, sino que actúa en el centro coincidente con la dirección del eje de revolución; y el valor se obtiene multiplicando el área proyectada sobre el plano horizontal (Plano 1.1.) por la presión p.

El área proyectada vale  $\pi(r^2 - a^2)$ .

Este producto nos va a dar la fuerza Q en proyección vertical que corresponde a ese elemento de revolución.

$$Q = p \pi(r^2 - a^2)$$

Si ahora aplicamos la ecuación de proyección sobre el eje vertical (y) tenemos:  $\Sigma y = 0$   
 $S_2$  no tiene proyección sobre el eje vertical, luego nos queda  $S_1$  y Q.

$$S_1 - 2\pi r \times \text{sen } \theta - Q = 0 \therefore S_1 = \frac{Q}{2\pi r \times \text{sen } \theta} = \frac{p\pi(r^2 - a^2)}{2\pi r \times \text{sen } \theta} = \frac{p}{2r} \times \frac{(r+a)(r-a)}{\text{sen } \theta}$$

$$\text{como } b \times \text{sen } \theta = (r - a) \therefore b = \frac{r - a}{\text{sen } \theta} \quad S_1 = p \frac{b}{2} \left(1 + \frac{a}{r}\right)$$

Con esta fórmula podemos calcular un esfuerzo.

En el punto 1 la tensión será distinta por cuanto el radio es distinto tendremos un esfuerzo que lo llamamos  $S'_1$  que será mayor que  $S_1$  debido a que el radio es menor.

Si planteamos el equilibrio del elemento opuesto o sea (A) tendremos:

$$S'_1 - 2\pi r' \times \text{sen } \theta = Q = p\pi(a^2 - r'^2) \therefore S'_1 = p \times \frac{(a+r')(a-r')}{2r' \times \text{sen } \theta} \quad S'_1 = p \frac{b}{2} \left(1 + \frac{a}{r'}\right)$$

El valor del esfuerzo  $S_2$  se obtiene de la expresión general:  $\frac{S_2}{R_2} + \frac{S_1}{R_1} = Z$

Tenemos que ver cuánto valen los distintos radios.

Si trazamos la normal a la cáscara en el punto considerado y donde ésta corta al eje tendremos  $R_2$  en donde tenemos:

$$R_2 = \frac{r}{\text{sen } \theta} \therefore r = R_2 \times \text{sen } \theta$$

$R_1 = (\text{radio del meridiano}) = b$

Z = componente de las cargas exteriores hacia fuera, normales a la cáscara por unidad de superficie, luego  $Z = P$

$$\text{Reemplazando: } S_2 \times \frac{\text{sen } \theta}{r} = p - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{a}{r}\right)$$

$$S_2 \frac{\text{sen } \theta}{r} = p \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{a}{2r}\right) = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \therefore S_2 = \frac{pr \left(1 - \frac{a}{r}\right)}{2 \text{sen } \theta}$$

$$S_2 = \frac{pr(r-a)}{2r \text{sen } \theta} = p \frac{b}{2} \quad \text{ya que } b = \frac{r-a}{\text{sen } \theta} \quad S_2 = p \frac{b}{2} \quad \text{VALOR CONSTANTE}$$

El esfuerzo en el sentido del paralelo es constante en cualquier punto de la membrana.

Ejemplo: Si tenemos un toro de radio  $a = 4$  m y  $b = 1$  m

$P = 10$  Kg/cm<sup>2</sup> (presión interior)

por ejemplo para el punto A el radio es  $r = a$  reemplazando en la expresión general de  $S_1$  tenemos:

para el punto B,  $r = (a+b)$

$$S_1^{(B)} = p \times \frac{b}{2} \times \left[1 + \frac{a}{a+b}\right] = p \times \frac{b}{2} \times \left[\frac{(2a+b)}{(a+b)}\right]$$

Luego reemplazando valores:

$$S_1^{(A)} = 10 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times 100 \text{cm} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$S_1^{(B)} = 10 \times \frac{100}{2} \times \frac{900}{500} = 900 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

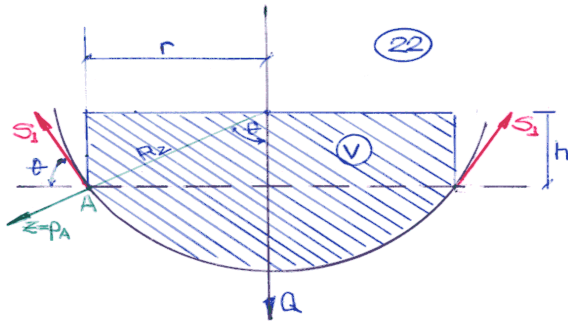
$$S_1^{(C)} = p \times \frac{b}{2} \left(1 + \frac{a}{a-b}\right) = p \times \frac{b}{2} \left(\frac{2a-b}{a-b}\right) = \frac{100 \times 10 \times 700}{2 \times 500}$$

$$S_1^{(C)} = \frac{7000}{6} = 1165 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

Vemos que el máximo lo obtenemos en el punto c.

## DEPOSITOS PARA LIQUIDOS

Supongamos un deposito cualquiera que contiene un liquido determinado (figura 22), para la determinación de los esfuerzos internos procedemos a realizar un corte (plano I-I), por ahora veremos los depósitos con el lado (Cóncavo) en contacto con él liquido. Este tema tiene gran importancia para el estudio de fondos de tanques. Mantenemos la nomenclatura vista en casos anteriores.



Para la determinación del esfuerzo,  $S_1$  se aplica la ecuación de equilibrio.

$$\Sigma y = 0$$

$$S_1 = 2\pi r \times \text{sen } \theta - Q = 0 \quad \text{Como } r = R \text{ sen}(\theta)$$

tenemos  $Q =$  carga de agua

Debemos averiguar el valor de  $Q$ , para cada caso particular.

La carga de líquido que actúa sobre el elemento es la rayada en lápiz. (figura 22)

Si designamos con  $V$  al volumen de la carga de líquido, con  $\gamma$  su peso específico, luego el valor de " $Q$ " será:  $Q = V \times \gamma$

Reemplazando este valor en la formula anterior tenemos: 
$$S_1 = \frac{\gamma \times V}{2\pi R \text{ sen}^2 \theta}$$

Para determinar  $S_2$  utilizamos las expresiones generales que relacionan a  $S_2$  con  $S_1$ .

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = Z = p$$

Como  $Z$  es la componente normal a la superficie en el punto, resulta que es igual a  $(p)$  presión del líquido en dicho punto. pero la presión depende de la altura de la carga del liquido, que es la altura del líquido por encima del plano de corte, que designamos con  $(h)$ .

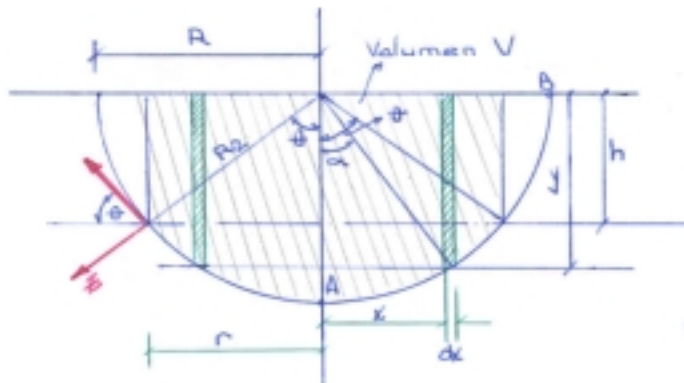
Por física resulta que la presión  $(p)$  es igual a:  $P = \gamma \times h$  y reemplazando en la expresión anterior tenemos:

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = \gamma \times h$$

De esta expresión se despeja el valor de  $S_2$ . Tanto  $S_2$  como  $S_1$  varían de acuerdo al plano de corte (I-I) considerado, como así también de la forma del recipiente y de la altura de carga del líquido (lleno o vacío, etc.)

## DEPOSITO SEMIESFERICO PIRA LIQUIDOS

Veremos para este caso particular la aplicación de las formulas generales vistas en el punto anterior.



De acuerdo a la figura 23 en este caso particular resulta:

$$R_2 = R_1 = R$$

El volumen de líquido que incide en el rayado de la figura se puede obtener como suma de un volumen cilíndrico más un volumen del casquete esférico. Pero resulta más práctico hacerlo mediante un cálculo diferencial.

Tomamos para calcular el diferencial de volumen un

pequeño cilindro hueco, infinitesimal, donde el radio del cilindro lo llamamos X y su espesor dx.

Referimos el radio X mediante la coordenada polar ( $\alpha$ ) al centro de la esfera.

Si a la altura del cilindro la llamamos (y); en consecuencia el diferencial de volumen será:  
 $dv = 2\pi \times dx \times y$

Al integrar esta expresión entre 0 y r, siendo (x) la variable, obtendremos a él volumen buscado: V (volumen de la zona del casquete de radio r.

Para poder integrar es conveniente poner todo en función de  $d(\alpha)$  luego la variable será entre 0 y  $\theta$ .

$$\begin{aligned}
 X &= R \times \sin \alpha & dv &= 2\pi R^3 \cos^2 \alpha \times \sin \alpha \times d\alpha \\
 y &= R \times \cos \alpha & dv &= -2\pi R^3 \times \cos^2 \alpha \times d(\cos \alpha) \\
 dv &= R \times \cos \alpha \times d\alpha & V &= \int_0^\theta -2\pi R^3 \times \cos^2 \alpha \times d(\cos \alpha) \\
 R &= \text{radio esfera} & V &= \frac{-2\pi R^3 (\cos 3\alpha)^\theta_0}{3} = -2\pi \frac{R^3}{3} [\cos^3 \theta - 1] \\
 & & V &= 2\pi \frac{R^3}{3} \times [1 - \cos^3 \theta]
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión general y sabiendo que  $R_1 = R$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{\gamma V}{2\pi R^2 \sin^2 \theta} = \frac{\gamma 2\pi \frac{R^3}{3} [1 - \cos^3 \theta]}{2\pi R \times [1 - \cos^2 \theta]} \\
 S_1 &= \gamma \frac{R^2}{3} \times \frac{(1 - \cos^3 \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} = \gamma \frac{R^2}{3} \left[ \frac{1 + \cos \theta + \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} \right] \\
 S_1 &= \frac{\gamma R^2}{3} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} \right]
 \end{aligned}$$

### **CALCULO DE $S_2$**

Tomamos la expresión general:

$$\frac{S_1}{R} + \frac{S_2}{R} = p = \gamma R \times \cos \theta$$

El segundo miembro es de valor positivo por ser (z) hacia fuera para el caso de cúpulas al revés la presión es negativa (hacia adentro)

Luego:

$$S_2 = \gamma R^2 \times \cos \theta - S_1 = \gamma R^2 \times \cos \theta - \frac{\gamma R^2}{3} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} \right]$$

$$S_2 = \frac{\gamma R^2}{3} \left[ \frac{3 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - \cos \theta - \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} \right]$$

$$S_2 = \frac{\gamma R^2}{3} \left[ \frac{2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1}{1 + \cos \theta} \right]$$

$$S_2 = \frac{\gamma R^2}{3} \left[ \frac{2 \cos \theta (1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)} - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right]$$

$$S_2 = \frac{\gamma R^2}{3} \left[ 2 \cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right]$$

Determinación de los esfuerzos en el punto A.

Para A --- $\theta = 0$  luego:  $S_1^{(A)} = \frac{\gamma R^2}{2}$      $S_2^{(A)} = \frac{\gamma R^2}{2}$

Los dos esfuerzos son iguales en el punto inferior.

En el punto B será: (para  $\theta = 90$ )

$$S_1^{(B)} = \frac{\gamma R^2}{3} \quad S_2^{(B)} = \frac{\gamma R^2}{2}$$

El esfuerzo en el sentido del paralelo cambia de signo; se hace de compresión en el punto B.

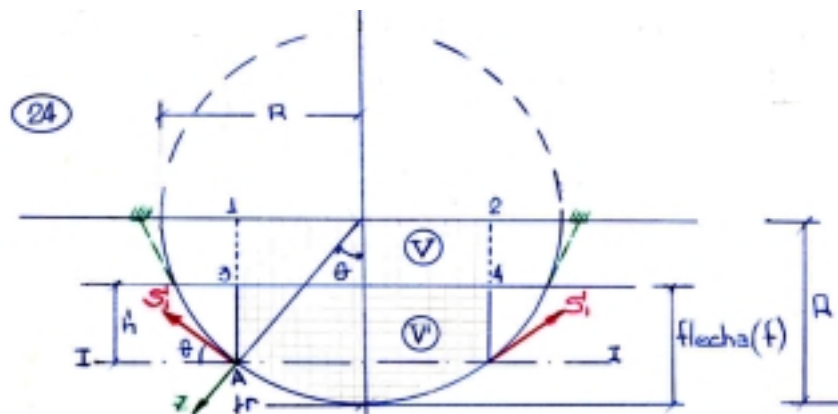
Habrà un punto en el cual hay un cambio de signo en el esfuerzo de tracción a compresión.

Se puede obtener anulando  $S_2$  y de esta manera se obtiene el ángulo  $\theta$  para el cual el esfuerzo cambia de signo.

### CASQUETE ESFERICO

Se trata de determinar los esfuerzos internos que se producen en un casquete esférico (figura 24) que contiene líquido.

Un casquete esférico es a parte de una esfera de radio R cuyos puntos de sustentación por el momento no se estudian.



La carga de agua que actúa sobre el elemento de casquete considerado es la indicada con el rayado cruzado.

El problema en la determinación de los esfuerzos internos en el casquete esférico lo podemos reducir al caso de depósitos semiesféricos ya visto.

Llamando  $V'$  al volumen de líquido que incide sobre el elemento considerado. El volumen  $V'$  es igual al volumen  $V$  ya calculado para depósitos semiesféricos (rayado vertical) menos el volumen del cilindro superior indicado como (1234).

$$\text{Volumen del cilindro superior} = \frac{\pi r^2 (R-f)}{\text{base altura}}$$

Luego:

$$V' = V - \pi r^2 (R-f)$$

La fuerza  $Q'$  que corresponde el volumen dado será:  $Q' = \gamma V'$ , siendo  $\gamma$ , el peso específico del líquido.

Además sabemos que:

$$S'_1 = \frac{Q'}{2\pi r \times \text{sen } \theta}$$

$$\text{Luego : } Q' = \gamma \times V' = \gamma \times V - \gamma \pi r^2 (R-f) \quad \frac{r}{\text{sen } \theta} = R$$

$$S'_1 = \frac{\gamma V}{2\pi r \text{ sen } \theta} - \frac{\gamma \pi r^2 (R-f)}{2\pi r \text{ sen } \theta}$$

Vemos que el primer término del segundo miembro no es otra cosa que el valor del esfuerzo  $S_1$  determinado en depósitos semiesféricos.

$$S_1 = \frac{\gamma V}{2\pi r \times \text{sen } \theta}$$

Luego  $S'_1$  para el casquete es:

$$S'_1 = S_1 - \frac{\gamma r(R-f)}{2 \text{ sen } \theta}, \quad \text{como } \frac{r}{\text{sen } \theta} = R \text{ (radio esfera)} \therefore S'_1 = S_1 - \gamma \times \frac{R}{2} (R-f)$$

Como se ve,  $(\gamma R/2)(R-f)$ , es una constante del casquete esférico que depende de la flecha y del radio de la esfera.

Es decir que el valor del esfuerzo interno  $S'_1$  para el casquete esférico se puede obtener en forma directa restando el valor de la constante al valor  $S_1$  obtenido para la semiesfera.

Calculamos ahora el otro esfuerzo  $S'_2$  aplicando la ecuación general y para este caso particular como se trata de casquete esférico los radios son  $R_1 = R_2 = R$  tenemos:

$$\frac{S'_1}{R_1} = \frac{S'_2}{R_2} = Z \therefore S'_1 + S'_2 = Z \times R \quad (1)$$

Para este caso particular  $Z$  vale para el punto considerado (A)

$$Z = p = \gamma h' \quad (\text{con sentido positivo puesta está dirigida hacia fuera})$$

$Z$  es la fuerza que por unidad de superficie de la cáscara en la dirección de la normal a la cáscara es igual a la presión en el punto considerado. La presión en el punto considerado vale:  $\gamma h'$

Siendo  $h'$  la altura de agua que hay sobre el punto A luego:

$$Z = p = \gamma h' = \gamma [R \cos \theta - (R-f)] \therefore Z = \gamma R \times \cos \theta - \gamma (R-f)$$

Reemplazando el valor de  $Z$  en la expresión (1) tenemos:

$$S'_2 + S'_1 = \gamma R^2 \cos \theta - \gamma(R-f)R \therefore S'_2 = \gamma R^2 \cos \theta - S'_1 - \gamma R(R-f)$$

$$S'_2 = \gamma R^2 \cos \theta - \left[ S_1 - \gamma \frac{R}{2}(R-f) \right] - \gamma R(R-f)$$

$$S'_2 = \gamma R^2 \cos \theta - S_1 + \gamma \frac{R}{2}(R-f) - \gamma R(R-f)$$

$$S'_2 = S_2 - \gamma \frac{R}{2}(R-f) \rightarrow K$$

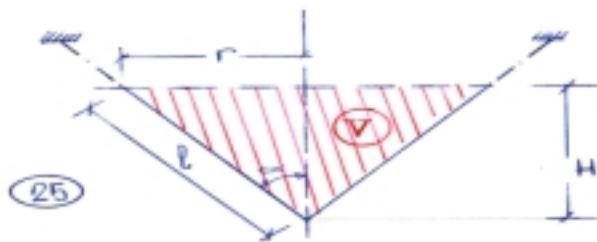
K=(constante igual a la obtenida anteriormente)

Resumiendo: " Cuando uno quiere calcular los esfuerzos internos que corresponden al casquete esférico simplemente, a los valores de los esfuerzos obtenidos para la semiesfera le restamos la constante K correspondiente al casquete.

### DEPOSITO DE FORMA CONICA

Relacionado con el trabajo práctico N°2(F.25)

El problema consiste en lo siguiente. Tenemos un, recipiente o depósito de forma cónica de volumen V(dato). Queremos averiguar cuál es el ángulo de inclinación ( $\alpha$ ) que deben tener las paredes del deposito con respecto al eje vertical que nos dé la condición más económica para el material adoptado, por ejemplo depósito de chapa.



Es decir cual debe ser el ángulo de inclinación de las paredes para un volumen V dado que nos dé, la máxima condición de economía o sea de menor volumen de chapa.

El esfuerzo máximo que se desarrolla para este tipo de depósito (demostración efectuada en el trabajo practico) es:

$S_{max}$ , que coincide con el  $S_2_{max}$  o sea el esfuerzo mayor que desarrolla en el sentido anular; tiene la siguiente expresión llamando con H la altura del depósito con líquido:

$$S_{max} = S_2_{max} = \gamma l \frac{H^2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \cos \alpha}$$

Con ésta expresión se puede dimensionar el espesor de la chapa, luego el espesor de la misma será igual a:

$$s = \frac{S \text{ máx}}{\sigma_{adm}} = \gamma l \frac{H^2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \sigma_{adm} \cos \alpha}$$

$\sigma_{adm}$  = tensión admisible del material.

La expresión del volumen de la chapa lo indicamos con v, este se obtiene multiplicando el área por el espesor de la chapa.

$$v = \text{vol. chapa} = \frac{2\pi r l}{2} \times s = \pi r l s$$

$$v = \pi r l s = \pi H \operatorname{tg} \alpha \frac{H}{\cos \alpha} \times s \therefore v = \pi H^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \frac{\gamma l H^2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \sigma_{adm} \cos \alpha} = \frac{\pi H^4}{4 \sigma_{adm}} \times \gamma l \times \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Tenemos en la expresión dada dos variables que son H y  $\alpha$ , luego eliminamos una de ellas haciendo intervenir el volumen del deposito (cono).

$$V = \text{vol. deposito} = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{\pi}{3} H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha H$$

$$V = \frac{\pi H^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{3} \therefore H^3 = \frac{3V}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (3)$$

Como lo que se busca es  $H^4$  para reemplazarlo en (2): elevamos ambos miembros a la potencia  $4/3$  luego:

$$(H^3)^{\frac{4}{3}} = \left[ \frac{3V}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha} \right]^{\frac{4}{3}} \therefore H^4 = \left[ \frac{3V}{\pi} \right]^{\frac{4}{3}} \times \frac{1}{\operatorname{tg}^{\frac{8}{3}} \alpha} \quad \text{reemplazando en (2) tenemos el volumen } v$$

es:

$$v = \gamma \frac{\pi}{4\sigma \operatorname{adm}} \left[ \frac{3V}{\pi} \right]^{\frac{4}{3}} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha \operatorname{tg}^{\frac{8}{3}} \alpha}, v = K \frac{\operatorname{sen}^{-2/3} \alpha}{\cos^{-2/3} \alpha \cos^2 \alpha} = K \frac{\operatorname{sen}^{-2/3} \alpha}{\cos^{4/3} \alpha} \quad 4$$

Derivando la expresión (4) con respecto a  $\alpha$  e igualando a cero obtenemos el ángulo para el cual nos dará un mínimo volumen de material.

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{-\frac{2}{3} \operatorname{sen}^{-5/3} \alpha \cos^{7/3} \alpha - \frac{4}{3} \cos^{1/3} \alpha \operatorname{sen}^{1/3} \alpha}{(\cos^{4/3} \alpha)^2}$$

$$v' = \frac{-\frac{2}{3} \operatorname{sen}^{-5/3} \alpha \cos^{7/3} \alpha + \frac{4}{3} \cos^{1/3} \alpha \operatorname{sen}^{1/3} \alpha}{\operatorname{sen}^{-5/3} \alpha \cos^{1/3} \alpha} = -\frac{2}{3} \cos^2 \alpha + \frac{4}{3} \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \therefore \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{1/2} = 0.707$$

$$\alpha \cong 35^\circ$$

Conocido  $\alpha$ , podemos determinar  $H$  mediante la expresión número 3:

$$H^3 = \frac{3V}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3V}{0.5\pi} = \frac{3}{1.57} V = 1.9V \quad (5)$$

$$H = \sqrt[3]{1.9V} = 1.24\sqrt[3]{V}$$

Ejemplo: si tenemos un depósito de  $V=8$  m<sup>3</sup>. debe tener una altura  $H$  de acuerdo a la expresión (5) que vale:

$$H = 1.24\sqrt[3]{8} = 2.48m$$

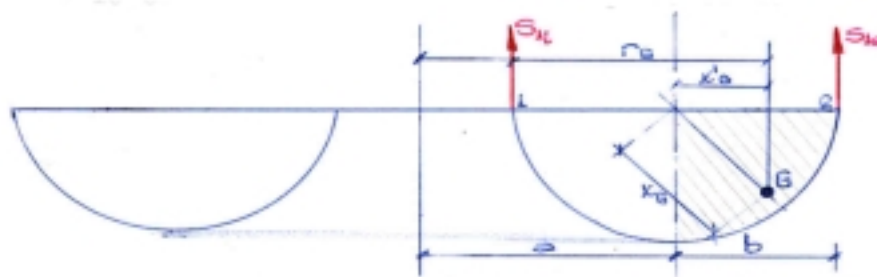
El radio de la base superior del depósito  $r$  que vale:

$$r = H \operatorname{tg} \alpha = 2.48 \cdot 0.707 = 1.75 \text{ m}$$

### RECIPIENTE SEMITORICO (lleno de líquido)

Nosotros para gases hemos visto un recipiente tórico completamente cerrado, pero para líquidos tiene que ser abierto, en este caso de forma semitorica {figura 26).

El depósito lo consideraremos lleno de líquido es decir, hasta la parte superior.



Para este caso nos limitaremos a deducir únicamente los esfuerzos en los puntos 1 y 2. Vale decir que deduciremos  $S_{1e}$ ,  $S_{1i}$ ,  $S_{2e}$ ,  $S_{2i}$ .

Para ello consideramos una sección o corte del recipiente semitorico, que es el que se indica con rayado, pero teniendo en cuenta que se considera en todo el desarrollo del recipiente.

Precisamente consideramos el estudio en estos puntos, porque en otros, resultan expresiones muy largas, que no viene al caso estudiarlas, pues solo interesa el criterio de como se resuelven.

La ecuación de equilibrio que se puede plantear (parte rayada) a lo largo del toro es:

$$S_{ie} \times 2\pi(a+b) - Q =$$

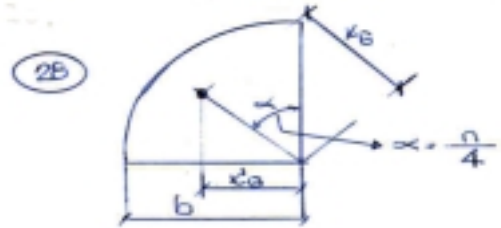
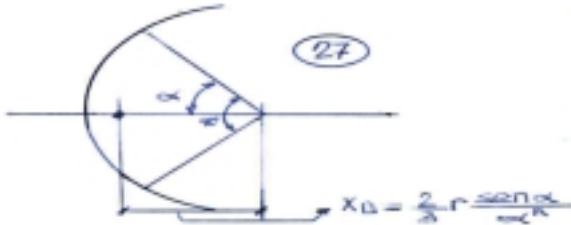
$$(1) \quad S_{ie} = \frac{Q}{2\pi(a+b)} \quad S_{li} = \frac{Q}{2\pi(a-b)} \quad (2)$$

El peso Q, lo vamos a calcular mediante el Teorema de GULDIN en función del volumen.

El teorema de GULDIN dice:

Si tenemos una superficie que gira en torno de un eje engendra un volumen que se calcula en forma general de la siguiente manera: multiplicando la superficie de rotación por la circunferencia que describe el baricentro de dicha superficie. Es decir por ejemplo:

$r_g$  = radio del baricentro



$X'g$  = distancia al centro de gravedad de un sector circular medida en proyección horizontal.

Cuando se tiene un ángulo cualquier:  $\alpha$ , la expresión general de la distancia al centro de gravedad  $Xg$  vale:

$$Xg = \frac{2}{3} r \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}$$

Como se trata de un cuarto de círculo tenemos (figura 28)  $\alpha = 45^\circ$  o sea  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Reemplazando en la formula anterior tenemos:

$$X_g = \frac{2}{3} b \times \frac{\text{sen } 46^\circ}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3} b \times \frac{0.707}{\frac{\pi}{4}}$$

pero lo que nos interesa a nosotros es la distancia  $X'g$  luego:

$$X'g = Xg \times \cos 45^\circ$$

$$X'g = \frac{2}{3} b \frac{0.5}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3\pi} b = 0.42b \quad X'g = 0.42b$$

Por Guldin: Superficie que gira:  $\frac{\pi b^2}{4}$  (cuarto de círculo)

Longitud de la circunferencia descrita por el baricentro que es:  $2\pi r_g$

$$V = \frac{\pi b^2}{4} \times 2\pi r_g \quad r_g = a + X'g \quad r_g = a + 0,42b$$

Luego:  $V = \frac{\pi b^2}{4} \times 2\pi(a + 0.42b)$  multiplicando  $V\gamma = Q$  y reemplazando en 1

$$\text{Tenemos: } S_{ie} = \frac{\gamma \frac{\pi b^2}{2} (a + 0.42b)}{2\pi(a+b)} \therefore S_{ie} = \gamma \frac{\pi b^2}{a} \frac{(a + 0.42b)}{(a+b)}$$

Para calcular  $S_{ii}$  es exactamente lo mismo pero restando el radio(b) luego:

$$S_{ii} = \gamma \frac{\pi b^2}{4} \frac{(a - 0.42b)}{(a-b)}$$

Calculamos ahora los esfuerzos  $S_2$  en los puntos dados (1 y 2) con la expresión



$$\text{general: } \frac{S_{1e}}{R_{1e}} + \frac{S_{2e}}{R_{2e}} = Z = 0$$

$Z = 0$  por no haber presión de líquido en los puntos dados.

Luego:  $R_{1e} = b$        $R_{2e} = -(a + b)$

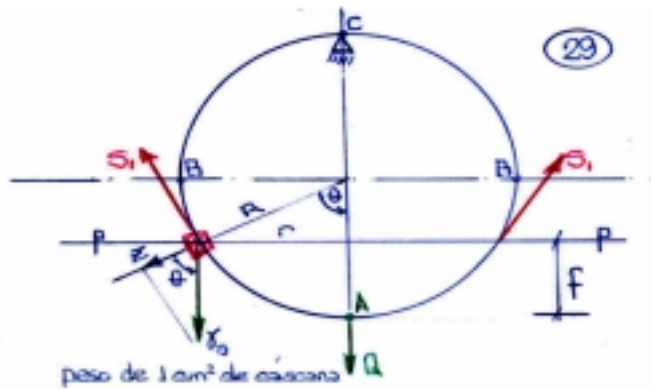
$$\frac{S_{1e}}{b} + \frac{S_{2e}}{-(a+b)} = 0 \therefore S_{2e} = -S_{1e} \frac{(a+b)}{b} \quad S_{2e} = -\gamma \frac{\pi b}{4} (a + 0.42b)$$

$$\text{Para el cálculo de } S_{2i} \text{ será: } \frac{S_{1i}}{R_{1e}} + \frac{S_{2i}}{-(a-b)} = Z = 0 \therefore S_{2i} = -S_{1i} \frac{(a-b)}{b}$$

De acá se observa que de los dos esfuerzos el mayor es el exterior  $S_{2e}$  y ambos son de compresión.

### OTROS CASOS DE CARGAS QUE PUEDEN PRESENTARSE

Por ejemplo: Calcular los esfuerzos producidos por el peso propio únicamente en una esfera que se encuentra sostenida como lo indica la figura 29.



Para hacer el análisis por peso propio únicamente hacemos lo mismo que para los casos anteriores o sea cortamos a la esfera con un plano (p).

El peso  $Q$  es el que corresponde a la parte de cáscara que está por debajo del plano p-p luego:

La carga  $Q$  se puede calcular multiplicando el área de la superficie de un casquete por el espesor  $s$  y el peso específico del material.

$$\text{Superficie Casquete} = 2\pi Rf$$

$$R = \text{radio de la esfera} \quad Q = 2\pi Rf \times s \times \gamma$$

En esta expresión podemos expresar la flecha en función del ángulo  $\theta$  y del radio  $R$  luego:  
 $f = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta)$

$$Q = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta) \times s \times \gamma$$

Tenemos que la fórmula de  $S_1$  (esfuerzo de tracción vale):  $S_1$  hacia arriba se oponen al peso

$$Q. \quad S_1 = \frac{Q}{2\pi R \sin^2 \theta}$$

Reemplazando el valor de  $Q$  tenemos:

$$S_1 = \frac{2\gamma R^2 s (1 - \cos \theta)}{2\pi R \sin^2 \theta} = \frac{\gamma R s (1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)} = \frac{\gamma R s (1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \therefore S_1 = \frac{\gamma R s}{(1 + \cos \theta)}$$

Esta expresión es válida aun sobrepasando el ángulo  $\theta$  para arriba de  $B$ ; en cuyos casos al pasar  $\theta$  para arriba de  $B$  sería un ángulo del segundo cuadrante que aparece como valor negativo y que al resolverlo se llega a la misma expresión.

$$\text{Cálculo de } S_2: \quad \frac{S_2}{R} + \frac{S_1}{R} = Z \therefore Z = \gamma s \cos \theta$$

$$\text{Luego: } \frac{S_2}{R} + \frac{S_1}{R} = \gamma s \cos \theta \therefore S_2 = \gamma R s \times \cos \theta - S_1$$

Reemplazando en la expresión dada el valor de  $S_1$  tenemos:

$$S_2 = \gamma R s \cos \theta - \frac{\gamma R s}{1 + \cos \theta} = \gamma R s \left[ \cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right] \therefore S_2 = \gamma R s \left[ \cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right]$$

Verificación para distintos puntos:

$$\text{Punto A ----- } \theta = 0^\circ \text{ luego } = S_1 = S_2 = \frac{\gamma R s}{2}$$

Punto B -----  $\theta = 90^\circ$  luego  $S_1^{(B)} = \gamma R s(\text{tracción})$   $S_2^{(B)} = -\gamma R s(\text{compresión})$

Punto C de apoyo, punto donde actúa una carga concentrada.

$\theta = 180$  nos da:  $S_1 = S_2 = \infty$

Que es lo que ocurra cuando hay cargas concentradas que las tensiones son infinitas en esos puntos.

Luego lo que se debe hacer es variar (aumentar) la zona de apoyo; produciendo un radio adecuado de manera de disminuir el valor de la tensión.

Es decir hay que obtener un valor de  $\theta$  tal que las tensiones que se obtienen sean compatibles con el material.

### ESFERA SOMETIDA A DOS CARGAS CONCENTRADAS

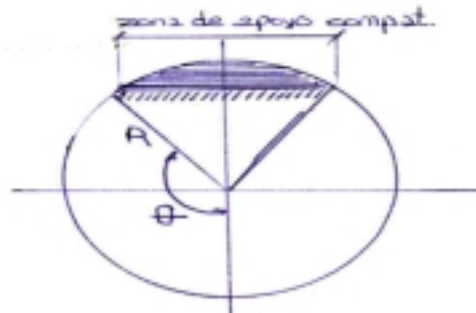
Para este caso si nosotros hacemos un corte con un plano p-p tenemos que la formula de  $S_1$  estaría expresada en este caso por:  $S_1 = \frac{P}{2\pi R \text{sen}^2 \theta}$

Se observa aquí que también en el punto de abajo (A) como  $\theta = 0$  queda,  $S_1 = \infty$

Para el valor de  $S_2$ ,  $Z = 0$  porque en la unidad de superficie estamos prescindiendo de su peso (no hay carga)

Luego:  $S_2 + S_1 = 0$ ,  $S_2 = - S_1$

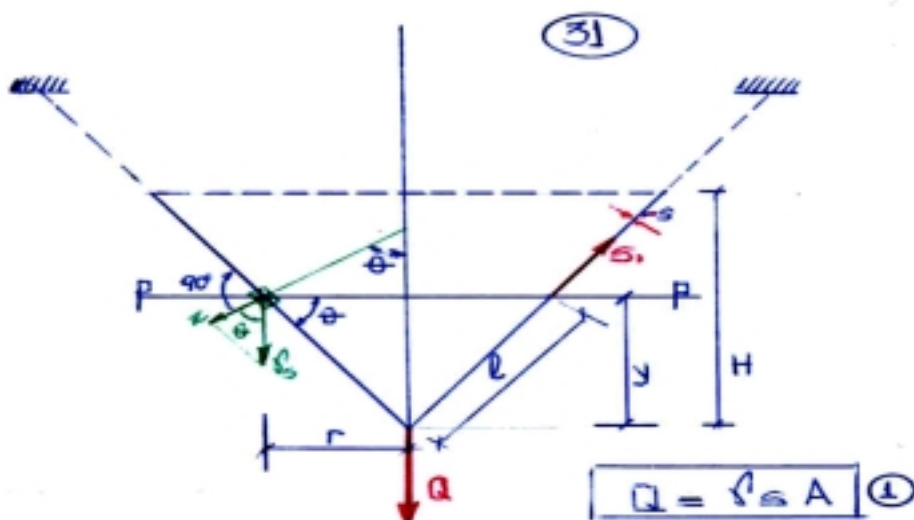
Como  $S_1$  es siempre de tracción la  $S_2$  será siempre de compresión, por lo tanto en el sentido vertical (o sea del meridiano) los esfuerzos están sometiendo a tracción y en todos los paralelos los esfuerzos trabajan a compresión. Esto sería a la inversa si las fuerzas P actuaran de sentido contrario al dado en figura 30.



### RECIPIENTE CONICO SOMETIDO A PESO PROPIO

Supongamos tener un recipiente cónico sujeto en la parte superior (Fig.31)

Debemos considerar cuales son las cargas o esfuerzos internos que aparecen debido al peso propio únicamente.



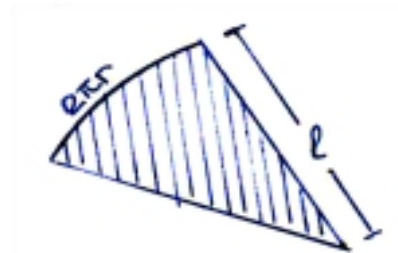
Es un recipiente que tiene un determinado espesor y material y queremos ver cuales son los esfuerzos que aparecen debidos al peso propio.

Entonces procedemos de la misma forma explicada anteriormente,

haciendo un corte con un plano p-p.

La carga Q que actúa por debajo del plano p-p se puede calcular mediante el producto del peso específico del material del que está constituido la cáscara por el espesor y por el área que corresponde a esa cáscara.

$$\text{El área } A \text{ es: } A = \frac{2\pi r l}{2} = \pi r l$$



$$Q = \gamma s A \quad (1)$$

L: es la longitud de la cara lateral del cono y (r) es radio de la base del cono.

Luego reemplazando en (1) tenemos:  $Q = \gamma s \pi r l$

La expresión de  $S_1$ , es decir, el esfuerzo, según el meridiano, que es un, esfuerzo de tracción, que se desarrolla según lo indica la figura 31, será:

$$S_1 = \frac{Q}{2\pi r \text{ sen } \theta} = \frac{\gamma s r \pi r l}{2\pi r \text{ sen } \theta} \therefore S_1 = \frac{\gamma s}{2} \frac{l}{\text{sen } \theta}$$

A veces resulta mucho más cómodo expresar  $S_1$  en función de la distancia (y) porque nos da la comodidad de trabajar en altura y separarlo en distancias convenientes, luego podemos

expresar (1) en función de (y).  $l = \frac{y}{\text{sen } \theta}$

$$\text{Reemplazando en } S_1 \text{ tenemos: } S_1 = \frac{\gamma s}{2} \frac{y}{\text{sen}^2 \theta}$$

Como seno  $\theta$  es constante, el peso específico y el espesor también lo es, resulta que el esfuerzo máximo se desarrolla en el borde superior del cono, o sea para  $y = H$

$$S_{1 \max} = \frac{\gamma s H}{2 \text{sen}^2 \theta}$$

El esfuerzo  $S_2$  lo determinamos aplicando la expresión general:  $\frac{S_2}{R_2} + \frac{S_1}{R_1} = Z \frac{S_1}{\infty} = 0$

siendo  $R_1$  (radio de curvatura del meridiano) luego tenemos que nos queda:

$$S_2 = Z \times R_2 \quad (2)$$

Z que es la componente según la normal a la cáscara del peso propio por unidad de superficie de la cáscara.

Luego el peso propio por unidad de superficie de la cáscara vale:

$$\gamma s (\text{peso específico} \times \text{espesor})$$

Por lo tanto proyectando este valor sobre la normal a la cáscara tenemos:

$$Z = \gamma \times s \times \cos \theta$$

Con signo positivo porque es hacia afuera, que coincide con el sentido positivo de Z.

Luego reemplazando Z en (2) y colocando  $R_2$  en función de (r) tenemos:  $R_2 = \frac{r}{\text{sen } \theta}$

$$S_2 = \gamma \times s \times \cos \theta \frac{r}{\text{sen } \theta} = \gamma \times s \times r \times \text{ctg } \theta$$

también podemos expresar a  $S_2$  en función de (y)  $r = y \text{ ctg } \theta$  luego

$$S_2 = \gamma \times s \times y \times \text{ctg}^2 \theta$$

Aquí también se observa que el esfuerzo máximo de  $S_2$  se obtiene en el borde superior, es decir que el  $S_2$  máximo, debido al peso propio será para  $(y = H)$

$$S_{2 \text{ máx.}} = \gamma \times s \times H \times c \operatorname{tg}^2 \theta$$

Veremos ahora el caso en que para el mismo depósito (cónico) los esfuerzos que originan una CARGA CONCENTRADA, actuando en el vértice inferior.

Supongamos una carga concentrada  $P$  (figura 32) y cortando como siempre con un plano

p-p. La Expresión de  $S_1$  es inmediata, será:  $S_1 = \frac{P}{2\pi r \operatorname{sen} \theta}$

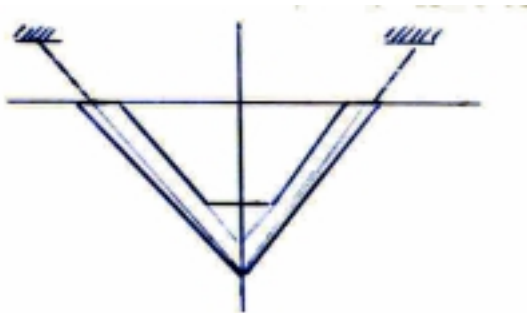
$P$  es la única carga que actúa por debajo del plano p-p. Colocando  $S_1$  en función de  $(y)$  tenemos:  $r = y \operatorname{ctg} \theta$

$$S_1 = \frac{P}{2\pi y \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}} = \frac{P}{2\pi y \cos \theta}$$

En estos casos  $\theta$  es siempre una constante, luego  $S_1$  depende del valor de  $(y)$  y aquí observamos que para  $y = 0$ , o sea en el vértice mismo, el esfuerzo  $S_1$  se hace infinito.  $S_1 = \infty$

Para evitar las tensiones infinitas debemos mantener constante el espesor de la cáscara hasta un punto, donde la distancia  $(y)$  o el radio correspondiente sea compatible con el espesor de la cáscara, luego desde ahí hasta el vértice hay que engrosar el espesor de la cáscara con un espesor tal que dé tensiones compatibles con el material.

Para calcular el esfuerzo  $S_2$  tenemos que:  $R_1 = \infty \therefore \frac{S_1}{R_1} = 0 \quad \frac{S_2}{R_2} = Z \therefore S_2 = ZR_2$



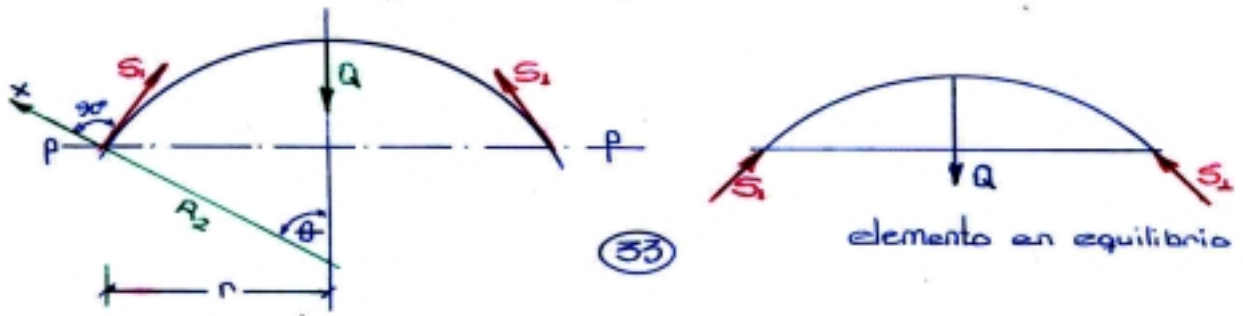
Pero  $Z = 0$  pues en el punto que consideramos no hay ninguna fuerza por unidad de superficie, ya que estamos considerando solamente la carga concentrada en el vértice inferior, luego:

$$Z=0 \quad S_2 = Z R_2 = S_2=0$$

Es decir cuando tenemos una carga concentrada no se desarrollan esfuerzos en el sentido anular, solamente hay esfuerzos en el sentido del meridiano.

## CUPULAS

Consideradas siempre en el régimen de membranas o láminas.



Supongamos una cúpula (figura 33) y realizamos ~n corte con el plano p-p  
 Consideramos a la normal a la cascara en el punto considerado como positiva hacia afuera.  
 Las formulas generales son similares a las ya vistas.  $S_1$  consideramos a Q como la carga de la parte superior al plano (p-p).  
 Luego la parte aislada estará en equilibrio con la carga Q y los esfuerzos  $S_1$  del meridiano que en este caso van a ser esfuerzos de compresión.  
 Luego la ecuación de equilibrio será:

$$S_1 \times 2\pi r \text{sen } n\theta - Q = 0 \quad (1)$$

Pero en la expresión (1) debemos considerar el signo del esfuerzo  $S_1$  para que de este modo nos de un esfuerzo de compresión, luego operando.

$$S_1 = \frac{-Q}{2\pi r \text{sen } \theta} \quad \text{signo que se coloca por convención}$$

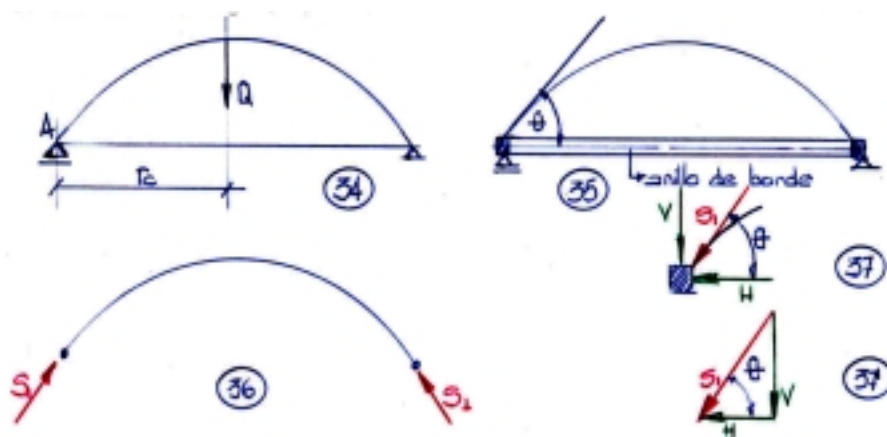
Ya que el signo que nos representa a un esfuerzo de compresión es convencionalmente (-) para nosotros.

De las operaciones analíticas que se efectúen en (1) solamente nos dirá si el sentido que se adoptó es el correcto o no.

Para el cálculo de  $S_2$  tenemos:

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = Z \quad \text{expresión general vista anteriormente}$$

En las cúpulas se suele presentar a veces un problema, en la parte final de las mismas, digamos una cúpula apoyada (simplemente apoyada) (fig. 34).



Al decir simplemente apoyada no se debe pensar como en el caso de vigas que tiene un apoyo fijo y otro móvil, en donde el desplazamiento permitido es en una dirección.

En el caso de cúpulas sometidas a cargas su desplazamiento debe permitirse en todo su contorno o anillo, luego los apoyos serán siempre móviles {apoyo único a lo largo del anillo} que permita aplastarse la cúpula movimientos en todo su contorno.

Luego, si tenemos una cúpula simplemente apoyada (figura 34) en el punto A extremo tiene que haber un esfuerzo de membrana  $S_1$  en la dirección de la tangente a la cáscara en el punto considerado, pero como hay un apoyo móvil la reacción es vertical, luego si la reacción es vertical, aparecerán esfuerzos de flexión y no se realizan las condiciones de borde supuesto en ese punto.

Entonces para que siga manteniéndose el régimen de membranas tenemos que recurrir a un anillo de borde (figura 35). Anillo de borde que sea capaz de absorber la componente horizontal del esfuerzo  $S_1$ .

Es decir, si le colocamos un anillo de borde (fig.35) en la parte inferior a la membrana, teniendo en cuenta siempre que la membrana se apoya libremente, ocurre que la fuerza  $S_1$  que tenemos en el extremo (fig.36) que actúa sobre la cáscara en el sentido indicado en la figura sobre el anillo va a actuar en sentido contrario (figura 37).

Luego la  $S_1$  se puede descomponer en una fuerza vertical que la va a absorber el apoyo (componente V) y la componente horizontal (componente H) es la que va a absorber el anillo.

La componente H valdrá llamando a  $\theta$  el ángulo que se forma con la tangente a la membrana en dicho punto (extremo) con la horizontal (fig.37).

$$H = S_1 \times \cos \theta$$

También podría expresarse la componente H en función de V (componente vertical) luego:  
 **$H = V \cdot \text{ctg } \theta$**

La componente V es de fácil determinación, ya que depende del sistema de cargas.

Si llamamos con Q a la carga vertical que actúa por encima del plano de apoyo (peso de toda la cáscara y carga que está actuando).

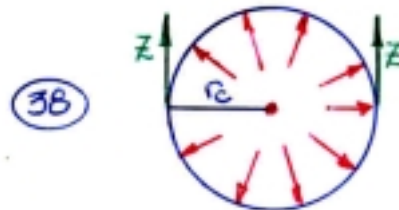
Entonces V valdrá:

$$V = \frac{Q}{2\pi rc}$$

De donde rc es el radio de contorno del anillo (fig. 38), luego:

$$H = \frac{Q}{2\pi rc} \times c \text{tg } \theta$$

La fuerza H actúa sobre el anillo como una fuerza de presión interior por unidad de longitud, sobre el anillo.



Quiere decir que la fuerza H va a originar sobre el anillo una fuerza de tracción Z (de esta forma se dimensiona el anillo de borde, que se calcula con la fórmula general de los cilindros) es decir:

La fuerza Z vale: presión interior por Radio.

$$Z = H \times rc = \frac{Qrc}{2\pi rc} c \text{tg } \theta \quad Z = \frac{Q}{2\pi} c \text{tg } \theta$$

Con esta fórmula dimensionamos el anillo (armadura de corte)

Este anillo en realidad introduce perturbaciones de borde (se producen además momentos flectores) caso que se verá más adelante para el régimen de placas.

La producción de momentos flectores está originado debido a que entre ellos es decir anillo y membrana hay distintas rigideces y obstaculizan el libre movimiento de la membrana en el borde inferior, luego existe un grado de empotramiento, y esto origina necesariamente otros efectos (momentos).

Ocurre en este caso algo similar a lo que se produce en los nudos de un pórtico que al tener un cierto grado de empotramiento impide la libre rotación de los elementos, por lo tanto se producen en los nudos momentos flectores.

Pero veremos más adelante que estos momentos influyen en el borde solamente de la cascara porque se amortiguan rápidamente a lo largo de la membrana (no ocurriendo esto con los pórticos que se propagan a otros nudos; y su propagación puede tener cierta importancia), que es la ventaja que se tiene sobre los pórticos, pues de otra manera su cálculo sería demasiado engorroso.

### EJEMPLOS DE APLICACIÓN

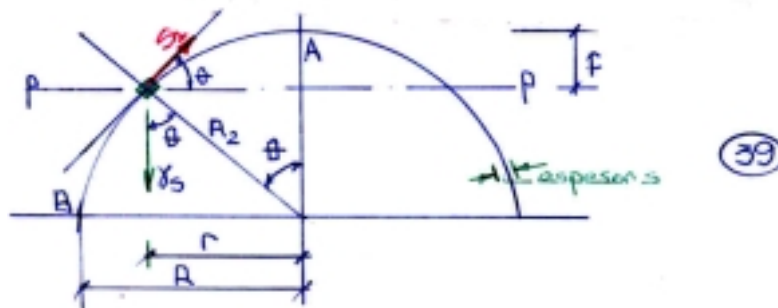


Las cúpulas tienen gran aplicación en el proyecto tanques HINTZE.

Se nos pueden presentar cúpulas cónicas (techo) cúpulas troncocónicas (recipiente) y en la parte inferior cúpula esférica.

**DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS EN UNA CUPULA ESFERICA** producida por su peso propio.

Tomando entonces una cúpula esférica (fig. 39) y haciendo un corte con el plano (p-p).



Tomando como meridiano media circunferencia tenemos que para este caso particular,

$$R = R_1 = R_2$$

La expresión del esfuerzo  $S_1$  es:

$$S_1 = \frac{-Q}{2\pi r \sin \theta}$$

(Peso que tiene la cúpula):  $Q = \gamma s A$

$A$  = área del casquete esférico que hay por encima del plano (p-p)

$A = 2 \pi R f$  siendo  $f$  la flecha del casquete.

Colocando la flecha ( $f$ ) en función de  $R$  y  $\theta$  tenemos:  $f = R - R \cos \theta$

Reemplazando en  $Q$  nos queda:

$$Q = \gamma \times s \times 2\pi \times R \times f$$

$$Q = \gamma \times s \times 2\pi \times R(R - R \cos \theta) = \gamma \times s \times 2\pi \times R^2(1 - \cos \theta)$$

$$S_1 = \frac{-\gamma \times s \times R^2(1 - \cos \theta)}{2\pi R \sin^2 \theta} = \frac{-\gamma \times s \times R(1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

$$S_1 = \frac{-\gamma \times s \times R(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos^2 \theta)} = \frac{-\gamma \times s \times R(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \therefore S_1 = \frac{-\gamma R s}{(1 + \cos \theta)}$$

Para el esfuerzo  $S_2$  tendremos:

$$S_2 + S_1 = ZR = -\gamma s R \cos \theta$$

El valor Z para este caso particular, como la carga ( $\gamma s$ ) (carga por unidad de superficie) actúa hacia abajo y su proyección actúa en el sentido negativo de la normal, luego será negativo.

$$S_2 = -\gamma s R \cos \theta - S_1 = -\gamma s R \cos \theta + \frac{\gamma s R}{1 + \cos \theta}$$

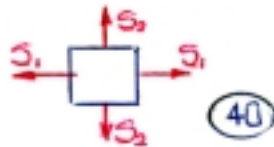
$$S_2 = \gamma s R \left[ \frac{1}{(1 + \cos \theta)} - \cos \theta \right]$$

Por EJEMPLO:

para el punto A (superior a la esfera)-----  $\theta = 0^\circ$

$$\text{Luego : } S_1^{(A)} = \frac{-\gamma s R}{2} \quad S_2^{(A)} = \frac{-\gamma s R}{2}$$

Estos son iguales pues si tomamos un elemento en la parte superior de la cáscara (fig.40) o sea en el centro, las dos tensiones en las dos direcciones son  $S_1$  e  $S_2$ , y las dos están en las mismas condiciones de simetría, las dos coinciden con el meridiano.



Para el punto B. -----  $\theta = 90^\circ$

$$S_1^{(B)} = -\gamma s R \quad S_2^{(B)} = -\gamma s R$$

Con esto analizamos que  $S_1$  es siempre de compresión (-) y los valores de  $S_2$  cambian a lo largo del meridiano, pasa de un valor de compresión en la parte superior de la cúpula a un valor de tracción en la zona inferior.

Luego hay una zona de la cúpula en donde  $S_2 = 0$

La determinación del ángulo de cambio lo podemos hacer haciendo  $S_2 = 0$

En la expresión: (1)

$$\frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta = 0 \quad \text{factoreando}$$

$$1 - \cos \theta - \cos^2 \theta = 0 \quad \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \therefore \cos \theta = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 + 2.24}{2} \cong 0.62$$

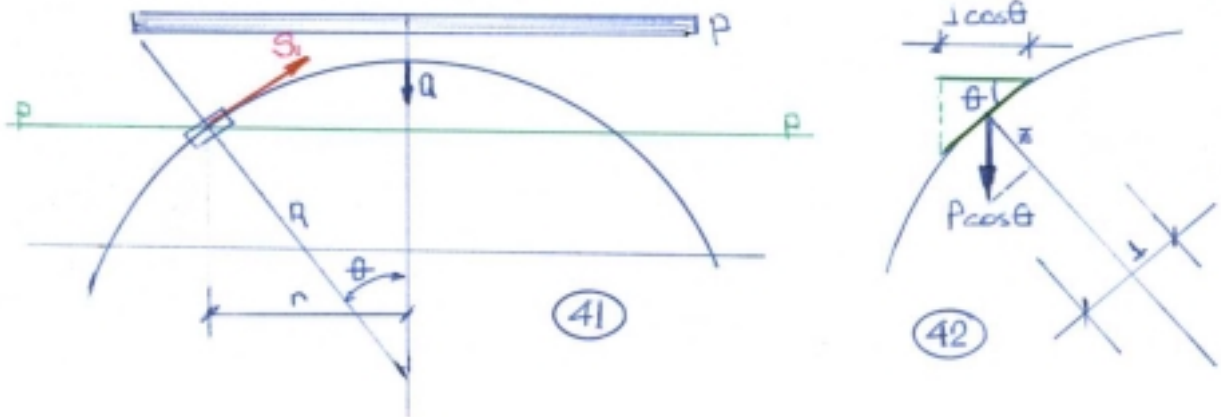
$$\cos \theta = 0.62 \rightarrow \theta = 51^\circ 40'$$

En este ángulo se anula el esfuerzo  $S_2$  esto es muy importante tenerlo en cuenta para la forma de la cúpula, por cuanto nos conviene que las cúpulas trabajen casi totalmente a esfuerzo de compresión. Tenemos que para valores de  $\theta$  menores de  $51^\circ 40'$  estaremos en zona de compresión.



## DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS

Si hubiera una carga uniforme (de nieve o sobrecarga cualquiera) por unidad de superficie horizontal (fig.41) la carga que se toma es por  $m^2$  de sentido horizontal como carga uniforme a lo largo de la cúpula.



Las expresiones son simples:

La carga "Q" que actua por encima del plano (p-p) es:

$Q = p \pi r^2$  (superficie horizontal que se está considerando, y es un circulo la parte proyectada sobre el plano (p-p), luego el esfuerzo  $S_1$  será:

$$S_1 = \frac{-Q}{2 \times \pi \times r \times \sin \theta} = \frac{-p \times r^2 \times \pi}{2 \times \pi \times r \times \sin \theta}$$

teniendo en cuenta que:  $\frac{r}{\sin \theta} = R$

$$S_1 = -p \times \frac{R}{2} \quad \text{valor constante.}$$

Luego para cualquier punto de la cáscara  $S_1$  se mantiene constante para el caso de cargas uniformes.

para el esfuerzo  $S_2$  tenemos:

$$S_2 + S_1 = Z \times R \quad ; \quad S_2 = (Z \times R) - S_1$$

$z$  para este caso particular es distinto de los casos anteriores.

Tomando una unidad de la superficie de la cáscara (figura 42) y computando cual es la carga que corresponde a esa unidad de superficie tenemos que es: tomando valor 1 en el sentido de la tangente a la cáscara en proyección será  $(1 \cos \theta)$  y la carga que incide en esa unidad de superficie de cáscara será:  $p \cos \theta$  (carga  $p$  por la superficie proyectada) y como  $Z$  es la proyección de esa unidad de superficie sobre la normal será:

$$Z = -p \times \cos^2 \theta$$

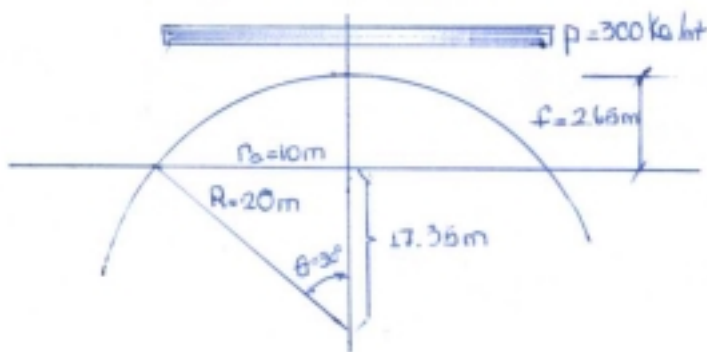
Es de valor negativo por ser de sentido opuesto al considerado como positivo.

Reemplazando:

$$S_2 = -pR \cos^2 \theta - S_1 = -pR \cos^2 \theta + p \frac{R}{2}$$

$$S_2 = p \frac{R}{2} (1 - 2 \cos^2 \theta) = p \frac{R}{2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$S_2 = -p \frac{R}{2} \cos 2\theta$$



Resolvemos ahora un ejemplo:

Tenemos una cáscara de 7 cm de espesor y una sobrecarga:  $p = 300\text{ Kg/cm}^2$ . Esto corresponde al peso propio de la cáscara.

Las expresiones de los distintos esfuerzos son:

$S_{ig}$  (esfuerzo debido al peso propio)

$$S_{ig} = -\frac{\gamma s R}{1 + \cos \theta}$$

Si consideramos un  $\gamma = 2.400\text{ Kg/m}^3$  (hormigón) =  $0,0024\text{ Kg/cm}^3$ .

$R$  = radio de la cáscara: 20 m.

$$S_{ig} = \frac{-0.0024 \times 7 \times 2000}{1 + \cos \theta} = \frac{-33.6}{1 + \cos \theta}$$

$$S_{ig} = -33.6\text{ kg/cm}^2 \frac{1}{1 + \cos \theta}$$

Con esta ecuación podemos hacer la ley de variación en función del coseno

de  $\theta$ .

$$S_{2g} = \gamma \cdot s \cdot R \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right) \quad \text{vemos que } \gamma s R = 33.6$$

$$S_{2g} = 33.6 \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right)$$

Vemos ahora los esfuerzos que se deben a la sobrecarga:

$$S_{1p} = -p \frac{R}{2} = -0.03 \times \frac{2000}{2} = -30 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_{1p} = -30 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_{2p} = -p \frac{R}{2} \cos 2\theta = -30 \times \cos 2\theta$$

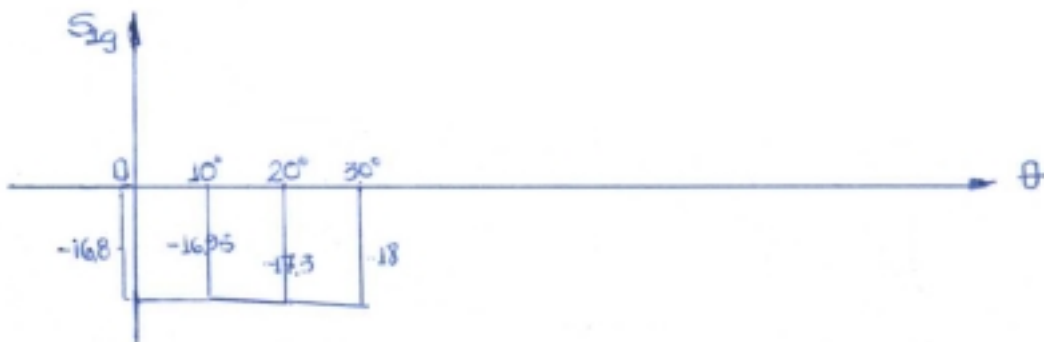
$$S_{2p} = -30 \times \cos 2\theta$$

Si hacemos una representación gráfica tomando  $\theta$  en abscisas y  $S_1$  en ordenadas.

Segun el eje de las abscisas tomamos solo 3 puntos  $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$  y  $30^\circ$ , vemos que para  $0^\circ$  el  $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$  luego:

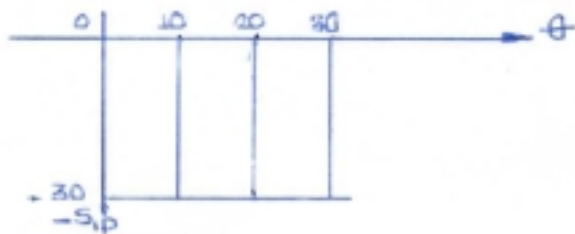
$$S_{ig0^\circ} = -16,8 \text{ (sentido hacia abajo)}$$

$$S_{ig10^\circ} = -16.95 \quad ; \quad S_{ig20^\circ} = -17.3 \quad ; \quad S_{ig30^\circ} = -18$$



$S_{ig30^\circ} = -18$  maximo valor de  $S_{ig}$  debido al peso propio luego el máximo lo tomamos en el borde inferior de la cupula.

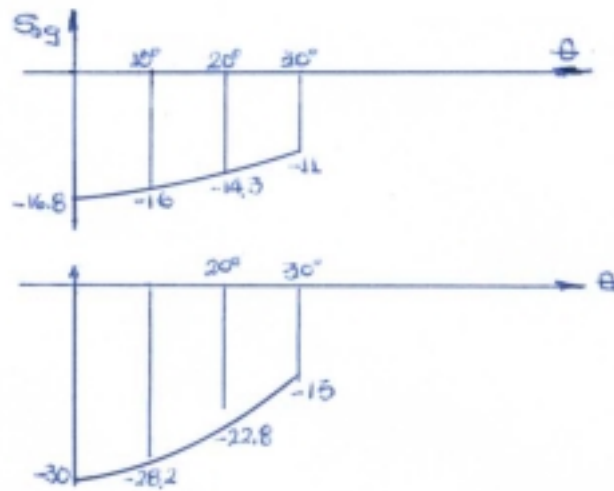
Vemos ahora el  $S_{ip}$  debido a la carga  $p$ , es un valor constante e igual a  $-30 \text{ Kg/cm}$  para los tres puntos.



Con esto ya podemos ver cual es el valor máximo o sea. en donde tenemos el máximo al superponer los valores  $S_{ig} + S_{ip}$  luego será:

$$S_{imax} = -48 \text{ Kg/cm}$$

Para  $S_2$  tenemos:  $S_{2g}$  (debido al peso propio).



Debido a cargas  $S_{2p}$ .

El máximo valor de  $S_2$  se obtiene como se ve para  $\theta = 0^\circ$  o sea en el vertice de la cupula.

$$S_{2\max} = -30 - 16.8 = -46.8 \text{ Kg/cm} \approx 47 \text{ kg/cm}$$

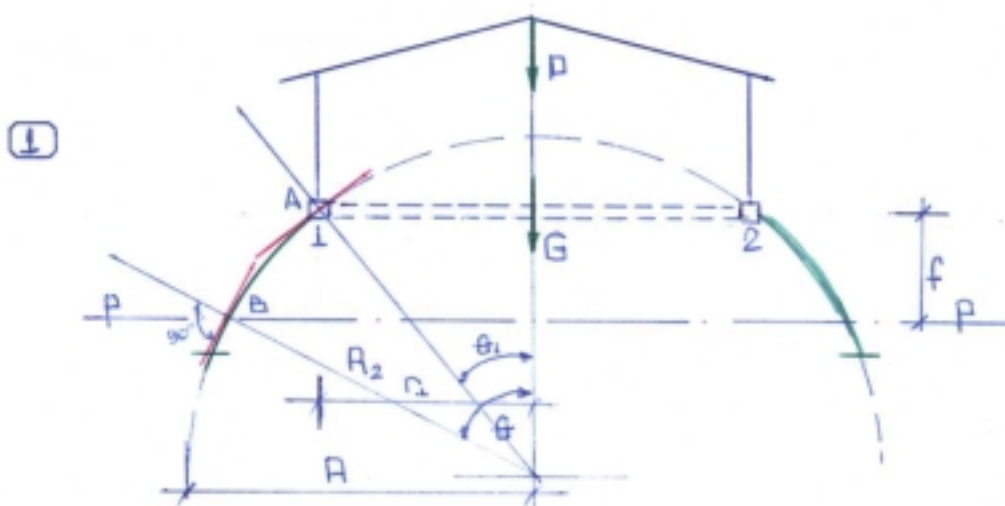
para el cálculo de la tensión será para una cáscara de espesor 7cm.

$$\sigma = \frac{-47 \text{ kg/cm}}{7 \text{ cm}} \cong 7 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{valor de compresion})$$

Como se observa la tension con que se trabaja el hormigon es muy baja aun teniendo una sobrecarga y luz de cupula relativamente alta.

Debe tenerse especial cuidado que las tensiones sean bajas por el pandeo.

#### CUPULA ESFERICA CON LINTERNA



La cubierta de la linterna puede ser otra cúpula esférica, que se puede calcular independientemente.

En este caso la forma de determinar los esfuerzos es siguiendo el mismo criterio anterior, o sea haciendo un corte con un plano (p-p) y estudiando el equilibrio de la parte superior.

Las cargas que actúan son: p: peso de la linterna (incluyendose dentro de este peso todo lo que sea de la linterna, o sea desde el punto (1) hacia arriba y volviendo hasta (2)) o sea, las paredes de la linterna y la cubierta.

Luego además actúa el peso propio de la parte de cáscara considerada (G), (sin linterna).

La carga total se forma con:  $Q = p + G$

El peso de la porción de cáscara G se puede calcular perfectamente trazando la normal en el punto B y cortando al eje de revolución, tenemos el ángulo  $\theta$  y si trazamos también la normal a la cáscara en el punto (1) punto donde comienza la linterna, el ángulo que forma con el eje lo llamamos  $\theta_1$ .

Si llamamos con F la flecha según lo indica la figura, el peso G será:

$$G = \gamma s A$$

$\gamma$  - peso específico del material utilizado como cubierta.

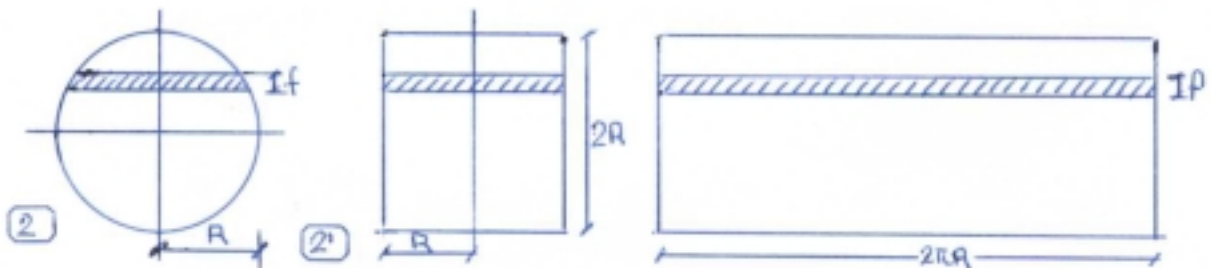
s - espesor de la cubierta.

A - area que corresponde a dicho sector de cubierta.

El area del sector del cubierta se puede calcular perfectamente bien como área de una zona esférica.

$$A = 2\pi R f \quad (R: \text{radio de la esfera})$$

Una forma de recordar la formula del área es: el area de una franja cualquiera como la de la figura (2).



Se puede siempre establecer la equivalencia con un cilindro (fig. 2) de radio R (o sea igual que el de la esfera) y como altura el diámetro de la esfera o sea 2R; luego si tomamos una franja en la esfera, le corresponde una franja equivalente al cilindro de altura (f), luego al área de la zona esférica es el area que corresponde al desarrollo del cilindro.

El area del desarrollo del cilindro es:

$$A = 2\pi R f = 2\pi R (R \cos \theta_1 - R \cos \theta)$$

$$A = 2\pi R^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta)$$

La formula para la determinacion de los esfuerzos es siempre la misma o sea:

$$S_1 = \frac{-Q}{2\pi R \sin^2 \theta} \quad \text{como } Q = P+S \text{ tenemos}$$

$$S_1 = \frac{-P}{2\pi R \sin^2 \theta} - \frac{\gamma s 2\pi R^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta)}{2\pi R \sin^2 \theta}$$

$$S_1 = \frac{-P}{2\pi \sin^2 \theta} - \frac{\gamma s R (\cos \theta_1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \quad (A)$$

Con la expresion A podremos calcular el esfuerzo S1 para cualquier punto de la cascara.

Por ejemplo el esfuerzo  $S_1$  en el punto A.  
Tenemos que  $\theta = \theta_1$  luego nos queda:

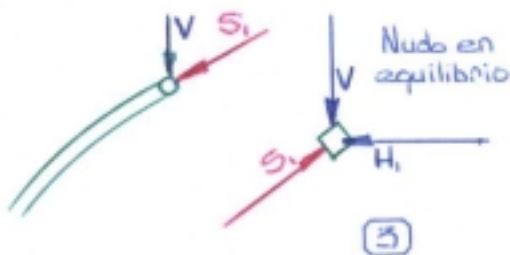
$$S_1^A = \frac{-P}{2\pi \text{sen}^2 \theta_1}$$

Recordando que  $P$  es el peso total de la linterna.

Vemos que en el punto A se nos presenta la siguiente situación: actúa la carga  $V$  por unidad de longitud de circunferencia:

$$V = \frac{P}{2\pi r_1} \quad (\text{carga en sentido vertical})$$

Luego vemos que si aislamos un pequeño elemento (fig 3), en ese elemento actúa la carga  $V$  y está actuando también  $S_1$  (esfuerzo de compresión que se produce en la cáscara), luego en las condiciones dadas no podemos obtener el equilibrio del elemento.



Luego para que en ese punto exista realmente equilibrio y se efectúen las hipótesis de membrana, hay que considerar un esfuerzo horizontal  $H_1$ , que actúara de tal forma que al componer con  $V$  nos de una resultante en la dirección de  $S_1$ .

Luego se debe prever un anillo de borde. Por lo tanto el anillo de borde trabajará en el punto considerado con los siguientes esfuerzos:

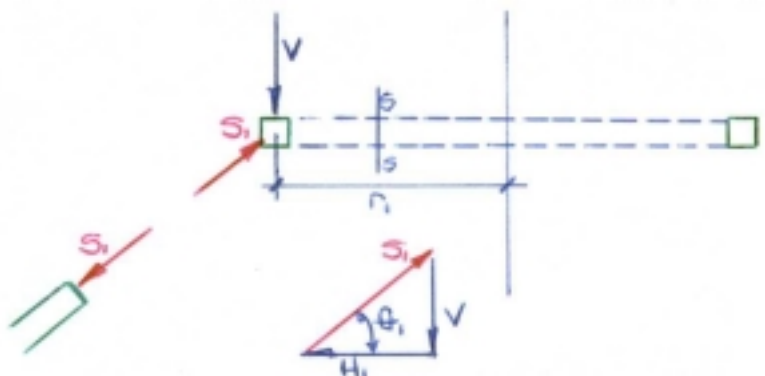
$V$ : en el sentido vertical

$S_1$ : con el sentido de compresión en la cáscara, luego será de sentido contrario en el anillo y esto origina una resultante  $H_1$  que lo va absorber el anillo.

Luego el anillo va a trabajar a compresión con una fuerza  $H_1$  que actúa en todo el contorno (fuerza por unidad de longitud de circunferencia que corresponda).

Luego  $H_1 = S_1 \cos \theta_1$  esfuerzo que soporta el anillo.

$H_1$  que actúa como fuerza de presión por unidad de longitud origina una fuerza normal en una sección cualquiera del anillo  $N_1$  que será igual a la presión por el radio.



$$N_1 = H_1 \times r_1 = S_1 \times \cos \theta_1 \times R \times \text{sen} \theta_1$$

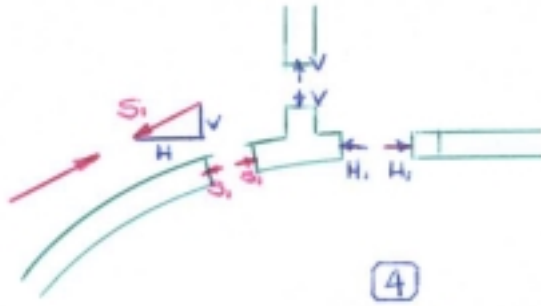
$$N_1 = S_1 R_1 \frac{\text{sen} 2\theta}{2}$$

Con esta fuerza normal se calcula el anillo; y como está sometido a compresión se calcula como una columna común, determinándose la sección del anillo y la armadura mínima como si fuera una columna sometida a compresión.

Los esfuerzos en el nudo son equilibrantes o sea si hacemos un esquema de nudo tenemos que en el sentido de dichos esfuerzos son los dados por la figura N° 4.

En la membrana el esfuerzo  $S_1$  es de compresión, luego en la cara del nudo es de sentido opuesto.

En el anillo el esfuerzo es hacia el anillo, pero en el nudo es de sentido contrario y así también ocurre con el muro de la parte superior de la linterna.



Calculo de  $S_2$ :

Recordando que: 
$$\frac{S_2}{R_2} + \frac{S_1}{R_1} = Z \quad (B)$$

para este caso particular como se trata de una cubierta esférica tenemos:  $R_2 = R_1 = R$  y como estamos considerando el peso propio de la cáscara en un punto cualquiera de la misma:

$$Z = -\gamma s \cos\theta$$

Peso en sentido vertical proyectado sobre la normal a la cáscara.

Reemplazando en (B) tenemos:

$$S_2 + S_1 = ZR = -\gamma s R \cos\theta$$

$$S_2 = -\gamma s R \cos\theta + \frac{P}{2\pi \text{sen}^2 \theta} + \frac{\gamma s R (\cos\theta_1 - \cos\theta)}{\text{sen}^2 \theta}$$

$$S_2 = \frac{P}{2\pi R \text{sen}^2 \theta} - \gamma s R \left[ \cos\theta - \left( \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta}{\text{sen}^2 \theta} \right) \right]$$

$$S_2 = \frac{P}{2\pi R \text{sen}^2 \theta} - \frac{\gamma s R}{\text{sen}^2 \theta} [\cos\theta (\text{sen}^2 \theta - 1) - \cos\theta_1]$$

tenemos que en el punto A para  $\theta = \theta_1$

$$S_2^A = \frac{P}{2\pi R \text{sen}^2 \theta} - \gamma s R \cos\theta_1$$

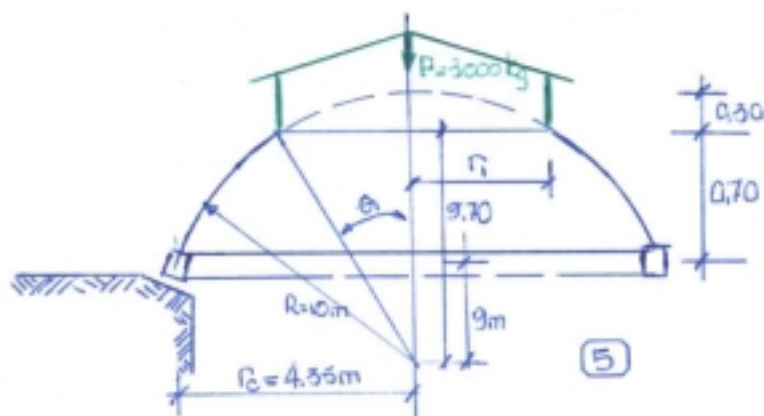
Ejemplo:

Supongamos una cupula con los siguientes datos.

Radio de la cupula  $R = 10\text{m}$

Radio de contorno =  $4.35\text{m}$

$r_1 = 2.45\text{m}$



$$\text{sen } \theta_1 = \frac{r}{R} = \frac{2.45}{10} = 0.245$$

$$\text{cos } \theta_1 = \frac{9.70}{10} = 0.97$$

P = peso de la linterna = 3000 kg

$$S_1^A = \frac{-3000kg}{2 \times 3.14 \times 10 \times 0.245^2} = \frac{-3000}{5.76} = -800kg$$

$$S_1^A = -800kg / m$$

$N_1$  = fuerza que nos interesa para el calculo del anillo.

$$N_1 = \frac{800}{2} \times 10 \times 2 \times 0.24 = 1920kg \quad (\text{fuerza de compresion})$$

Con este valor dimensionamos la sección del anillo.-

### CUPULA CUYO MERIDIANO ES UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA

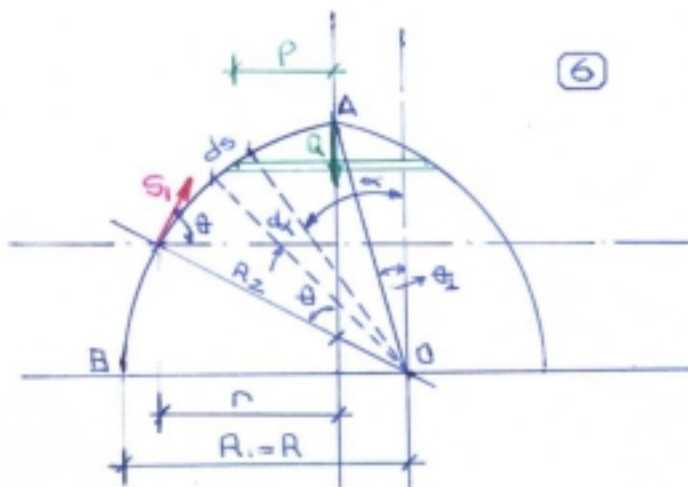
Con una cuspide en la parte superior.

Es un arco de circunferencia en el cual llega al apoyo con una tangente vertical, luego el radio del arco de circunferencia estará en o para el sector izquierdo.

$R_1$  = Radio de curvatura del meridiano = R

Cortamos la cúpula con un plano p-p y trazando la normal en ese punto de cáscara y hasta donde corta al eje vertical tenemos  $R_2$ .

El angulo que forma con la vertical es  $\theta$ .



La carga Q que es la carga de la parte superior de la cúpula con respecto al plano p-p la calculamos por medio del teorema de Guldin.

Tomando por ejemplo un elemento de longitud ds que lo ubicamos a una distancia del eje vertical que pasa por el centro de curvatura.



El peso del elemento de cáscara lo llamamos  $dQ$  y es por el teorema de Guldin:

$$dQ = 2\pi \cdot p \cdot ds \cdot \gamma \cdot s = A \cdot \gamma \cdot s$$

donde  $s$  es el espesor de la cáscara.

Expresando todo en función de alfa tenemos:

$$p = R \sin \alpha - R \sin \theta_1 = R(\sin \alpha - \sin \theta_1) \quad ds = R d\alpha$$

$$dQ = 2\pi R(\sin \alpha - \sin \theta_1) \cdot R \cdot d\alpha \cdot \gamma \cdot s$$

integrando entre los límites de  $\theta$  a  $\theta_1$  tenemos:

$$Q = \int_{\theta_1}^{\theta} 2\pi R^2 \cdot \gamma \cdot s (\sin \alpha - \sin \theta_1) d\alpha =$$

$$Q = 2\pi R^2 \cdot \gamma \cdot s \left[ (-\cos \alpha)^{\theta_{\theta_1}} - (\alpha \sin \theta_1)^{\theta_{\theta_1}} \right]$$

$$Q = 2\pi R^2 \cdot \gamma \cdot s \left[ (\cos \theta_1 - \cos \theta) - (\theta - \theta_1) \sin \theta_1 \right]$$

el esfuerzo  $S_1$  sera:  $S_1 = \frac{-Q}{2\pi r \sin \theta}$  ;  $r = (R_1 \sin \theta - R \sin \theta_1)$

$$S_1 = \frac{-\gamma \cdot s \cdot 2\pi \cdot R^2 [\cos \theta_1 - \cos \theta - (\theta - \theta_1) \sin \theta_1]}{2\pi R(\sin \theta - \sin \theta_1) \sin \theta_1}$$

$$S_1 = \frac{-\gamma \cdot s \cdot R [\cos \theta_1 - \cos \theta - (\theta - \theta_1) \sin \theta_1]}{\sin \theta (\sin \theta - \sin \theta_1)}$$

para el esfuerzo  $S_2$  sera:

$$\frac{S_2}{R_2} + \frac{S_1}{R_1} = Z = -\gamma \cdot s \cdot \cos \theta \quad (\text{valor de } Z \text{ para peso propio}$$

solamente)

$R_1 =$  radio del arco de circunferencia =  $R$

$$R_2 = \frac{r}{\sin \theta} = \frac{R(\sin \theta - \sin \theta_1)}{\sin \theta}$$

$$\frac{S_2}{R_2} = -\gamma \cdot s \cdot \cos \theta - \frac{S_1}{R} = -\gamma \cdot s \cdot \cos \theta + \frac{\gamma \cdot s [\cos \theta_1 - \cos \theta - (\theta - \theta_1) \sin \theta_1]}{\sin \theta (\sin \theta - \sin \theta_1)}$$

$$S_2 = \frac{-\gamma \cdot s \cdot \cos \theta \cdot R(\sin \theta - \sin \theta_1)}{\sin \theta} + \frac{\gamma \cdot s \cdot R}{\sin^2 \theta} [\cos \theta_1 - \cos \theta - (\theta - \theta_1) \sin \theta_1]$$

tomando el punto A (cuspide) sera  $\theta = \theta_1$  nos quedara para el esfuerzo  $S_1$

$S_1^A = \frac{0}{0}$  = indeterminación, para calcularlo aplicamos la regla de

L'Hospital.

para  $\theta$  tendiendo a  $\theta_1$ ;  $S_2^A = 0$

Si conocemos  $S_2$  y aplicando la expresión general podemos calcular  $S_1$ :

$$\frac{S_2}{R_2} + \frac{S_1}{R_1} = Z \quad ; \quad Z = -\gamma \cdot s \cdot \cos \theta_1 \quad \therefore \quad R_1 = R$$

$$\frac{S_1}{R_1} = Z \quad \therefore \quad \boxed{S_1 = Z \cdot R_1 = -\gamma \cdot s \cdot R \cdot \cos \theta_1}$$

para el punto B sera:  $\theta = 90^\circ$

$$S_1^B = \frac{-\gamma \cdot s \cdot R [\cos \theta_1 - (\frac{\pi}{2} - \theta_1) \text{sen } \theta_1]}{1 - \text{sen } \theta_1}$$

$$S_2^B = \gamma \cdot s \cdot R [\cos \theta_1 - (\frac{\pi}{2} - \theta_1) \text{sen } \theta_1]$$

**ACLARACION:** para la resolución de dicha indeterminación se aplica la regla de L'Hopital y se llega a determinar el límite de esa expresión o sea derivando numerador y denominador de  $S_1$  (expresión general) para  $\theta \rightarrow \theta_1$ , porque si aplicamos la expresión general para la determinación de  $S_2$  vemos que  $R_2 = 0$  luego tenemos aquí un indeterminado como en el caso de  $S_1$  para  $\theta \rightarrow \theta_1 \Rightarrow S_2 = 0$

$$\frac{S_1}{R_1} = \frac{S_2}{R_2} = Z \quad ; \quad \frac{S_1}{R_1} + \frac{0}{0} = Z \quad (\text{tipo de indeterminación superior al } S_1)$$

$S_1$ )

Aplicando la regla de L'Hopital y partiendo de la expresión (1) tenemos:

$$S_1 = \frac{-\gamma \cdot s \cdot R [\cos \theta_1 - \cos \theta - (\theta - \theta_1) \text{sen } \theta_1]}{\text{sen } \theta (\text{sen } \theta - \text{sen } \theta_1)}$$

derivando numerador y denominador con respecto a  $\theta$  tenemos:

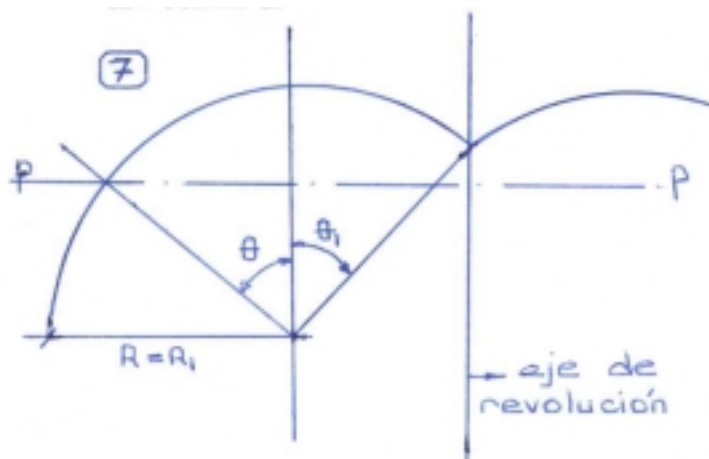
$$S_1' = \frac{-\gamma \cdot s \cdot R [0 + \text{sen } \theta - \text{sen } \theta_1]}{2 \text{sen } \theta \cos \theta - \cos \theta \text{sen } \theta_1}$$

Aplicando la regla tenemos:

$$\begin{aligned} S_1^A &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} S_1' = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} \frac{-\gamma \cdot s \cdot R [\text{sen } \theta - \text{sen } \theta_1]}{2 \text{sen } \theta \cos \theta - \cos \theta \text{sen } \theta_1} \\ &= \frac{-\gamma \cdot s \cdot R [\text{sen } \theta_1 - \text{sen } \theta_1]}{\text{sen } \theta_1 \cos \theta_1} = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_1^A = 0}$$

otro caso en cual la cúspide es hacia abajo (figura 7)



En la parte central nunca podría existir equilibrio con la hipótesis membranar.  
Si estudiáramos el equilibrio solamente de la parte central de la membrana (figura 8).

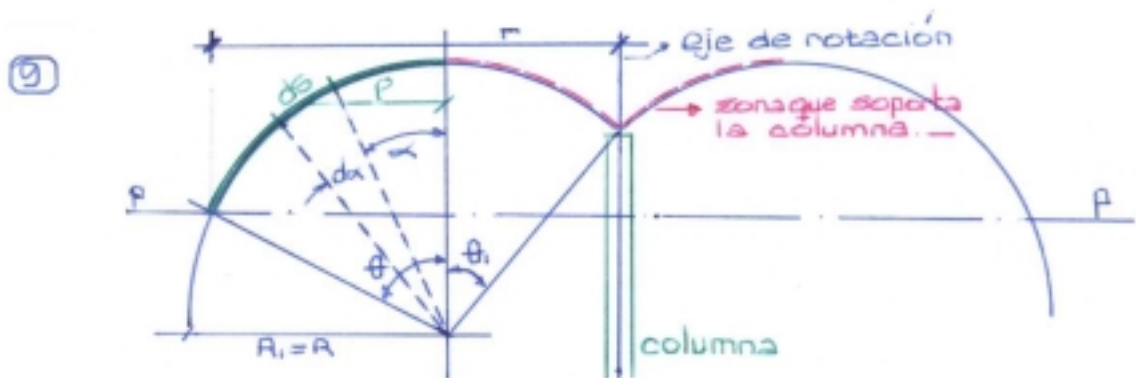


Los esfuerzos para que se realicen dentro de la teoría membranar tienen que ser por ejemplo  $S_1$  en (A) tangencial a la membrana.

Debiendo resultar para este caso particular horizontal y como está actuando una carga, necesariamente en ese punto se presenta un corte, y si se presenta un corte, está relacionado también con un momento flector, luego no tendríamos nunca la hipótesis de la teoría membranar.

Se puede evitar este inconveniente colocando en el centro un pilar (columna) (Figura 9).

Si colocamos una columna la porción central (fig.9) de cáscara estaría soportada para este caso particular por la columna.



por lo tanto la otra parte de la membrana la soporta otro apoyo (izquierda o derecha de la parte central).

De no ser así en la cumbre de la cáscara, se producen corte y momento flector.

El esfuerzo  $S_1$  será:

$$S_1 = \frac{-Q}{2\pi r \sin \theta}$$

Si tomamos un pequeño elemento de la cáscara de longitud  $ds$  tenemos. Calculando la carga  $dQ$  por el teorema de Guldin.

$$dQ = 2\pi(p + R \text{sen } \theta_1) \gamma \cdot s \cdot ds = 2\pi \cdot \gamma \cdot s \cdot R(\text{sen } \alpha + \text{sen } \theta_1) R \cdot d\alpha$$

integrando la expresion dada nos queda Q

$$Q = 2\pi R^2 \gamma \cdot s \cdot \int_0^\theta (\text{sen } \alpha + \text{sen } \theta_1) d\alpha$$

tenemos que:  $r = R(\text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta)$

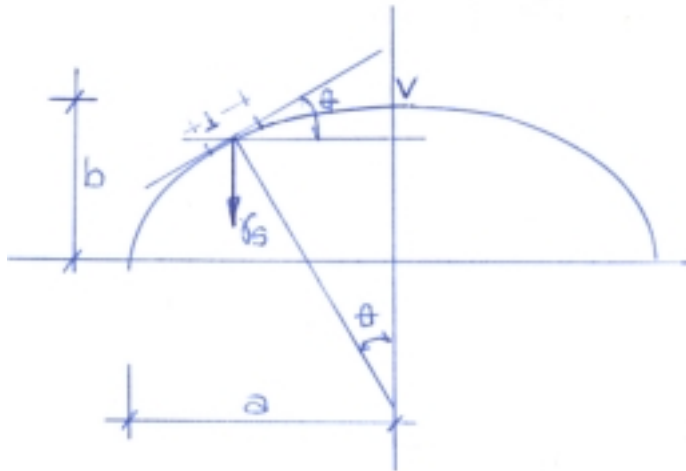
luego:

$$S_1 = \frac{-\gamma \cdot R \cdot s(1 - \cos \theta + \theta \text{sen } \theta_1)}{(\text{sen } \theta + \text{sen } \theta_1) \text{sen } \theta}$$

para el calculo de  $S_2$  tenemos:

$$S_2 = -\frac{\gamma R s}{\text{sen}^2 \theta} [(\text{sen } \theta + \text{sen } \theta_1) \text{sen } \theta \cos \theta - \theta \text{sen } \theta_1 + \cos \theta - 1]$$

**CASO DE TENER UN MERIDIANO** que tiene la forma de una **SEMIELIPSE** sometida a peso propio (Figura 10).



Determinaremos solamente los esfuerzos en ciertos puntos característicos de la elipse, como ser por ejemplo el punto V y el punto E.

Una de las simplificaciones importantes que hay para el punto V es: si aislamos un elemento en la cúspide como se hizo con la esfera, acá también existe simetría, luego al aislar el elemento en la parte central los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  son iguales y se puede aplicar entonces la expresion de:

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = Z$$

El radio de curvatura:  $R_1 = R_2 = \frac{a^2}{b}$  para el punto dado

$$\text{luego: } 2S_1 = 2S_2 = Z \frac{a^2}{b}$$

Tomando una unidad de superficie nos dá como peso. ( $\gamma s$ ), que proyectado sobre la normal a la cáscara en el punto considerado nos da Z.

$$\text{Luego: } Z = -\gamma s \cos\theta$$

y como en el punto considerado  $\theta = 0$  y  $\cos\theta = 1$  por lo tanto:  $Z = -\gamma s$

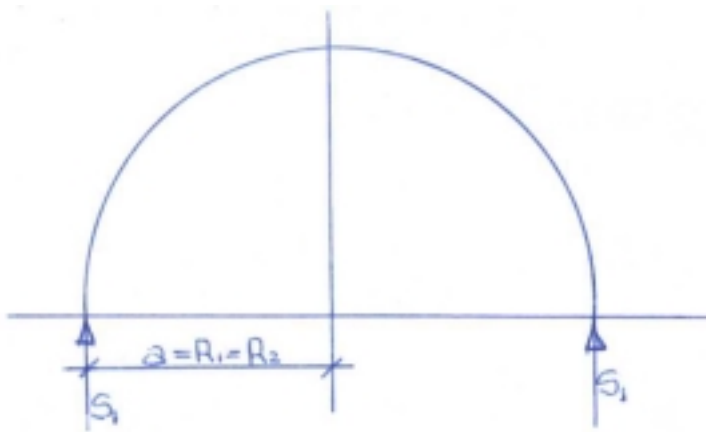
Reemplazando:

$$2S_1 = 2S_2 = Z \frac{a^2}{b} = -\gamma s \frac{a^2}{b}$$

esfuerzo que se realiza en la cuspide

$$S_1 = S_2 = -\frac{\gamma s a^2}{2b}$$

Estos esfuerzos se suelen relacionar con el de la esfera de radio a. Si tomamos una semiesfera de radio a.



El esfuerzo en la parte superior será teniendo en cuenta que:  $R_1 = R_2 = a$

$$\text{se obtiene: } S_1 = S_2 = -\gamma s \frac{a}{2}$$

Luego si relacionamos los diámetros de la elipse  $\frac{a}{b} = K$  o sea que el esfuerzo  $S_1$  que se tiene en una semielipse es:

$$S^{(elipse)} = K \cdot S_1^{(semiesfera)}$$

o sea que el esfuerzo  $S_1$  para la elipse es igual al esfuerzo  $S_1$  que se tiene para la semiesfera multiplicado directamente por la relación de los diámetros (K).

para el punto B tenemos  $\theta = 90^\circ$

Podemos calcular con la formula general los esfuerzos:

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = Z = 0$$

Los radios de curvatura para el punto E son:

$$R_2 = a \quad R_1 = \frac{b^2}{a} \quad \text{luego:}$$

$$S_1 = \frac{-\gamma s A^{(e)}}{2\pi a}$$

$A^{(e)}$  = area de media elipse.

Tambien se suele colocar en relacion con la esfera por ser más comoda su determinación. Luego si a la relación entre el área de una semielipse y el área de una esfera la llamamos  $\mu$  tenemos :

$$\frac{A^{(e)}}{A^{(s)}} = \mu \quad \therefore \quad A^{(e)} = \mu A^{(s)} = \mu 2\pi a^2$$

$$S_1^{(s)} = \frac{-\gamma s 2\pi a^2}{2\pi a^2} = -\gamma s a \quad (\text{esfuerzo para la esfera})$$

$$S_1^{(e)} = \frac{-\gamma s \mu 2\pi a^2}{2\pi a^2} = -\mu \gamma s a$$

$$\boxed{S_1^{(e)} E = S_1^{(s)} E \cdot \mu}$$

El esfuerzo  $S_1$  de la elipse para el punto E vale igual al esfuerzo  $S_1$  para la esfera para el mismo punto E multiplicado por la relacion  $\mu$  (relacion de areas).

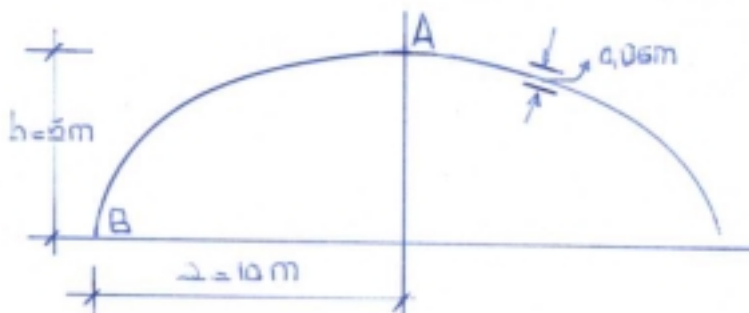
$$S_2 = -S_1 \frac{R_2}{R_1} = -\mu S_1^{(s)} K^2$$

$S_1^{(s)}$  = Esfuerzo  $S_1$  que corresponde a la esfera.

Los valores de  $\mu$  y K se pueden tabular y en forma rápida se pueden determinar los valores de los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  para cualquier punto de la semielipse.

### EJEMPLO DE BOVEDA ELIPTICA

Supongamos una boveda eliptica como la de la figura. Determinaremos los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  en los puntos A y B.



**Punto A:** para este caso particular tenemos que:

$$S_1^A = S_2^A = \frac{-\gamma s}{2} (K) \quad \text{luego la relacion} \quad K = -\frac{a}{b} = 2$$

Reemplazando valores tenemos: ( $\gamma = 2400 \text{ kg/m}^3$ )

$$S_1^A = S_2^A = -2400 \times 0.05 \times 10 \times \frac{2}{2} = -1200 \text{ kg/m}$$

La tension correspondiente para el caso dado será:

$$\sigma_1^A = \sigma_2^A = \frac{-1200}{100 \times 5} = -2.4 \text{ kg/cm}^2$$

Se divide por 100 para reducir unidades de Kg/m a Kg/cm.

**Punto B:**  $S_1^B = -\mu \cdot \gamma \cdot s \cdot a$

En donde  $\mu$  es un coeficiente que relaciona las areas de semielipse y semiesfera.

$$\mu = \frac{A^e}{A^{esf}}$$

Coeficiente que se encuentra tabulado en función de  $\frac{b}{a}$  (relacion de semidiametros)  $\frac{1}{2}$ .

$\frac{b}{a}$	0.25	0.5	0.75	1
$\mu$	0.566	0.69	0.838	1

Para el punto B tenemos que  $\frac{b}{a} = 0.5$ , luego:

$$S_1^B = -0.69 \times 1200 \text{ kg/m} = -830 \text{ kg/m} \quad ; \quad \sigma_1^B = \frac{-830}{100 \times 5} = -1.65 \text{ kg/cm}^2$$

Con esto se ve que a medida que nos acercamos al ecuador, el esfuerzo  $S_1$  va disminuyendo aunque su carga aumenta debido al peso propio. Reduccion lógica por cuanto la superficie del paralelo va en aumento (aumento de radio) y el esfuerzo se reparte en una mayor superficie:

$$S_2^B = -S_1^B \times K^2 = 830 \times 4 = 3320 \text{ kg/m}$$

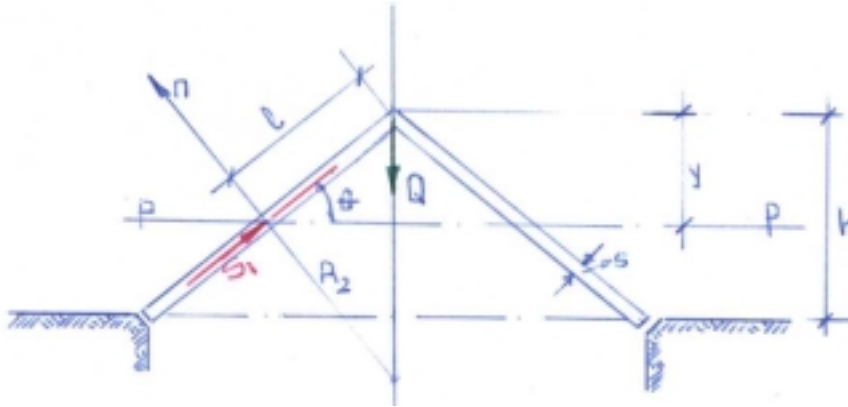
Esfuerzo de traccion que se absorbe con una armadura:

$$\sigma_2^B = \frac{3320}{500} = 6.6 \text{ kg/cm}^2$$

Que si suponemos que el elemento está realizado en hormigon esta tension puede ser absorvida practicamente sin armadura, aunque conviene colocar armadura minima.

## CUBIERTA CONICA

Por defecto de peso propio.



$S_1$  = Esfuerzo de compresión.

$Q$  = Carga de la parte superior al corte del plano (p-p).

Siendo:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta}$$

$$Q = r s \gamma \pi l$$

$$S_1 = \frac{-\gamma s \pi r l}{2\pi r \sin \theta}$$

$$S_1 = \frac{-\gamma s y}{2 \sin^2 \theta}$$

Como  $\theta$  es constante para cualquier punto se observa que el valor máximo de  $S_1$  será para  $y = h$ , o sea en el borde inferior.

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = Z \quad \text{como } R_1 = \infty$$

luego:  $S_2 = Z \cdot R_2 = Z \frac{r}{\sin \theta}$

El valor de  $Z$  en este caso tendrá valor negativo y vale:

$$Z = -\gamma s \cos \theta \quad r = y \cot g \theta$$

$$S_2 = -\frac{\gamma r \cos \theta}{\sin \theta} = -\gamma s y \cot g \theta$$

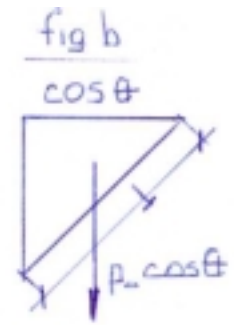
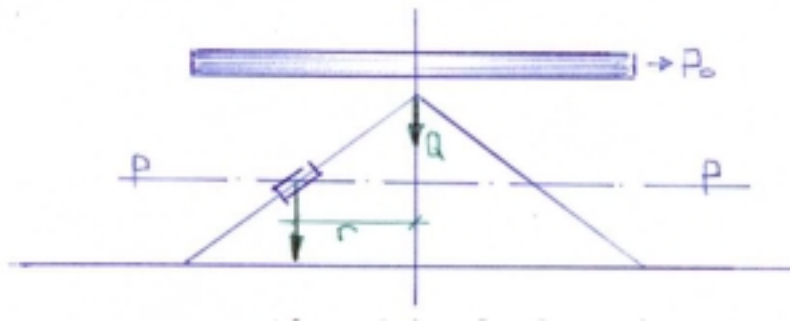
$$\boxed{S_2 = -\gamma s y \cot g^2 \theta}$$

Se observa también acá que el valor máximo de  $S_2$  se obtiene para  $y=h$  (valor de compresión).

## CUBIERTA CONICA

**Teniendo en cuenta el efecto de una carga uniforme en sentido horizontal.**





La carga Q que actua sobre el plano (p-p) vale para este caso particular:

$$Q = \pi \cdot r^2 \cdot p_0 \quad \text{area en sentido horizontal}$$

$$\text{luego: } S_1 = \frac{-Q}{2\pi \cdot r \cdot \text{sen } \theta} = \frac{-\pi \cdot r^2 \cdot p_0}{2\pi \cdot r \cdot \text{sen } \theta} = -p_0 \frac{r}{2 \text{sen } \theta}$$

$$\text{Colocando r en funcion de (y): } S_1 = -p_0 \frac{y \cot \theta}{2 \text{sen } \theta}$$

Observamos que el esfuerzo maximo se obtiene en la parte inferior.

$$S_2 = Z \cdot R_2$$

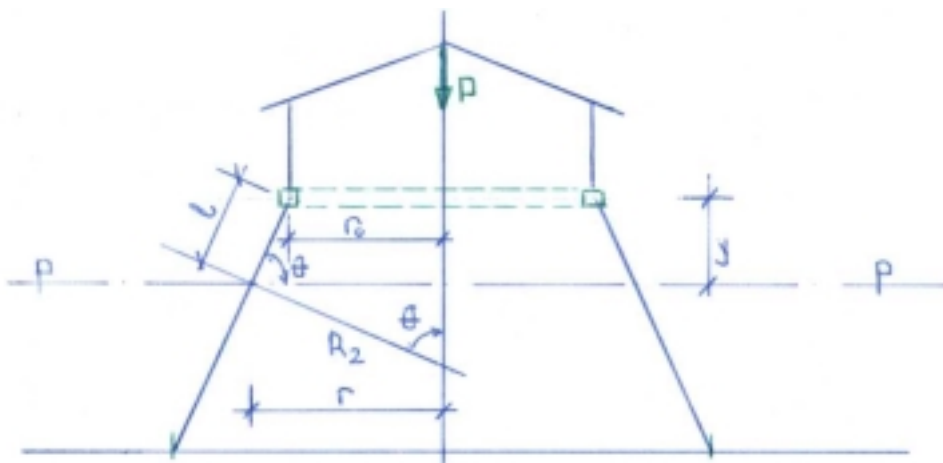
**En donde Z es como sabemos, la carga que tenemos por unidad de la superficie de la cáscara. Tomando una unidad (1) en la cascara (fig b), tendremos que es  $(p_0 \cos \theta)$  que la proyectamos sobre la normal, nos queda:**

$$Z = -p_0 \cdot \cos^2 \theta \quad S_2 = Z \cdot R_2 = -p_0 \frac{\cos^2 \theta}{\text{sen } \theta} = -p_0 \frac{\cos^2 \theta}{\text{sen } \theta} \cdot y \cdot \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

$$S_2 = -p_0 \frac{\cos^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta} \cdot y$$

Con lo cual también observamos que el esfuerzo máximo se produce en parte inferior.

### CUPULA CONICA con LINTERNA



p; peso de la linterna.

Consideramos 1° por EFECTO DE PESO PROPIO; siendo  $s$  espesor de la cáscara cónica.

La carga  $Q$  vale: 
$$Q = P + \gamma \cdot s \left( \pi(r + r_0) \frac{r - r_0}{\cos \theta} \right)$$

Luego el esfuerzo  $S_1$  vale:

$$S_1 = -\frac{P}{2\pi \cdot r \cdot \sin \theta} - \frac{\gamma \cdot s \cdot \pi(r^2 - r_0^2)}{2\pi \cdot r \cdot \sin 2\theta}$$

$$S_1 = -\frac{P}{2\pi \cdot \sin \theta} - \frac{\gamma \cdot s \cdot \pi(r^2 - r_0)}{r \cdot \sin 2\theta}$$

$$S_2 = ZR_2 = -\gamma \cdot s \cdot \cos \theta \cdot \frac{r}{\sin \theta}$$

En el pie de la linterna se requiere un anillo; en ese punto habrá un  $S_1$  de compresion mientras que en la parte inferior es necesario colocar un anillo que para este caso será un anillo de tracción.

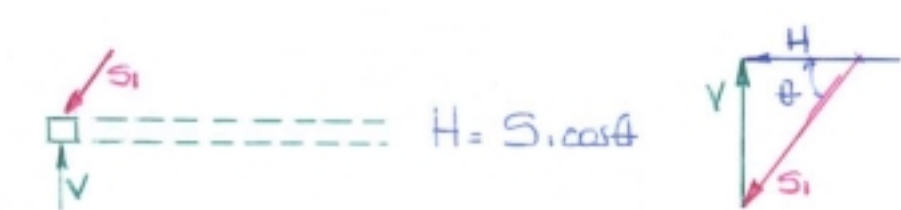
O sea que el anillo superior trabaja a compresión en el que tenemos actuando la carga vertical  $V$  de la linterna que se transmite a todo el contorno del anillo y  $S_1$  que si actúa como compresion en la cáscara, en el anillo será de sentido contrario luego está dá una resultante  $H_1$  radial.

Por lo tanto componiendo  $S_1$  con  $V$  nos dá  $H_1$  radial.



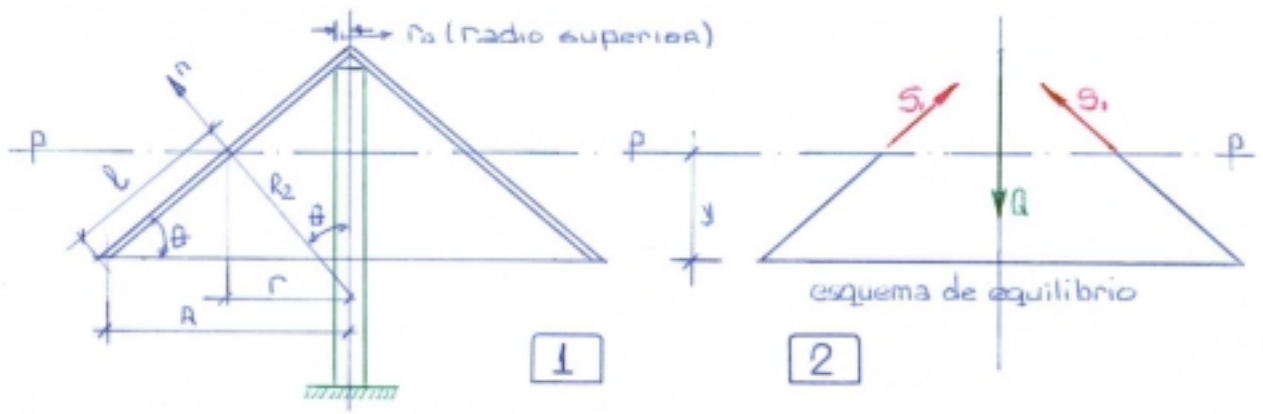
En la parte inferior ocurre lo contrario.

Sobre el anillo tenemos la reaccion  $V$  y la fuerza de compresion de la cáscara, luego la resultante de la  $S_1$  y  $V$  nos origina una fuerza  $H$  que produce traccion en el anillo.



Para el caso de considerar una carga por ejemplo de nieve, las consideraciones que se hacen son similares a las ya vistas.

### SOMBRILLA CONICA CON UN PILAR EN EL CENTRO



Para efectuar la determinación de los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  se procede en la forma general ya vista anteriormente.

Haciendo un corte con un plano (p-p), pero ahora debemos considerar el equilibrio de la parte inferior (figura 2).

Luego está en equilibrio con el peso de la parte inferior considerada  $Q$  y los esfuerzos  $S_1$  de tracción que equilibran el peso:

$$Q = \gamma \cdot s \cdot \pi(R+r)l = \gamma \cdot s \cdot \pi(R+r) \frac{R-r}{\cos\theta}$$

$$S_1 = \frac{\gamma \cdot s(R^2 - r^2)}{2\pi \cdot r \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta} \quad (\text{positivo por ser un esfuerzo de traccion})$$

$$S_1 = \frac{\gamma \cdot s(R^2 - r^2)}{r \cdot \text{sen} 2\theta}$$

Observamos que el valor del esfuerzo  $S_1$  en el punto superior es:

como  $r = 0 \quad S_1 = \infty$ .

Luego el esfuerzo  $S_1$  se hace infinito en el punto superior, por lo tanto es preciso considerar un radio suficiente de tal manera que nos limite el valor de  $S_1$  a cifras compatibles con el espesor de la cáscara.

Para el valor de  $S_2$  tenemos:

$$S_2 = Z \cdot R_2 = -\gamma \cdot s \cdot \cos\theta \cdot R_2$$

para este caso particular  $Z$  es de valor negativo:

$$S_2 = -\gamma \cdot s \cdot \cos\theta \cdot \frac{r}{\text{sen}\theta}$$

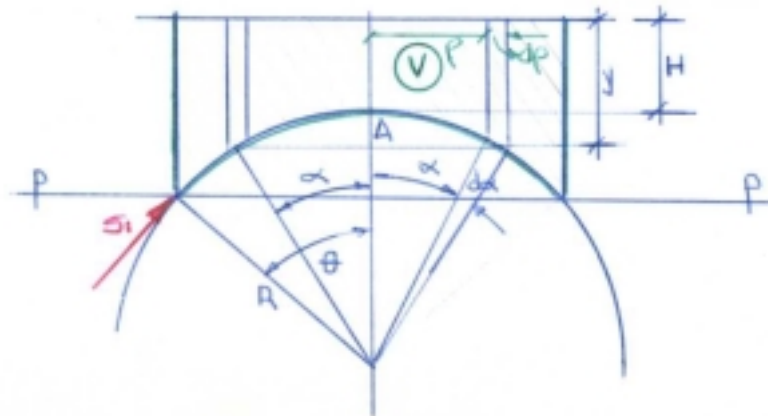
el esfuerzo maximo de compresion para este caso se produce en la parte inferior.

### FONDOS DE DEPOSITOS PARA LIQUIDOS (Fondos de tanques)

Los casos más comunes son para tanques elevados: esfericos, fondos conicos, tronco conico y como característica especial en los tanques Hintze tenemos fondos tronco cónico y esférico.



Caso de FONDO ESFERICO sometidos por ejemplo a una presion de liquido o sea de agua que hay dentro del tanque.



Haciendo un corte con un plano p-p y viendo cual es el volumen de agua que incide que nos dará la carga para calcular el esfuerzo  $S_1$ .

En nuestro caso sería el rayado en la figura.

$$S_1 = \frac{-\gamma \cdot V}{2\pi \cdot R \cdot \text{sen}^2 \theta}$$

Como se ve todo el calculo estriba en determinar el volumen de agua que incide sobre la parte de cascara considerada.

Si nosotros tomamos un pequeño cilindro hueco de radio  $\rho$  y espesor  $d\rho$ , un diferencial de ese volumen sera:

$$dV = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot y \qquad \rho = R \text{sen} \alpha \qquad d\rho = R \cos \alpha \cdot d\alpha$$

$$y = H + R(1 - \cos \alpha)$$

reemplazando:

$$dV = 2\pi \cdot R^2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha [H + R(1 - \cos \alpha)]$$

$$V = \int_0^\theta dV = 2\pi R^2 \left[ H \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} + R \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} + R \left[ \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right]_0^\theta \right]$$

$$V = \pi R^2 \left[ (H + R) \text{sen}^2 \theta + \frac{2}{3} R (\cos^3 \theta - 1) \right]$$

luego el esfuerzo  $S_1$  sera:

$$S_1 = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot R^2 \left[ (H + R) \cdot \text{sen}^2 \theta + \frac{2}{3} R (\cos^3 \theta - 1) \right]}{2\pi \cdot \text{sen}^2 \theta}$$

$$S_1 = -\frac{\gamma R}{2} \left[ (H + R) - \frac{2}{3} R \frac{(1 - \cos^3 \theta)}{(1 - \cos^2 \theta)} \right]$$

$$S_1 = -\frac{\gamma R}{2} \left[ (H + R) - \frac{2}{3} R \left[ 1 + \frac{(\cos^2 \theta)}{(1 + \cos \theta)} \right] \right]$$

$$S_1 = -\frac{\gamma R}{2} \left[ H + \frac{R}{3} - \frac{2}{3} \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} R \right]$$

El esfuerzo  $S_2$  sera teniendo en cuenta que  $R_1 = R_2 = R$

$$S_2 = -S_1 + ZR$$

$$S_2 = \frac{\gamma R}{2} \left[ H + \frac{R}{3} - \frac{2}{3} R \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} \right] - \gamma R [H + R - R \cos \theta]$$

$$S_2 = -\frac{\gamma R}{2} \left[ H + \frac{5}{3} R - R \left( \cos \theta - \frac{2}{3} \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} \right) \right]$$

$$S_2 = -\frac{\gamma R}{2} \left[ H + \frac{5}{3} R \cdot \cos \theta \frac{3 + 2 \cos \theta}{3(1 + \cos \theta)} \right]$$

Por ejemplo para el punto A  $\theta = 0$   $\cos \theta = 1$

$$S_1^A = -\frac{\gamma R}{2} \left[ H + \frac{R}{3} - \frac{2}{3} R \frac{1}{2} \right]$$

$$S_1^A = -\gamma R \frac{H}{2}$$

$$S_2^A = -\frac{\gamma R}{2} \left[ H + \frac{5}{3} R - 2R \frac{5}{6} \right]$$

$$S_2^A = -\gamma R \frac{H}{2}$$

Cuando los valores de  $S_1$  y  $S_2$  son iguales, estos se pueden resolver de la siguiente manera:

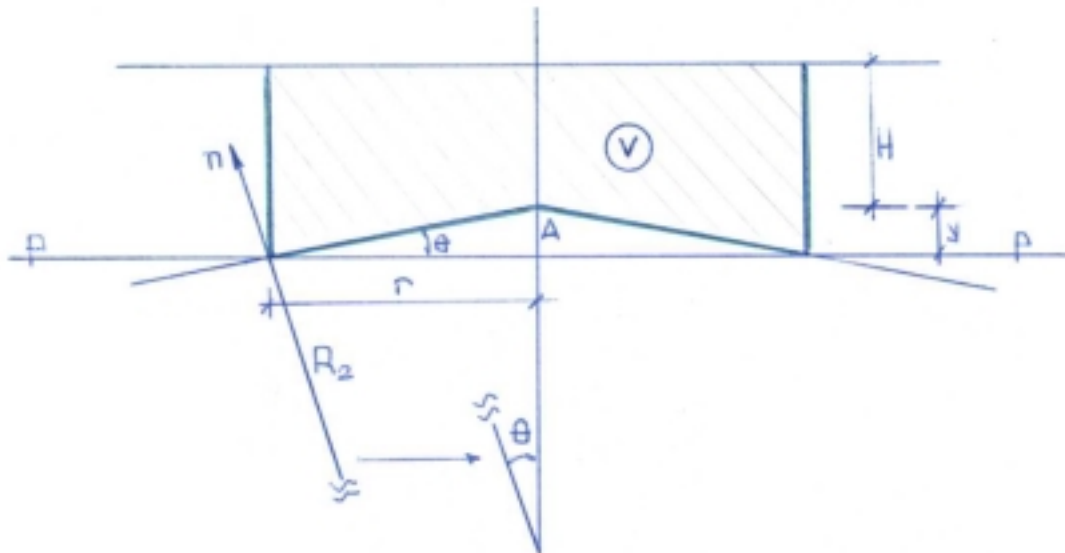
$$R_1 = R_2 = R$$

Recordando que:

$$S_1 + S_2 + ZR \quad : \quad 2S_1 = -\gamma HR \quad :$$

$$S_1 = -\gamma H \frac{R}{2} = S_2$$

FONDO CONICO



H = altura de agua que hay por encima del punto superior de la cáscara.

Haciendo un corte con un plano p-p a una distancia (y) del vértice tenemos que el volumen de líquido que se debe considerar se puede calcular de la siguiente forma (rayado).

**volumen V = volumen cilíndrico – volumen cono**

$$V = \pi r^2 (H + y) - \frac{1}{3} \pi r^2 y = \frac{\pi \cdot r^2}{3} (3H + 2y - y)$$

$$V = \frac{\pi r^2}{3} (3H + 2y)$$

luego:

$$S_1 = \frac{-\gamma \pi r^2 (3H + 2y)}{3 \times 2\pi r \sin\theta} = \frac{-\gamma y \cot g\theta}{6 \sin\theta} (3H + 2y)$$

$$S_1 = \frac{-\gamma y \cot g\theta}{6 \sin\theta} (3H + 2y)$$

Se observa que el esfuerzo máximo se obtiene en el borde inferior.

Para el punto A:  $S_1^A = 0$

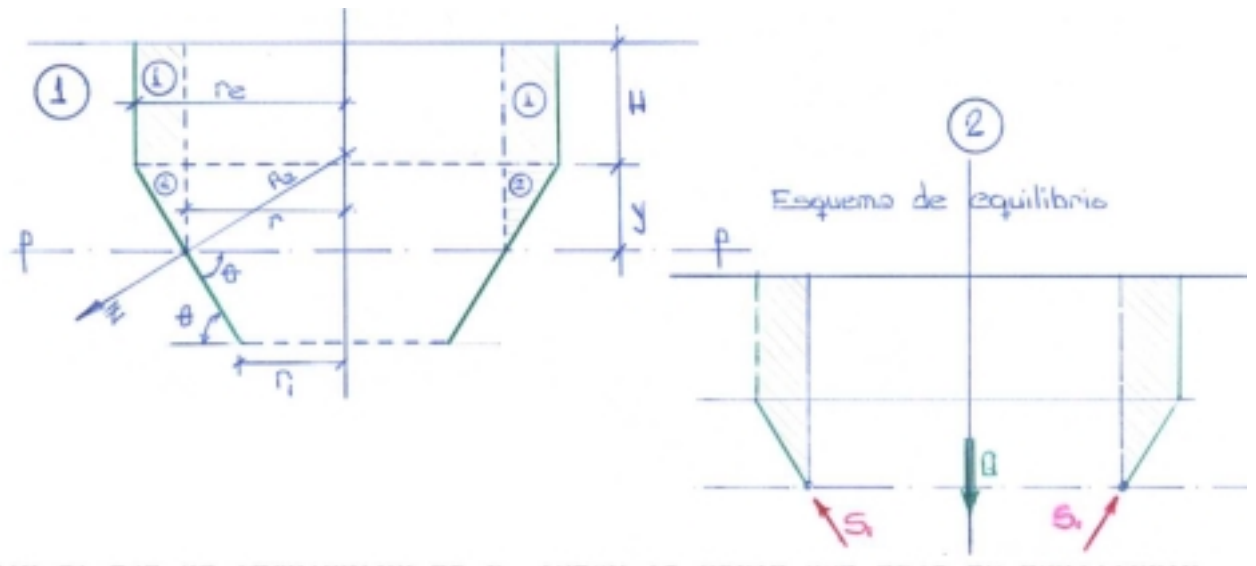
$$S_2 = ZR_2 = Z \frac{r}{\sin\theta} = -\frac{\gamma(H+y)}{\sin\theta} y \cot g\theta$$

$$S_2 = -\gamma(H+y)y \frac{\cot g\theta}{\sin\theta}$$

Vemos que para  $y=0$   $S_2^A=0$  y que el máximo esfuerzo lo vamos a obtener en la parte inferior.

### FONDO TRONCO CONICO – Considerando influencia de líquido

Supongamos que por encima del borde tronco cónico actúa un nivel H de agua.



Si hacemos un corte con un plano p-p (figura 1) cuyo radio con respecto al eje de revolución es r, luego la parte que está en equilibrio es la dada en la figura 2.

Son las tensiones o esfuerzos  $S_1$  que actúan en la sección determinada por el plano p-p que estarán en equilibrio con el peso o carga de agua, por encima del plano (zona rayada).

Los esfuerzos  $S_1$  son de compresión, luego el volumen que incide se puede calcular descomponiendo la zona rayada en dos volúmenes.

Un volumen que será  $V_1$  de fácil cálculo dado por un cilindro hueco y otro  $V_2$  de forma cónica (triángulo en rotación).

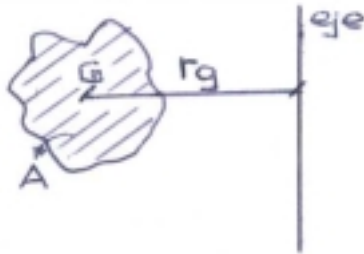
Luego:  $V = V_1 + V_2$

Llamando  $r_e$  radio superior del tronco de cono y  $r_i$  al inferior tenemos:

$$V_1 = \pi \cdot r_e^2 \cdot H - \pi \cdot r^2 \cdot H = \pi \cdot H (r_e^2 - r^2)$$

$V_2 =$  Lo calculamos aplicando el teorema de Guldin.

Si recordamos el teorema de Guldin que nos dice que el volumen originado por una superficie de rotación cualquiera dado por figura 3.



Siendo G centro de gravedad de la superficie A y  $r_g$  radio de rotación con respecto del eje al centro de gravedad tenemos que el volumen es:

$$V = A \cdot 2\pi \cdot r_g$$

Luego para nuestro caso particular el área que gira o sea  $A_2$  que vale:

$$A_2 = \frac{1}{2}(r_e - r)y$$

radio del centro de gravedad =  $\left[r + \frac{1}{3}(r_e - r)\right]$

por lo tanto:

$$V_2 = \frac{1}{2}(r_e - r)y \cdot 2\pi \left[r + \frac{1}{3}(r_e - r)\right]$$

Colocando y en función del ángulo de inclinación de la pared luego:

$$y = (r_e - r)\text{tg}\theta$$

$$V_2 = \frac{1}{2}(r_e - r)(r_e - r)\text{tg}\theta \cdot 2\pi \left[r + \frac{1}{3}(r_e - r)\right]$$

El volumen total será:

$$V_t = V_1 + V_2 = \pi \cdot H (r_e^2 - r^2) + (r_e - r)(r_e - r)\text{tg}\theta \cdot \pi \left(\frac{2r + r_e}{3}\right)$$

$$V_t = \pi (r_e - r) \left[ H (r_e - r) + (r_e - r)\text{tg}\theta \left(\frac{2r + r_e}{3}\right) \right]$$

Forma cómoda de expresar esta expresión es utilizando una relación que la llamamos K. O sea sacando factor común  $r$  la expresión anterior nos queda.

$$V = \pi \cdot r^3 \left(\frac{r_e}{r} - 1\right) \left[ \frac{H}{r} \left(\frac{r_e}{r} + 1\right) + \left(\frac{r_e}{r} - 1\right)\text{tg}\theta \left(\frac{2 + \frac{r_e}{r}}{3}\right) \right]$$

Como vemos K está en función de los datos del problema o sea en función de  $\theta$ , en función de la posición del paralelo que estamos considerando:  $\frac{r_e}{r}$

$$K = f(\theta)$$

luego el volumen es:

$$V = K \cdot \pi \cdot r^3$$

El esfuerzo  $S_1$  será, como es un esfuerzo de compresión será negativo:

$$S_1 = \frac{-\gamma K \pi r^3}{2\pi r \text{sen}\theta} = \frac{-\gamma K r^2}{2 \text{sen}\theta}$$

$$S_1 = \frac{-\gamma K r^2}{2 \sin \theta} \quad (1)$$

para el esfuerzo  $S_2$  tenemos que el  $Z$  que se tiene es: trazando la normal a la cáscara en el punto considerado, siendo  $Z$  la presión en ese punto que es directamente el valor de la presión normal por cuanto esta es normal a cualquier punto de la cáscara y vale:

$$Z = p = \gamma(H + y) = \gamma[H + (re + r) \operatorname{tg} \theta]$$

$$Z = \gamma \cdot r \left[ \frac{H}{r} + \left( \frac{re}{r} - 1 \right) \operatorname{tg} \theta \right]$$

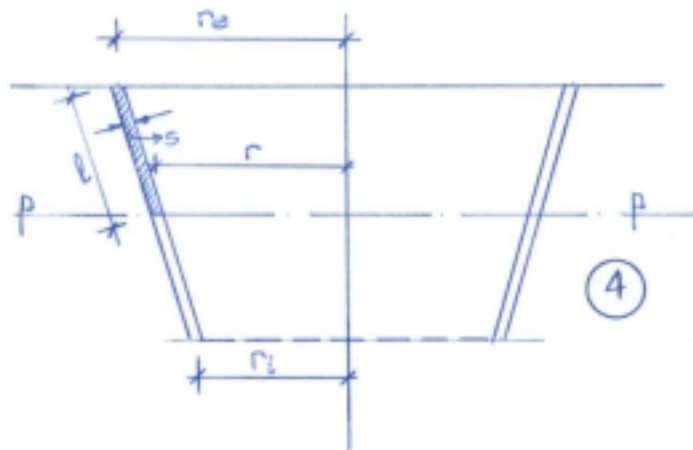
$$Z = \gamma \cdot r \cdot \lambda$$

luego como  $R_1 = \infty$  (radio de curvatura del meridiano) será:

$$S_2 = Z R_2 = Z \frac{r}{\sin \theta} = \gamma \frac{\lambda r^2}{\sin \theta}$$

$$S_2 = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot r^2}{\sin \theta} \quad (2)$$

Consideramos ahora la *influencia del peso propio*.



$s$  = espesor de la casacara

Como en los casos anteriores cortamos con un plano p-p la casacara que tiene un espesor  $s$  para poder considerar el peso propio (siendo  $\gamma_m$  = peso específico del material).

Al cortar con el plano p-p carga el peso de esa area rayada lateral de tronco de cono de generatriz I luego:

La fuerza Q vale:



$$Q = \gamma m \cdot s \cdot \pi (re + r) l$$

$$Q = \gamma m \cdot s \cdot \pi (re + r) \frac{re - r}{\cos \theta} \quad l = \frac{(re - r)}{\cos \theta}$$

$$Q = \frac{\gamma m \cdot s \cdot \pi \cdot r^2}{\cos \theta} \left[ \left( \frac{re}{r} \right)^2 - 1 \right]$$

$$Q = \frac{\gamma m \cdot s \cdot \pi \cdot r^2}{\cos \theta} c$$

El esfuerzo  $S_1$  vale:

$$S_1 = \frac{-\gamma m \cdot s \cdot \pi \cdot r^2 \cdot c}{2\pi \cdot r \cdot \sin \theta \cos \theta} \quad \therefore \quad \boxed{S_1 = \frac{-\gamma m \cdot s \cdot r \cdot c}{\sin 2\theta}} \quad (3)$$

para el esfuerzo  $S_2$  tenemos:

La componente del peso que actúa hacia abajo (positiva) será:

$\gamma_s$ ; luego proyectando en la dirección a la normal a la cáscara tendremos z.

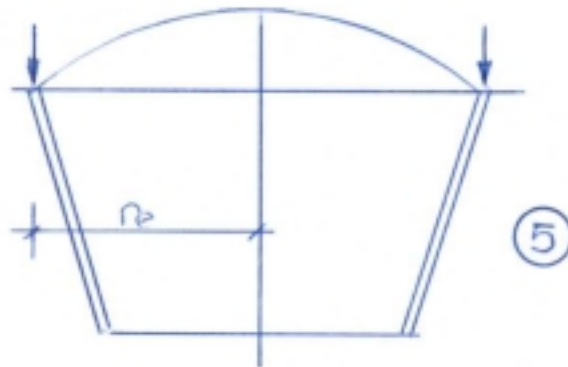
$$Z = \gamma m \cdot s \cdot \cos \theta$$

$$\text{luego: } S_2 = ZR_2 = \gamma m \cdot s \cdot \cos \theta \frac{r}{\sin \theta}$$

$$\boxed{S_2 = \gamma m \cdot r \cdot s \cdot \cot \theta} \quad (4)$$

Como vemos el esfuerzo  $S_2$  es función de r debido a que  $\theta$  es constante para cualquier punto, luego  $S_2$  será máximo en el borde superior del tronco de cono.

Otra carga que se debe considerar es por ejemplo para tanques: Si tenemos una tapa que puede ser una cúpula esférica.



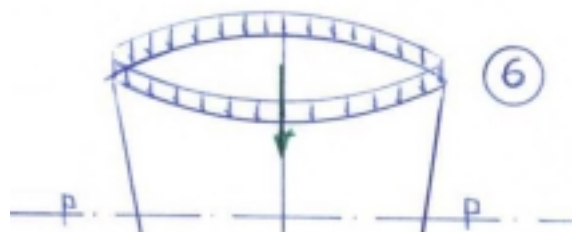
Tenemos que la tapa transmite una carga vertical como lo indica la figura 5.

Es decir que en el borde superior hay la acción de una carga vertical distribuida a lo largo de toda la circunferencia de radio  $r_e$  y si a la carga que se transmite la llamamos  $q$  por unidad de longitud de la circunferencia es decir una carga continua.

O sea consideramos el efecto de una carga continua (figura 6).

La carga  $Q$  total vale:

$$Q = q \cdot 2\pi \cdot r_e$$



El esfuerzo  $S_1$  valdrá:

$$S_1 = \frac{-q \cdot 2\pi \cdot re}{2\pi \cdot r \cdot \text{sen}\theta} = \frac{-q \cdot re}{r \text{sen}\theta}$$

$$\boxed{S_1 = -\frac{q}{\text{sen}\theta} \cdot \frac{re}{r}} \quad (5)$$

para este caso el esfuerzo  $S_1$  es inversamente proporcional al radio  $r$ , luego el esfuerzo aumenta a medida que vamos hacia la parte inferior del tanque (tronco de cono) para el esfuerzo  $S_2$  en este caso particular como  $Z=0$  por cuanto el único efecto que estamos considerando es la carga en el borde superior, de manera que sobre la cáscara no está actuando carga luego:

$$S_2 = 0 \quad \boxed{S_2 = ZR_2 = 0}$$

### VIGA BALCON

Vamos a considerar el caso más general que puede ser, por ejemplo, rectangular, de luces distintas, por cuanto si las luces son iguales es caso particular.



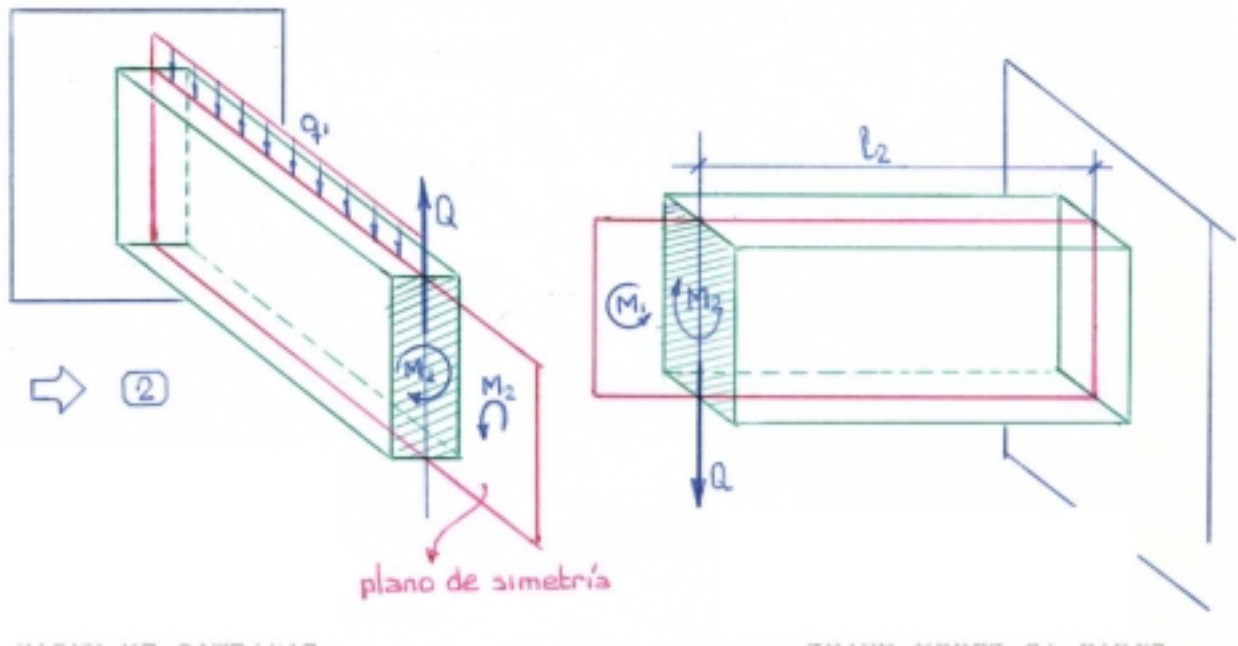
$$l_1 \neq l_2$$

$q_1 \neq q_2$  cargas distintas como caso mas general o sea sobre la luz  $l_1$  actua una carga continua  $q_1$  y sobre  $l_2$  actua  $q_2$ .

Generalmente son cargas continuas (por ejemplo una pared, una losa cruzada etc.).

Luego hay que ver cuales son los esfuerzos que hay en el encuentro de las vigas (punto A).

Los esfuerzos que aparecen son momentos torsores, momentos flectores, esfuerzos de corte según lo indicamos en la figura 2.



$M_1$ : momento de torsion que actua sobre la seccion rayada.

$M_2$ : momento de flexion que actua sobre el plano de simetria.

$Q$ : esfuerzo de corte.

$M_1$ : momento de flexion que actua sobre el plano de simetria.

$M_2$ : momento torsor que actua sobre el plano rayado.

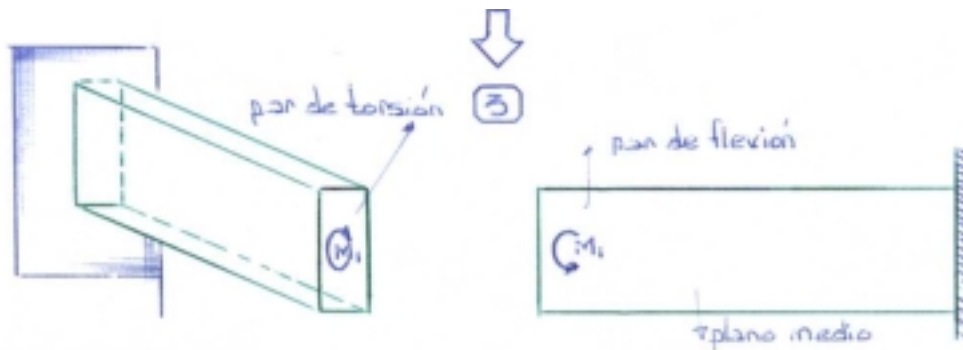
$Q$ : esfuerzo de corte igual y contrario al otro que actua en la cara de  $l_2$ .

La viga de longitud  $l_2$  tiende a flexionar debido a la carga, luego la sección extrema tiende a girar o sea a tener una rotación por flexión, luego esta rotación por flexión se comunica a la otra viga obligándola a girar y le comunica un par de torsión  $M_1$ , (lo consideramos como positivo para deducir las expresiones) que actúa en el plano de la sección.

O sea que si en la viga N°1 actúa como par de torsión y de sentido positivo según muestra convención en la otra viga o sea la N°2 actúa en el plano de simetría como par de flexión y de sentido contrario al de torsión (sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj).

Luego igualmente ocurre con la otra viga si una de ellas o sea la  $V_1$  tiende a girar y produce en  $V_2$  un par de torsión que lo llamamos  $M_2$ ; entonces ese par de torsión actúa como par de flexión en  $V_1$  con sentido contrario al de torsión.

Otra forma de indicar esquemáticamente los efectos de momento puede ser la de la figura 3.



Para el otro caso o sea el de  $M_2$  es a la inversa al dado en la figura 3.

También tendremos un esfuerzo de corte  $Q$  en cada una de las dos secciones. Que si en la viga  $V_1$  lo consideramos positivo o sea dirigido hacia arriba en la otra, viga  $V_2$  tiene que estar dirigido hacia abajo, por el principio de acción y reacción (los esfuerzos normales se desprecian por cuanto no hay cargas inclinadas).

Tenemos entonces tres (3) incógnitas. El par  $M_1$ , el par  $M_2$  y el esfuerzo de corte  $Q$ .

Es un hiperestático de tercer grado para resolverlo debemos plantear tres (3) ecuaciones.

Las ecuaciones que se pueden plantear son:

1. Ecuación: la ecuación de FLECHA EN EL EXTREMO.

**Se calcula la flecha con los esfuerzos dados y la carga que actúa.**

La flecha en el extremo de la viga 1 será igual a la flecha en el extremo la viga 2.

O sea:  $f_1 = f_2$  1° ecuación.

tenemos:

La flecha que origina la carga  $q_1$ , sabiendo que tenemos un extremo empotrado (con una carga continua) vale:

$$f = \frac{q_1 \cdot l_1^4}{8 \cdot EJ}$$

para simplificar se suele colocar el  $EJ = \beta$  llamándolo rigidez de flexión: luego será la flecha debida a la carga continua  $q_1$ :

$$f_1^{q_1} = \frac{q_1 \cdot l_1^4}{8 \cdot \beta}$$

La otra carga que tenemos es un par que para éste caso particular es el  $M_2$ ; o sea por flexión actúa el par  $M_2$  que origina una flecha de sentido negativo que será:

$$f_1^{M_1} = \frac{-M_2 \cdot l_1^2}{2\beta}$$

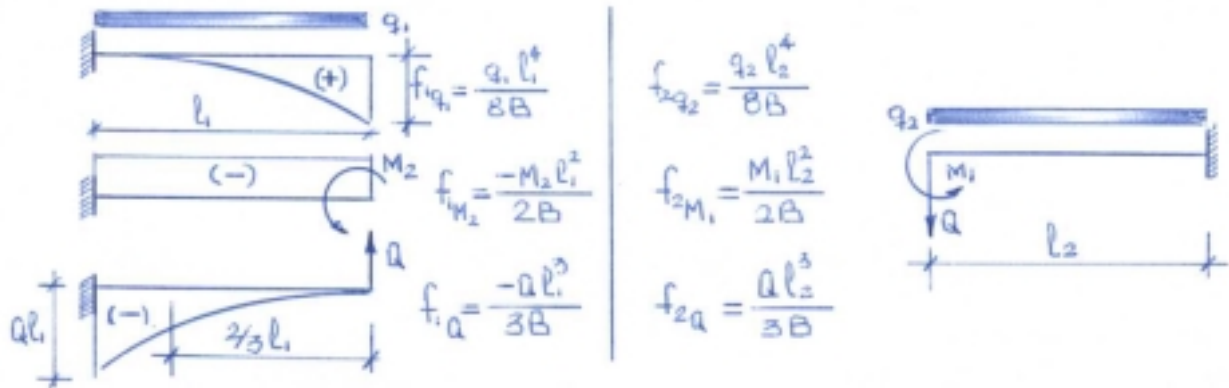
Demostración por los teoremas de MOHR.

Y también tenemos el esfuerzo de corte  $Q$  en el extremo que está dirigido hacia arriba en este caso, y luego origina una flecha negativa que vale:

$$f_1^Q = \frac{-Q \cdot l_1^3}{3\beta}$$

Suponemos para facilitar la resolución del problema que las dos secciones son iguales que es lo más normal.

Luego  $\beta$  es idéntico para las dos vigas.



para la otra viga en la cual tenemos una carga  $q_2$  tendremos un par  $M_1$  negativo, una fuerza  $Q$  dirigida hacia abajo, las respectivas flechas son las indicadas arriba en el diagrama de la derecha.

Entonces la primera ecuación será: simplificado el valor de  $\beta$

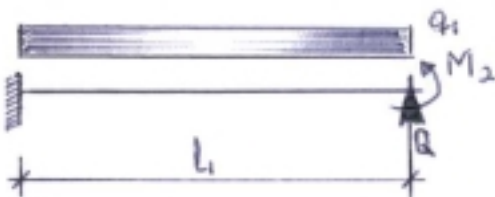
$$1^\circ) \frac{q_1 \cdot l_1^4}{8} - \frac{M_2 \cdot l_1^2}{2} - \frac{Q \cdot l_1^3}{3} = \frac{q_2 \cdot l_2^4}{8} + \frac{M_2 \cdot l_2^2}{2} + \frac{Q \cdot l_2^3}{3}$$

La segunda ecuación que se plantea es la ecuación de que la rotación por flexión que se produce en el extremo de la viga  $V_1$  tiene que ser igual a la rotación por torsión que actúa en la sección de la viga  $V_2$ .

Luego la rotación por flexión de la 1ª viga en el extremo tiene que ser igual a la rotación por torsión en el extremo de la otra viga.

Luego es necesario calcular la rotación por flexión para las cargas que tenemos:

En viga  $V_1$  por flexión y en viga  $V_2$  por torsión tendremos: la carga  $q_1$ , la fuerza  $Q$  hacia arriba y el par  $M_2$  negativo.



La rotación debida a la carga continua vale:

$$\theta_{ql} = \frac{q_1 \cdot l_1^3}{6 \cdot \beta}$$

Consideramos las rotaciones positivas en el sentido de las agujas del reloj.

La rotación provocada por el par  $M_2$  (es una rotación negativa).

Luego será:

$$\theta_{M_2} = \frac{-M_2 \cdot l_1}{\beta}$$



$Q$  origina también una rotación negativa y vale:

$$\theta_Q = \frac{-Q \cdot l_1^2}{2\beta}$$

Esto tiene que ser igual a la rotación por torsión debida al par  $M_2$  en la viga  $V_2$ .

Calcular la rotación por torsión en una viga de sección rectangular crea un problema muy complejo.

Un criterio que se fija para el cálculo de la rotación es directamente dividiendo el área del diagrama de momento de torsión, (que es constante a lo largo de la viga) sobre un valor a que se llama rigidez de torsión.

$$\theta_{M_2} = \frac{M_2 \cdot l_2}{c} \quad \text{donde } c = \frac{G \cdot J_p}{f} \quad (\text{rigidez a torsion})$$

G: módulo de elasticidad transversal.

$J_p$ : Momento polar de inercia.

f: Factor de torsión que depende de la forma de la sección.

Para mayor comodidad se trabaja con una relación  $\gamma$  que es la relación entre los dos módulos, el módulo de rigidez a flexión y el módulo de rigidez a torsión.

$$\gamma = \frac{\beta}{c} \quad \text{que vale: si uno introduce las expresiones que dan para el factor de torsion:}$$

torsion:

$$\gamma = 0.32 \left[ \left( \frac{d}{b} \right)^2 + 1 \right]$$

para sección rectangular en función de la relación alto sobre ancho ( $d/b$ ).

Por ejemplo si se tuviera una viga de 20x60 cm donde la relación

$$\frac{d}{b} = \frac{60}{20} = 3$$

$$\gamma = 0.32(3^2 + 1) = 3.2$$

Luego  $\theta_{M_2}$  se puede poner en función de  $\gamma$  quedando:

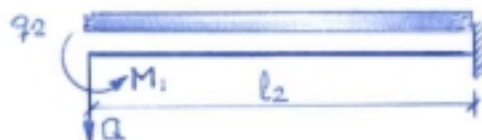
$$\theta_{M_2} = \gamma \frac{M_2 \cdot l_2}{\beta} \quad \frac{1}{c} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Como esto debe ser igual a la rotación por flexión de la otra viga será igualando:

$$\frac{q_1 \cdot l_1^3}{6} - \frac{M_2 \cdot l_1}{l} - \frac{Q_1 \cdot l_1^2}{2} = \gamma \cdot M_2 \cdot l_2 \quad 2^\circ \text{ Ecuacion}$$

La tercera ecuación viene a hacer la inversa, es decir, la rotación flexión de la viga  $V_2$  tiene que ser igual a la rotación por torsión que corresponde a  $V_1$ .

Luego tenemos: la carga  $q_2$ , par  $M_1$  y  $Q$ .



rotación negativa en el sentido contrario de marcha de las agujas del reloj.

Tendremos que las tres rotaciones son negativas.

Será:

$$\frac{-q_2 \cdot l_2^3}{6\beta} - \frac{Q \cdot l_2^2}{2\beta} - \frac{M_1 \cdot l_2}{\beta} = \frac{\gamma \cdot M_1 \cdot l_1}{\beta}$$

luego la ecuación correspondiente será:

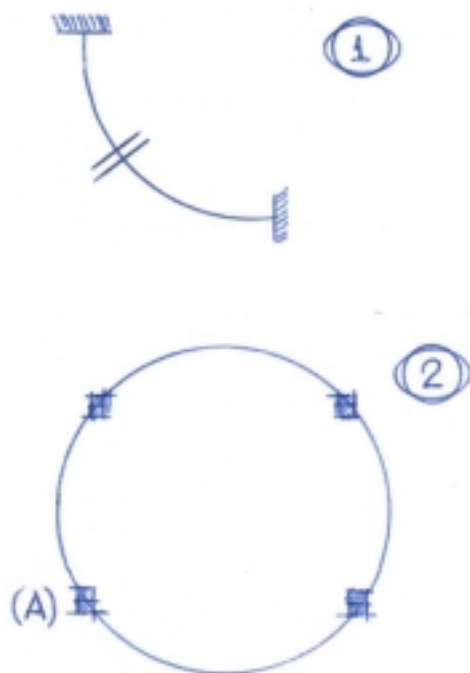
$$\frac{q_2 \cdot l_2^3}{6} - \frac{Q \cdot l_2^2}{2} - M_1 \cdot l_2 = -\gamma \cdot M_1 \cdot l_1$$

tercera ecuación

Con estas tres (3) ecuaciones resolvemos el sistema y determinamos las incógnitas correspondientes.

### VIGA DE EJE CIRCULAR

Si suponemos una viga de eje circular empotrada en ambos extremos como lo indica la figura N°1 (con empotramiento perfecto) la resolución se puede hacer exactamente como se hizo para la viga de ángulo recto (balcon) o sea, produciendo un corte en la parte central y determinando los tres (3) esfuerzos internos que se presentan.

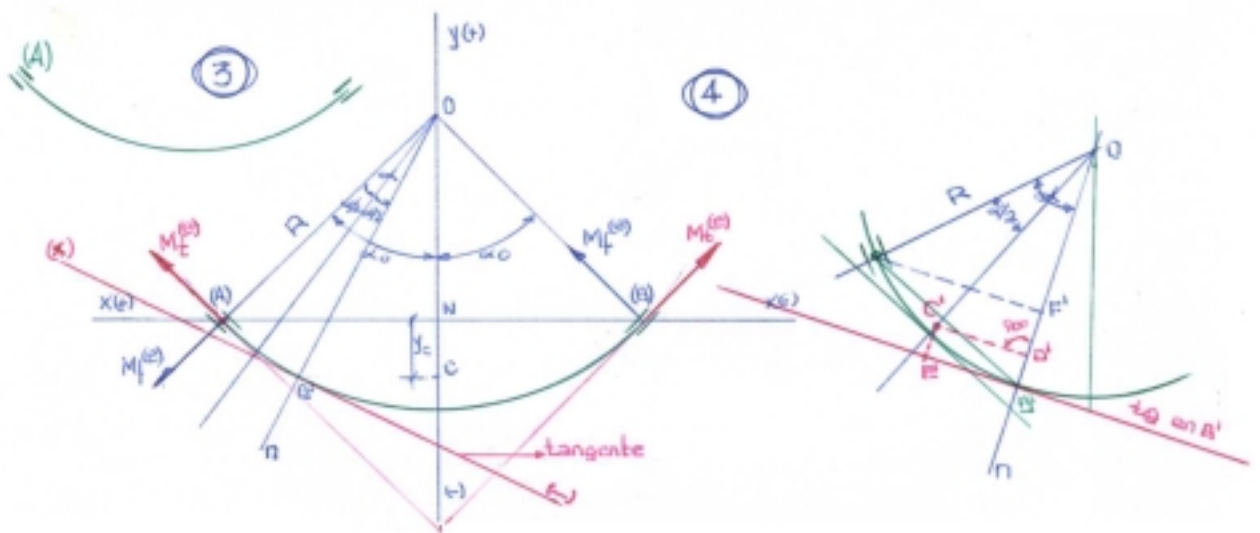


La viga de eje circular que corresponde a un tanque apoyado sobre columnas como lo indica la figura N°2, presenta una diferencia con respecto al primer caso de empotramiento perfecto, por cuanto lo que ocurre sobre la viga de eje circular es que descarga una carga que es la misma que descarga en el tramo continuo de la figura N°2. Entonces al producirse un par de torsión o momento torsor en el encuentro de la viga con la columna (punto A) hay una rotación y la viga que sigue en el otro costado o tramo tiene exactamente la misma rotación i por razones de simetría en consecuencia si ambas partes experimentan la misma rotación, quiere decir que no hay una rotación relativa entre la sección izquierda y derecha de la columna, o sea, eso se comporta y así que considerarlo como si estuviera sujeta en sus extremos mediante una especie de charnela, que permite la libre rotación por torsión, lo que no permite es la rotación por efecto de flexión en el punto considerado, porque si hay continuidad, justamente la flexión es impedida por la continuidad del otro tramo, en cambio la rotación por torsión no es impedida por cuanto ambas rotan con el mismo valor.

Luego la hipótesis que se supone es considerar al tramo entre columnas como si tuviera una charnela que permite la rotación por torsión en ambos extremos (figura N°3).

Con ésta hipótesis el problema se transforma en un simple caso isostático o sea que se puede resolver con las ecuaciones de la estática.

Consideramos por ejemplo uno de los tramos entre dos columnas (fig. N°4).

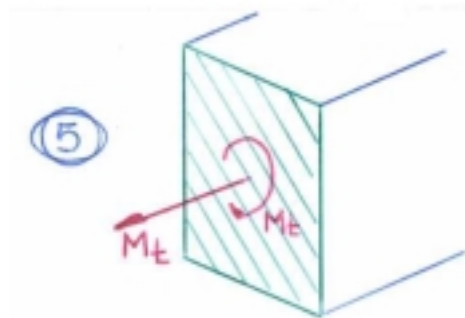


Designamos con  $\alpha_0$  al ángulo central (o sea entre columnas y eje central) que depende de las cantidades de columnas que tenga el tanque.

La representación de los momentos flectores y torsores lo hacemos en forma vectorial (siendo ésta la más adecuada para una fácil interpretación).

En el extremo A suponemos que existe un par de torsión positivo que lo representamos normalmente al plano de la sección.

Esto es debido a que si tenemos en la sección considerada actuando un par de torsión como lo indica la figura N°5, nosotros podremos representarlo vectorialmente con un vector  $M_t$  normal al plano considerado, que en nuestro caso resulta tangente al eje del arco en ese punto (punto A).



El momento flector se representa por un vector que está contenido en el plano de la sección, es decir que el momento flector en el punto considerado es un par (figura N°6) de flexión que actúa en el plano normal a la sección, luego el vector representativo es un vector que actúa en el plano de la sección, luego como la sección

tiene la dirección del radio, coincide con el sentido positivo fijado.

Los pares que actúan en el punto A (figura N°4) se denominan de la siguiente forma:

$M_t^e$  = Momento torsor en el extremo.

$M_f^e$  = Momento flector en el extremo.

por razones de simetría, es decir, considerando ahora el punto B, la representación vectorial del momento torsor será igual y de sentido contrario al que actúa en (A), ocurriendo lo mismo con la representación vectorial del momento flector en (B), o sea, de igual y de sentido contrario al que actúa en (A).



La carga continua que incide sobre el arco, va a dar una resultante que actuará en centro de gravedad de arco AB, es decir, que el punto (C), es dicho centro cuya posición se determina por estática.

El punto (c), en general, tenemos actuando la resultante de la carga continua uniforme que actúa sobre el arco AB. Podemos aplicar las ecuaciones para la determinación de las incógnitas, por ejemplo:

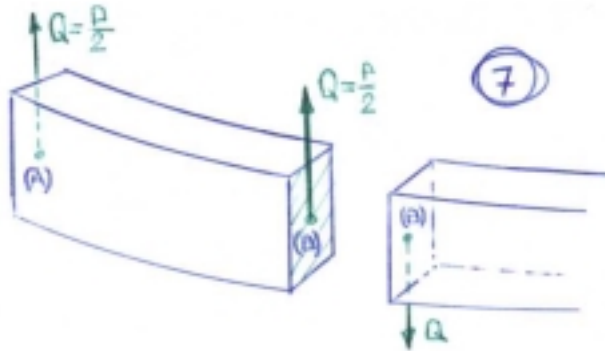
1° ECUACIÓN, de proyección de momentos, tomando momento respecto al eje (y).



$$\sum M_{pi}^y = 0$$

Sumatoria de los momentos de todas las fuerzas pi respecto del eje (y) es igual a cero, sobre el tramo del arco AB.

Además hay que tener en cuenta el esfuerzo de corte Q que actúa en los extremos (A) y (B) y que vale la mitad de la carga que está actuando sobre el arco AB, es decir, que si nosotros llamamos (P) a la carga que actúa en el punto (C) el esfuerzo será:



$$Q = \frac{P}{2} \text{ y en otro extremo será igual y}$$

de sentido contrario o sea hacia abajo.

**Esta consideración es en cuanto al esfuerzo de corte en general pero en nuestro caso para el tramo AB el esfuerzo de corte actúa en las secciones con sentido hacia arriba y en el tramo siguiente hacia abajo. Esto es así porque se debe mantener el equilibrio de la viga.**

Luego tomando momento de todas las fuerzas respecto al eje (y) tenemos:

Sabemos por estática que cuando se toma momento de un par respecto de un

eje cualquiera como en este caso, representado por un vector para calcular o para obtener el momento del par respecto del eje en forma vectorial se obtiene directamente proyectando dicho vector sobre el eje.

Esto se demuestra por definición vectorial del momento de una fuerza cualquiera respecto de un eje, por ej. como se observa en la fig. 8, es igual al vector momento de esta fuerza (p) respecto de un punto del eje (O) proyectado sobre el eje ( $M_p^e$ ).

Es decir que si se quiere calcular el momento de una fuerza, respecto de un eje, tomo un punto cualquiera del eje, con respecto al cual se tiene un momento y después se proyecta dicho vector momento.

Para nuestro caso ya tenemos el vector momento; luego proyectándolo directamente sobre el eje (y) tendremos el momento del vector respecto al eje (y).

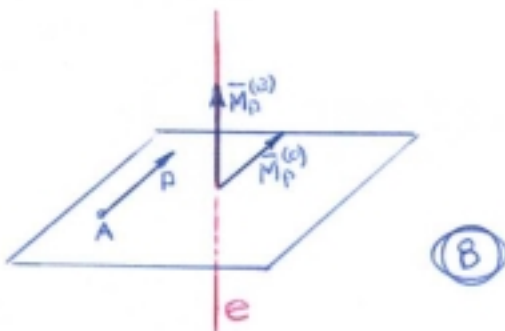
Por lo tanto para nuestro caso particular si consideramos positivo (+) el eje hacia arriba tendremos:

$$2Mt^e \cdot \text{sen}\alpha_0 + Mf^e \cdot \text{cos}\alpha_0 - Mf^e \cdot \text{cos}\alpha_0 + P \cdot 0 = 0$$

$$2Mt^e \cdot \text{sen}\alpha_0 = 0$$

$$\boxed{Mt^e = 0} \quad 1^\circ \text{ condición}$$

Es decir que el momento torsor en el punto de union con la columna vale cero, y esto es lógico, pues nosotros dijimos que rotaban el mismo angulo, luego si rotan el mismo angulo no hay diferencia de rotación y por consiguiente no puede haber torsión.



Esto ocurre logicamente cuando los tramos de la viga son iguales y de la misma sección, luego hay la misma rigidez, pues si las secciones fueran distintas, habría distinta rigidez a torsión, luego las rotaciones serían distinta y existiría momento torsor.

Para calcular el momento flector en el extremo, tomaremos momento respecto al eje (x) que lo consideramos positivo hacia la izquierda, luego la 2º condición es:

$$\sum MPi^x = 0$$

**Sumatoria de los momentos de las fuerzas Pi respecto del eje (x), es igual a cero.**

luego tendremos:

$$2Mf^e \cdot \text{sen}\alpha_0 + P \cdot yc = 0$$

Consideramos dos veces el momento flector en el extremo, porque sumamos el del extremo (A) y (B) que tienen el mismo signo al tomar momento con respecto al eje (x).

Los momentos torsores no los consideramos pues son nulos para los extremos, y el momento de la fuerza (P) que actúa en (C) produce una rotación positiva, luego se lo toma con sentido positivo.

$$Mf^e = \frac{-yc \cdot P}{\text{sen}\alpha_0 \cdot 2} \quad (1)$$

Esto nos dice que el signo fijado en la figura 4 al  $Mf^e$  no es el real, luego debemos cambiar signo.

Es decir que es un momento flector que tiene que producir tracción en las fibras superiores en el punto considerado (A).

La distancia (yc) podemos calcularla considerando la distancia desde el baricentro del arco al eje (x) y que vale:

$$yc = OC - ON = R \frac{\text{sen}\alpha_0}{\alpha_0} - R \cos\alpha_0$$

Reemplazando en (1):

$$Mf^e = -\frac{P}{2\text{sen}\alpha_0} \left( R \frac{\text{sen}\alpha_0}{\alpha_0} - R \cos\alpha_0 \right)$$

$$\boxed{Mf^e = -\frac{PR}{2} \left( \frac{1}{\alpha_0} - \cot g\alpha_0 \right)}$$

ya hemos calculado que es lo que pasa en los extremos, es decir, conocemos cuanto vale el momento torsor en el extremo, que vale cero, el momento flector en el extremo que vale la expresión (2) y también conocemos la fuerza de corte en el extremo que vale P/2, nos interesa ahora conocer la ley de variación para saber donde se producen los máximos.

**Deduciremos la ley de variación para un ángulo cualquiera ( $\alpha$ ).**

En 1º lugar determinaremos cuanto vale el momento flector, el momento torsor en el punto (B').

Para la determinación del momento flector se tiene que tomar momento de la fuerza respecto de un eje por ejemplo, tomamos el eje normal (n) es decir el eje que esta en el plano de la sección y que pasa por el centro de gravedad.

Luego la expresión será y como el momento torsor en el punto A es cero luego no lo incluimos en la sumatoria.

$$Mf = Mf^e \cdot \cos\alpha + \frac{P}{2} R \cdot \text{sen}\alpha - q\alpha R(C'D') \quad (3)$$

El primer sumando lo obtenemos como sabemos tomando el momento del par  $Mf^{(e)}$ , respecto del eje n, que se obtiene proyectándolo directamente sobre el eje, o sea es igual al momento flector del extremo por el coseno de alfa. ( $Mf^{(e)} \cos\alpha$ ).

También tenemos que para el segundo sumando hay el momento de la fuerza P/2 respecto al eje considerado que es; el producto de la fuerza P/2 por la distancia al eje o sea:

$\frac{P}{2} R \text{sen}\alpha$  (con signo positivo por cuanto produce momento flector positivo, o sea dirigido de abajo hacia arriba)

El tercer sumando está dado por el momento flector que produce la carga continua q (que será de signo negativo) con respecto al eje n y que será: La resultante de la carga continua (q  $\alpha$  R) por la distancia a esa resultante al eje n (C'D').

Aclaremos que la resultante de esa carga continua actuando en la longitud de arco (dR) estará aplicada en el centro de gravedad de ese sector de arco AB' que será el punto C'.

El valor de C'D' es:

$$C'D' = OC' \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

siendo:

$$\overline{OC'} = \frac{R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \quad (\text{radio } R \text{ por } \operatorname{sen} \text{ de } \alpha \text{ sobre } 2 \text{ dividido por } \alpha \text{ sobre } 2 \text{ en}$$

radianes)

$$C'D' = \frac{R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{R \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

reemplazando en la expresión (3)  $q\alpha R^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$

$$Mf = Mf^e \cos \alpha + \frac{P}{2} R \operatorname{sen} \alpha - q\alpha R^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

Si colocamos q en función de la carga total que actúa en el anillo o sea P, tendremos:

$$q = \frac{P(\text{resultante.de.todas.las.cargas})}{(\text{longitud.del.arco.en.radianes})2\alpha_0 R} = \frac{P}{2\alpha_0 R}$$

$$Mf = Mf^e \cos \alpha + \frac{P}{2} R \operatorname{sen} \alpha - \frac{2PR^2}{2\alpha_0 R} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$Mf = Mf^e \cos \alpha + \frac{P}{2} R \operatorname{sen} \alpha - \frac{PR^2}{\alpha_0 R} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Con esta expresión se puede calcular el momento flector para cualquier punto, pero lo que nos interesa es el máximo, por lo tanto derivando la expresión (4) respecto a  $\alpha$  tenemos, e igualando a cero:

$$\frac{dMf}{d\alpha} = -Mf^e \operatorname{sen} \alpha + \frac{P}{2} R \cos \alpha - \frac{PR}{\alpha_0} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\frac{dMf}{d\alpha} = -Mf^e \operatorname{sen} \alpha + \frac{P}{2} R \cos \alpha - \frac{PR \operatorname{sen} \alpha}{\alpha_0} = 0$$

$$\frac{dMf}{d\alpha} = -\operatorname{sen} \alpha \left( Mf^e + \frac{PR}{2\alpha_0} \right) = -\frac{P}{2} R \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{PR}{2}}{-\frac{PR}{2\alpha_0} + \frac{PR}{2} \operatorname{c} \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{PR}{2\alpha_0}} = \frac{1}{\operatorname{c} \operatorname{tg} \alpha_0}$$

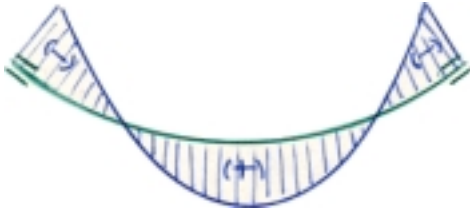
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_0$$

Es decir que el máximo valor del momento flector se produce para  $\alpha = \alpha_0$ , es decir, que existe en el centro del arco.

También pueden presentarse otros máximos, como ser el máximo negativo, en el extremo, es decir, que existirán dos máximos, que son de signos contrarios, pero lo que nosotros

estamos tratando de deducir es el máximo en el tramo, pues es en donde existe la variación. (En el extremo el valor es fijo para cada caso particular).

El diagrama de los momentos flectores es como lo indica la figura 9.



Como se ve el valor del momento flector está en función de  $\alpha_0$  y del radio R únicamente.

Quiere decir que depende del número de columnas, el valor de  $\alpha_0$ .

Veremos ahora la expresión del MOMENTO TORSOR, para cualquier punto de la viga circular.

La determinación del momento torsor la haremos para la misma sección efectuada anteriormente o sea con ángulo  $\alpha$ .

Lo hacemos tomando momento respecto al eje tangente en el punto (B'). Sabemos que cuando se tiene un sistema espacial de fuerzas y para calcular el momento torsor respecto de una sección se toma momento respecto al eje perpendicular a la sección que pasa por el centro de gravedad, y dicho eje es en este caso el eje tangente (t).

Le adjudicamos sentido positivo hacia la izquierda.

Como en el caso anterior, sabemos que el momento torsor en el extremo es nulo, luego la expresión será:

$$Mt = Mf^e \operatorname{sen} \alpha + \frac{P}{2} (\overline{F'B'}) - q\alpha R (\overline{C'E'})$$

$$\overline{F'B'} = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$$

$$\overline{C'E'} = \overline{D'B'} = R - OC' \cos \frac{\alpha}{2} = R - R \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{C'E'} = R \left( 1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)$$

Reemplazando en (5) nos queda:  $Mf = Mf^e \operatorname{sen} \alpha + \frac{P}{2} R(1 - \cos \alpha) - q\alpha R^2 \left( 1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)$

Reemplazando a q en función de P (carga total):  $q = \frac{P}{2\alpha_0 R}$

y teniendo en cuenta la expresión de  $Mf^e = -\frac{PR}{2\alpha_0} + \frac{PR}{2} c \operatorname{tg} \alpha_0$

$$Mt = \left( -\frac{PR}{2\alpha_0} + \frac{PR}{2} c \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \operatorname{sen} \alpha + \frac{PR}{2} (1 - \cos \alpha) - \frac{P\alpha R}{2\alpha_0 R} \left( 1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right) \quad (6)$$

Expresión general que nos permite determinar el momento torsor en un punto cualquiera.

Es interesante saber que pasa en el centro del tramo sea para  $\alpha = \alpha_0$  luego tenemos que el momento torsor vale:

$$Mt = \left( -\frac{PR}{2\alpha_0} + \frac{PR}{2} c \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \operatorname{sen} \alpha_0 + \frac{PR}{2} - \frac{PR}{2} \cos \alpha_0 - \frac{P\alpha_0 R^2}{2\alpha_0 R} \left( 1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{\alpha_0} \right)$$

$$Mt = -\frac{PR}{2\alpha_0} \operatorname{sen} \alpha_0 + \frac{PR}{2} \cos \alpha_0 + \frac{PR}{2} - \frac{PR}{2} \cos \alpha_0 - \frac{PR}{2} + \frac{PR}{2\alpha_0} \operatorname{sen} \alpha_0 = 0$$

Para hallar el máximo valor del momento torsor derivamos la expresión de Mt respecto a  $\alpha$  e igualemos a cero:

$$\frac{dMt}{d\alpha} = Mf^e \cos \alpha + \frac{PR}{2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{PR}{2\alpha_0} + \frac{PR}{2\alpha_0} \cos \alpha = 0$$

$$\frac{dMt}{d\alpha} = -\frac{PR}{2\alpha_0} \cos \alpha + \frac{PR}{2} c \operatorname{tg} \alpha_0 \cos \alpha + \frac{PR}{2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{PR}{2\alpha_0} + \frac{PR}{2\alpha_0} \cos \alpha = 0$$

$$\frac{dMt}{d\alpha} = \frac{PR}{2} \left( c \operatorname{tg} \alpha_0 \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{\alpha_0} \right) = 0$$

$$(c \operatorname{tg} \alpha_0 \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) = \frac{1}{\alpha_0}$$

Despejando  $\operatorname{sen} \alpha$  para colocar todo en función de una sola variable:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\alpha_0} - c \operatorname{tg} \alpha_0 \cos \alpha \quad \operatorname{sen}^2 \alpha = \left( \frac{1}{\alpha_0} - c \operatorname{tg} \alpha_0 \cos \alpha \right)^2 = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\left( \frac{1}{\alpha_0} \right)^2 - 2 \frac{1}{\alpha_0} \cos \alpha c \operatorname{tg} \alpha_0 + \cos^2 \alpha \cdot c \operatorname{tg}^2 \alpha_0 = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha (1 + c \operatorname{tg}^2 \alpha_0) - 2 \frac{c \operatorname{tg} \alpha_0}{\alpha_0} \cos \alpha - \left[ 1 - \left( \frac{1}{\alpha_0} \right)^2 \right] = 0$$

La dada es una ecuación de 2º grado en  $\cos \alpha$ ; tienen en cuenta que:

$$1 + c \operatorname{tg}^2 \alpha_0 = 1 + \frac{\cos^2 \alpha_0}{\operatorname{sen}^2 \alpha_0} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0}{\operatorname{sen}^2 \alpha_0} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha_0}$$

$$\cos^2 \alpha \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha_0} - 2 \frac{\cos \alpha_0}{\operatorname{sen} \alpha_0} \frac{\cos \alpha}{\alpha_0} - \left[ 1 - \left( \frac{1}{\alpha_0} \right)^2 \right] = 0$$

$$\cos^2 \alpha - \frac{2 \cos \alpha_0}{\alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0} \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos \alpha - \left[ 1 - \left( \frac{1}{\alpha_0^2} \right) \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right] = 0$$

$$\cos^2 \alpha - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_0}{\alpha_0} \cos \alpha - \left[ \left( 1 - \frac{1}{\alpha_0} \right) \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right] = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_0}{\alpha_0} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 2\alpha_0}{4\alpha_0^2} + \left( 1 - \frac{1}{\alpha_0^2} \right) \operatorname{sen}^2 \alpha_0}$$

Si tenemos un tanque con 4 columnas será  $\alpha = 45^\circ$  o sea en radianes  $\frac{\pi}{4}$ .

Reemplazando valores:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2 \frac{\pi}{4}} \sqrt{0.41 - 0.3} = 0.64 \pm \sqrt{0.41 - 0.3}$$

La solución que nos interesa es la suma luego:

$$\cos \alpha = 0.64 + 0.33 = 0.97$$

$$\boxed{\alpha = 19^\circ 30'}$$

Quiere decir q|8 para el caso de 4 columnas se produce el momento torsor máximo para un ángulo  $\alpha = 19^\circ 30'$ .

Determinaremos ahora cuanto vale el MOMENTO FLECTOR en el extremo para el caso de 4 columnas.

$$Mf^e = -\frac{PR}{2} \left( \frac{1}{\alpha_0} - c \operatorname{tg} \alpha_0 \right) = -\frac{PR}{2} \left( \frac{1}{\pi/4} - c \operatorname{tg} 45^\circ \right)$$

$$Mf^e = -\frac{PR}{2} (1.28 - 1)$$

$$\boxed{Mf^e = -0.14 \cdot PR}$$

Existen tablas que nos dan el valor del momento flector y torsor en función de la carga total que son las TABLAS DE KETCHUMT.

El momento flector en el CENTRO DEL TRAMO será para  $\alpha = \alpha_0$ .

De la expresión general que es:

$$Mf = Mf^e \cos \alpha + \frac{PR}{2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{PR}{\alpha_0} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$Mfc = -\frac{PR}{2} \left( \frac{1}{\alpha_0} - c \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \cos \alpha_0 + \frac{PR}{2} \operatorname{sen} \alpha_0 - \frac{PR}{\alpha_0} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_0}{2}$$

$$Mfc = -\frac{PR}{2\alpha_0} \cos \alpha_0 + \left( \frac{\cos^2 \alpha_0}{\operatorname{sen} \alpha_0} + \operatorname{sen} \alpha_0 \right) - \frac{PR}{\alpha_0} + \frac{PR}{\alpha_0} \cos^2 \frac{\alpha_0}{2}$$

$$Mfc = \frac{PR}{2} \left( -\frac{\cos \alpha_0}{\alpha_0} - \frac{2}{\alpha_0} + \frac{2}{\alpha_0} \cos^2 \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{PR}{2 \operatorname{sen} \alpha_0}$$

Para el caso de cuatro columnas tenemos:  $\alpha_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$$Mfc = \frac{PR}{2} \left( -\frac{\cos 45}{\pi/4} - \frac{2}{\pi/4} + \frac{2}{\pi/4} \cos^2 22.5 \right)$$

$$\boxed{Mfc = 0.07 \cdot PR}$$

La ley de variación del esfuerzo de corte se puede obtener de la siguiente manera:

Si se elige una sección cualquiera por ejemplo la que determina el punto B' figura N°4 será:

$$Q = \frac{P}{2} - q \cdot R \cdot \alpha$$

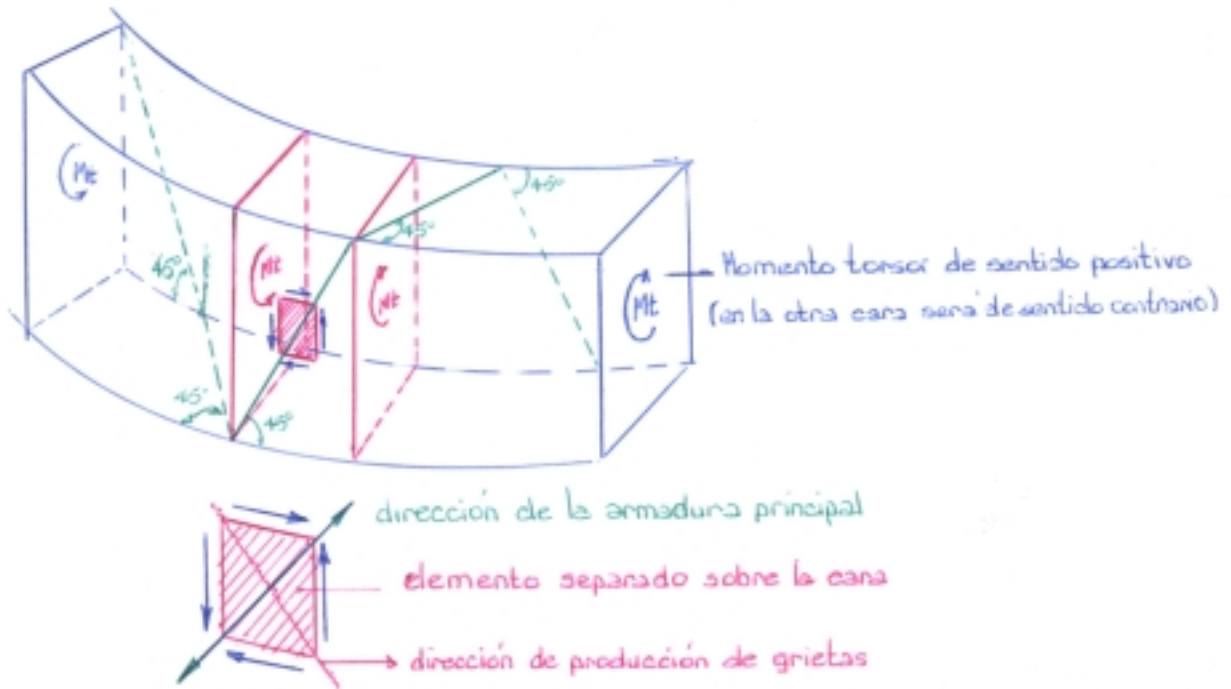
Colocando q en función de p será:

$$Q = \frac{P}{2} - \frac{P}{2\alpha_0 R} R \alpha$$

$$\therefore \boxed{Q = \frac{P}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha_0} \right)} \quad \text{para } \alpha = \alpha_0 \text{ tenemos } Q_{cc} = 0$$

Esto es importante conocer para ver como tiene que colocarse la armadura por ejemplo la de torsión.

Es decir que si se coloca espirales desde el centro hacia el extremo se coloca la armadura a 45° por cara y avanzando en el sentido del momento torsor como lo indica la figura N°10.



Es decir que el espiral se coloca a  $45^\circ$  avanzando hacia el centro de la viga.

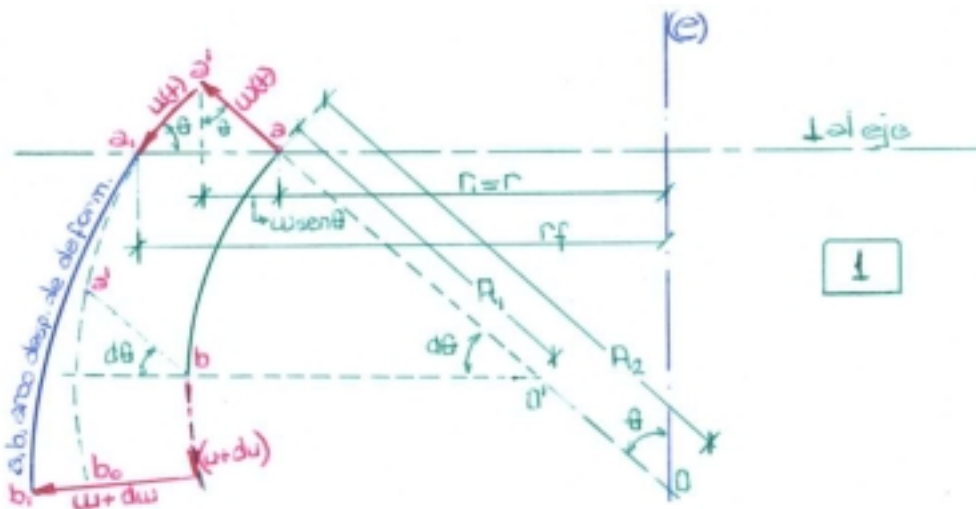
En realidad la espiral se necesita en donde se desarrolla el momento de torsión máximo, luego se podrá ir disminuyendo la sección de armadura de espiral (se efectúa esto aumentando la distancia de paso entre espirales).

Pero como también se nos presenta el esfuerzo de corte aparecerán tensiones de corte, que se absorben también con espirales y barras dobladas, luego en el caso de considerar espirales habrá que sumárselos a los tenidos en cuenta para el efecto de torsión, luego con la sección total se determina la armadura necesaria de espiral.

Ahora bien, cuando se nos presenta un caso como el dado, es conveniente absorber los esfuerzos de corte totalmente por barras dobladas, dejando de esta forma a los espirales que absorban los esfuerzos debidos a torsión.

## RELACIONES ENTRE DEFORMACIONES UNITARIAS Y CORRIMIENTOS

Supongamos tener nosotros un trozo de membrana (figura N°1) de longitud diferencial (ab), el cual está referido por ejemplo, trazando las normales a la cáscara en (a) y en (b).



La normal a la cáscara en (a) forma con el eje (e) un ángulo  $\theta$ , y la normal a la cáscara trazada por el punto (b) cortará a la normal a la cáscara trazada por (a) formando un ángulo que llamamos ( $d\theta$ ) de manera tal que el radio  $R_1$  será el segmento  $ao'$  y el segmento  $ao$  será  $R_2$ .

Supongamos que el punto (a) experimenta los siguientes corrimientos:

**Un corrimiento en la dirección de la normal a la cáscara que llamamos  $w$ , con sentido positivo dirigido hacia afuera (es decir que si el corrimiento es dirigido hacia afuera se considera positivo), y además un corrimiento a lo largo del arco que lo llamamos ( $u$ ) positivo si se produce en el sentido de los arcos crecientes, es decir en el sentido en que se tome el ángulo  $\theta$ , en nuestro caso lo tenemos a partir del eje (e) lo que nos dice que al aumentar  $\theta$  en el sentido fijado por la flecha nos da el sentido positivo del corrimiento ( $u$ ).**

Luego de estos dos corrimientos el punto (a) pasaría a la posición ( $a_1$ ) Consideramos ahora el punto (b). Este punto experimentará un corrimiento en el sentido del arco que lo llamamos ( $u+du$ ), es decir, que tiene que ser igual al anterior, más un diferencial, por la variación que puede haber en el tramo del arco abarcado por ( $d\theta$ )

**También el punto (b) experimentará un corrimiento en la dirección de la normal a la cáscara en dicho punto que llamamos ( $w+dw$ ).**

Luego el punto (b) pasará debido a los corrimientos al punto ( $b_1$ ).

( $a_1b_1$ ) es el arco ( $ab$ ) después de la deformación. Ahora bien, si nosotros queremos calcular el alargamiento unitario del arco de meridiano ( $ab$ ).

A dicho alargamiento unitario lo llamamos  $\epsilon_1$ , que será igual a la longitud final ( $a_1b_1$ ) menos la longitud inicial ( $ab$ ), dividido la longitud inicial ( $ab$ ):

$$\epsilon_1 = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}$$

El valor de ( $a_1b_1$ ) se puede tomar prácticamente igual al valor ( $a_1b_0$ ) que se obtiene trazando por ( $a_1$ ) un arco paralelo al ( $ab$ ), luego teniendo en cuenta que el ( $dw$ ) es mucho más pequeño que el valor ( $w$ ), podemos considerar que la longitud ( $a_1b_1 = a_1b_0$ ), luego reemplazando en (1) tenemos:

$$\epsilon_1 = \frac{a_1b_0 - ab}{ab}$$

A la expresión ( $a_1b_0$ ) podemos escribirla en función del arco ( $ab$ ) o sea: Si trazamos por el punto (b) una paralela a la normal a la cáscara en el punto (a), ésta cortará al arco ( $a_1b_0$ ) en el punto ( $a'$ ), luego el ángulo que forma con la normal a la cáscara en el punto (b) será ( $d\theta$ ) con lo que ( $a_1b_0$ ) será igual a:

$$a_1b_0 = ab + w \cdot d\theta + u + du - u$$

$$\text{reemplazando tenemos: } \epsilon_1 = \frac{ab - w \cdot d\theta + u + du - ab}{ab} = \frac{w \cdot d\theta + du}{ab}$$

El valor ( $ab$ ) podemos expresarlo en función de  $d\theta$ , es decir:

$ab = R_1 \cdot d\theta$ , luego:

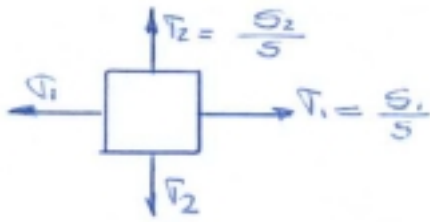
$$\epsilon_1 = \frac{w \cdot d\theta + du}{R_1 \cdot d\theta} = \frac{w}{R_1} + \frac{du}{R_1 \cdot d\theta}$$

$$\boxed{\epsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left( w + \frac{du}{d\theta} \right)} \quad (2)$$

Como vemos es una relación entre la deformación unitaria del meridiano y los dos corrimientos ( $w$ ) y ( $u$ ) que han experimentado los puntos (a y b). Esta deformación unitaria se calcula en base a las tensiones que se tienen en un punto, es decir, a las tensiones ortogonales en un punto, por ejemplo la deformación unitaria  $\epsilon_1$  será:

$$\epsilon_1 = \frac{S_1}{E \cdot s} - \mu \frac{S_2}{E \cdot s}$$





donde  $\frac{S_1}{s}$  es la tensión  $\sigma_1$  y  $\frac{S_2}{s}$  la tensión  $\sigma_2$ ;  $\mu$  es el coeficiente de Poisson debido a la deformación transversal.

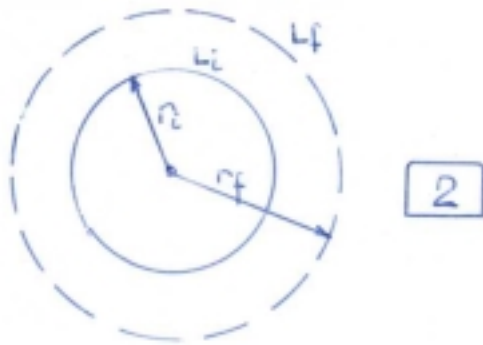
Luego considerando la ley de Hooke:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}$$

En general podemos decir que la deformación unitaria  $\varepsilon_1$  será igual a la deformación en una dirección menos la deformación en sentido transversal a la anterior.

Veamos ahora la **DEFORMACION UNITARIA del PARALELO** en el punto considerado.

Si llamamos con  $r_i$  el valor o distancia que existe entre el punto (a) y el eje (e), que llamamos radio inicial del paralelo, y con (rf) al radio del paralelo después de la deformación, es decir, desde (a<sub>1</sub>) al eje (e).



Nosotros sabemos que cuando se tiene una circunferencia, (figura N°2) de radio inicial ( $r_i$ ), con una deformación cualquiera (por ejemplo, provocada por presión interna o por variación de temperatura, etc.), se produce una modificación de longitud y pasa a tener un nuevo radio ( $r_f$ ). Luego si llamamos con ( $L_f$ ) a la longitud de la circunferencia final, y con ( $L_i$ ) a la longitud de la circunferencia inicial, la deformación unitaria que corresponde a dicha circunferencia la llamamos  $\varepsilon_2$  y vale:

$$\varepsilon_2 = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{2\pi \cdot r_f - 2\pi \cdot r_i}{2\pi \cdot r_i}$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = \frac{r_f - r_i}{r_i}} \quad (3)$$

Lo que nos dice que la deformación unitaria de la circunferencia es la misma deformación que se obtiene en el radio.

El (rf) radio final podemos expresarlo como sigue: considerando la figura N°1, podemos colocar el radio final, en función del radio inicial y de las proyecciones de los corrimientos sobre una recta normal al eje (e) luego:

$$r_f = r_i - w \cdot \text{sen}\theta + u \cdot \text{cos}\theta$$

reemplazando en (3) tenemos:

$$\varepsilon_2 = \frac{r_i + w \cdot \text{sen}\theta + u \cdot \text{cos}\theta - r_i}{r_i}$$

El radio  $r_i$  podemos expresarlo en función del radio  $R_2$  siendo:

$$r_i = R_2 \cdot \text{sen}\theta$$

$$\varepsilon_2 = \frac{w \text{sen}\theta + u \text{cos}\theta}{R_2 \text{sen}\theta} = \frac{1}{R_2} (w + u \cot g\theta)$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = \frac{1}{R_2}(w + u \cot g\theta)}$$

Como vemos también es una relación entre la deformación unitaria del paralelo y los corrimientos experimentados por los puntos (a y b).

El valor de  $\varepsilon_2$  para un elemento de un punto determinado se puede expresar:

$$\varepsilon_2 = \frac{S_2}{E_s} - \mu \frac{S_1}{E_s}$$

Lo que nos interesa en las membranas es calcular los corrimientos en base al estado de tensiones  $S_1$  y  $S_2$  por ejemplo se puede calcular  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  que son las deformaciones unitarias del meridiano y el paralelo respectivamente, luego relacionando las expresiones (2) y (4) podemos llegar a las expresiones de los corrimientos (u y w) en cualquier punto de la membrana. Que es lo que deducimos a continuación.

Si de las expresiones (2) y (4) despejamos el valor de (w) tenemos:

$$w = R_1 \cdot \varepsilon_1 - \frac{du}{d\theta} = \varepsilon_2 \cdot R_2 - u \cot g\theta \quad (4')$$

De esta expresión podemos escribir la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{du}{d\theta} = u \cot g\theta = \varepsilon_1 \cdot R_1 - \varepsilon_2 \cdot R_2 = f(\theta) \quad (4')$$

Es una ecuación diferencial en (u) y en ( $\theta$ ). En el segundo miembro de esta expresión vemos que las deformaciones unitarias y los radios de curvatura dependen de la posición del punto considerado, es decir, dependen de  $\theta$ , luego podemos decir que el segundo miembro es una función de  $f(\theta)$ .

La solución de esta ecuación diferencial se puede hacer determinando primeramente la ecuación diferencial homogénea es decir:

$$\frac{du}{d\theta} = u \cot g\theta = 0$$

Separando variables tenemos:

$$\frac{du}{u} = d\theta \cot g\theta = d\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = d \frac{(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{d\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$\log u = \log \sin\theta + \log C = \log C \sin\theta$$

$$\therefore \boxed{u = C \cdot \sin\theta}$$

Ahora bien, esta expresión es la solución de la ecuación diferencial homogénea, pero la solución de la ecuación diferencial planteada se obtiene considerando que (c) en vez de ser constante es una función de  $\theta$ , luego será  $C(\theta)$ .

Es decir que consideramos como solución a la siguiente ecuación:

$$u = C(\theta) \cdot \sin\theta \quad (5)$$

El valor de la función  $C(\theta)$  se puede determinar reemplazando en la ecuación diferencial planteada:

$$C'(\theta) \cdot \sin\theta + C(\theta) \cdot \cos\theta - C(\theta) \cdot \sin\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = f(\theta)$$

$$C'(\theta) \cdot \sin\theta = f(\theta)$$

$$\frac{dC(\theta)}{d\theta} = C'(\theta) = \frac{f(\theta)}{\sin\theta}$$

Luego integrando ambos miembros tenemos:

$$\int \frac{dC(\theta)}{d\theta} = \int C'(\theta)$$

$$= \int \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} d\theta + C$$

$$\boxed{C(\theta) = \int \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} d\theta + C} \quad (5')$$

Conocido el valor de  $C(\theta)$  lo podemos reemplazar en la expresión (5) y calcular el valor de  $(u)$ , luego conocido  $(u)$  se puede calcular el valor del otro corrimiento o sea  $(w)$  reemplazando en (4').

$$w = \varepsilon_2 \cdot R_2 - u \cot g = \varepsilon_2 \cdot R_2 - C(\theta) \text{sen}\theta \cot g \theta$$

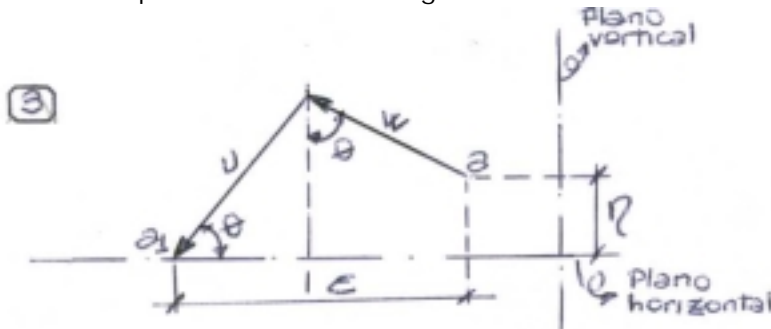
$$w = \varepsilon_2 \cdot R_2 - C(\theta) \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \text{sen}\theta$$

$$\boxed{w = \varepsilon_2 \cdot R_2 - C(\theta) \cos\theta} \quad (6)$$

Resulta más comodo trabajar con los corrimientos en dirección horizontal y vertical, es decir que los corrimientos calculados por (5) y (6) están dados en dirección de la normal y tangente a la cáscara en dicho punto, pero es más comodo tener la expresión del corrimiento en sentido horizontal y vertical.

Luego, si nosotros por ejemplo, le llamamos a los corrimientos del punto (a)  $(u)$  y  $(w)$  y queremos ahora hallar el corrimiento horizontal y vertical, proyectamos a los corrimientos  $(w)$  y  $(u)$  sobre una horizontal y sobre una vertical (figura N°3).

Es decir que de acuerdo a la figura el corrimiento horizontal sera  $(\varepsilon)$  y el vertical  $(\eta)$ .



Las expresiones de  $(\varepsilon)$  y  $(\eta)$  en función de  $(u)$  y  $(w)$  se pueden determinar por proyecciones:

$$\varepsilon = w \cdot \text{sen}\theta + u \cdot \cos\theta \quad (7)$$

$$\eta = u \cdot \text{sen}\theta - w \cdot \cos\theta \quad (8)$$

Ahora bien, la expresión de  $\varepsilon$  es mucho mas rápido obtenerla con la consideración de que el corrimiento  $(\varepsilon)$  se puede obtener multiplicando la deformación unitaria del radio por el radio.

Es decir que  $(\varepsilon)$  es igual al radio inicial  $(r_i)$  (figura N1) por la deformación unitaria de dicho radio, pero la deformación unitaria del radio es  $(\varepsilon_2)$ , ya que la deformación unitaria de la circunferencia es la misma deformación que, tiene el radio correspondiente. Quiere decir entonces que el valor de  $(\varepsilon)$  se calcula por la expresión:



$$\varepsilon = \varepsilon_2 \cdot r$$

Lo que nos dice que el  $(\varepsilon_2 r)$  de todo punto nos va a dar el corrimiento horizontal del punto correspondiente.

Por ejemplo si consideramos una cúpula cualquiera y queremos calcular cuanto vale el corrimiento horizontal para un punto dado.

$$\varepsilon = \varepsilon_2 \cdot r = r \left( \frac{S_2}{Es} - \mu \frac{S_1}{Es} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{r}{Es} (S_2 - \mu S_1) \quad (9)$$

Expresión del corrimiento horizontal en todo punto. Es decir que si en el punto (I) de la figura N°4 se conocen los valores de los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  aplicando la expresión (9) se puede calcular cuanto vale el corrimiento horizontal ( $\varepsilon$ ) para dicho punto.

El cálculo del corrimiento vertical ( $\eta$ ) es un poco mas complejo.

Es decir para calcular ( $\eta$ ) debemos reemplazar los valores de ( $u$  y  $w$ ) en la expresión (8):

$$\eta = C(\theta) \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\theta - (\varepsilon_2 \cdot R_2 - C(\theta) \cos\theta) \cos\theta$$

$$\eta = C(\theta) \text{sen}^2\theta - \varepsilon_2 \cdot R_2 \cdot \cos\theta + C(\theta) \cos^2\theta = C(\theta)(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) - \varepsilon_2 \cdot R_2 \cdot \cos\theta$$

$$\eta = C(\theta) - \varepsilon_2 \cdot R_2 \cdot \cos\theta$$

Podemos expresarla de otra forma, ya que recordando el valor de ( $\varepsilon_2 R_2$ ).

$$\varepsilon = \varepsilon_2 \cdot r \quad r = R_2 \cdot \text{sen}\theta \quad (\text{fig. 1}) \quad \therefore \quad \varepsilon = \varepsilon_2 \cdot R_2 \cdot \text{sen}\theta \quad \therefore \quad \varepsilon_2 \cdot R_2 = \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta}$$

$$\eta = C(\theta) - \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \cos\theta = C(\theta) - \varepsilon \cdot \cot\theta$$

$$\eta = C(\theta) - \frac{\varepsilon}{\text{tg}\theta} \quad (10)$$

Esta expresión tiene la ventaja de que ya está expresado en función de  $\varepsilon$ . Es decir que si nosotros calculamos antes ( $\varepsilon$ ), luego calculando  $C(\theta)$  que está basado en la función  $\theta$ , podemos determinar el valor de ( $\eta$ ).

En general el orden de este cálculo es el siguiente:

$$\varepsilon = \frac{r}{Es} (S_2 - \mu S_1)$$

1°- Se determina ( $\varepsilon$ ) con la expresión:

$$C(\theta) = \int \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} d\theta + C$$

2°- Se determina  $C(\theta)$  con la expresión:

$$\eta = C(\theta) - \frac{\varepsilon}{\text{tg}\theta}$$

3°- Se calcula ( $\eta$ ) con la expresión:

Con estas 3 expresiones se resuelve el problema de la determinación de los corrimientos, en dirección vertical y horizontal de todo punto de la membrana en cuestión.

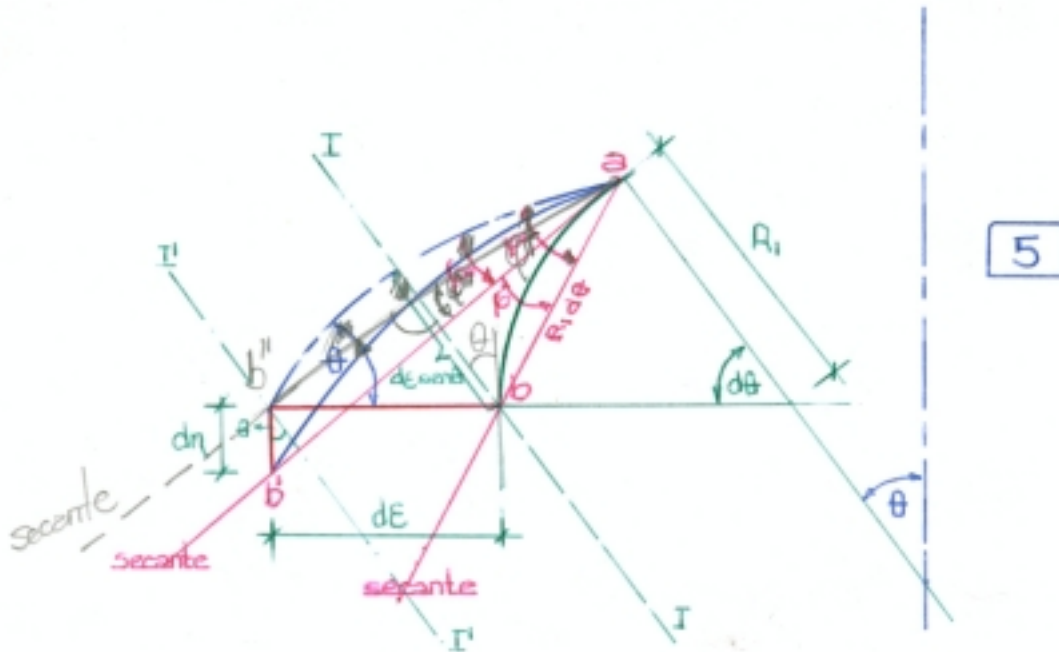
---

**ROTACIÓN de una SECCION CUALQUIERA** en un punto determinado de la membrana.

Al decir la rotación, se entiende como la rotación de la tangente en un punto determinado de la membrana.

Rotación que llamamos ( $\varphi$ ). Existen varias formas de determinar la rotación ( $\varphi$ ).

Por ejemplo si nosotros consideramos un elemento (a-b), de membrana (figura N°5) y si consideramos la rotación que se produce en la sección es decir que la rotación de la tangente en el punto considerado depende exclusivamente de los corrimientos relativos que se tienen o sea los corrimientos relativos ( $d\varepsilon$ ) y del corrimiento relativo ( $d\eta$ ).



Luego si el corrimiento relativo de (b) respecto de (a) en el sentido horizontal es ( $d\varepsilon$ ) y el corrimiento relativo de (b) respecto de (a) en el sentido vertical es ( $d\eta$ ).

Ahora si en vez de considerar la tangente primitiva consideramos a la secante, ya que prácticamente es lo mismo, debido a que si en la posición primitiva del arco (ab) tomo la secante (ab) y cuando se producen los corrimientos también se considera la secante del arco (ab) deformado o sea (ab').

El ángulo de rotación que tomamos es el ángulo que forman las dos secantes entre sí, que llamamos  $\varphi$ . Que podemos expresarlo en función de los ángulos que forman la secante (ab) con la secante (ab''), que llamamos  $\varphi'$  y del ángulo que forma la secante (ab') con la secante (ab'') que llamamos  $\varphi''$ , es decir que:

$$\varphi = \varphi' - \varphi''$$

En realidad consideramos dos componentes de rotación producidas por un desplazamiento  $d\varepsilon$  cuando  $d\eta=0$  y viceversa la producida por  $d\eta$  cuando  $d\varepsilon=0$  que son respectivamente  $\varphi'$  y  $\varphi''$ .

**En la que el valor de ( $\varphi'$ ) vale, si proyectamos el valor de ( $d\varepsilon$ ) sobre la recta (I-I) que es normal a la tangente en (a) y también podemos considerarla normal a la recta o cuerda del arco (ab) ya que en incrementos diferenciales el aumento en los valores de los ángulos en grados es muy despreciable, luego:**

$$\varphi' = \frac{d\varepsilon \cdot \text{sen}\theta}{R_1 \cdot d\theta}$$

El valor de ( $\varphi''$ ) sera, proyectando el valor de ( $d\eta$ ) sobre la recta (I'-I') tenemos:

Con las mismas consideraciones anteriores el valor del ángulo ( $\varphi''$ ) y deprecando los infinitésimos de orden superior, tendremos la misma distancia  $R_1 d\theta$ :

$$\varphi'' = d\eta \frac{\cos\theta}{R \cdot d\theta}$$

reemplazando valores tenemos:

$$\varphi = \frac{d\varepsilon \cdot \text{sen}\theta}{R_1 \cdot d\theta} - \frac{d\eta \cdot \cos\theta}{R_1 \cdot d\theta} = \frac{1}{R_1} \left( \text{sen}\theta \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \cos\theta \frac{d\eta}{d\theta} \right)$$

En esta expresión aparecen los dos valores de los corrimientos ( $\varepsilon$ ) y ( $\eta$ ) luego resulta más cómodo poder expresar el ángulo de rotación ( $\varphi$ ) en función de un solo valor, y en este caso es más fácil expresarlo en función de el valor ( $\varepsilon$ ), luego tenemos que reemplazar ( $\eta$ ) de manera tal de poder expresar a la ecuación en función de ( $\varepsilon$ ) y la función ( $\theta$ ).

Luego, para ello derivamos el valor de ( $d\eta$ ) dado por la expresión N°10:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\theta} &= C'(\theta) - \frac{\left( \frac{d\varepsilon}{d\theta} \text{tg}\theta - \frac{\varepsilon}{\cos^2\theta} \right)}{\text{tg}^2\theta} \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= C'(\theta) - \frac{\frac{d\varepsilon \text{ sen}\theta}{d\theta \cos\theta} - \frac{\varepsilon}{\cos^2\theta}}{\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}} & dtg\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= C'(\theta) - \frac{d\varepsilon \cos\theta}{d\theta \text{ sen}\theta} + \frac{\varepsilon}{\text{sen}^2\theta} \end{aligned}$$

Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{R_1} \left( \text{sen}\theta \frac{d\varepsilon}{d\theta} + \frac{d\varepsilon \cos^2\theta}{d\theta \text{ sen}\theta} - \frac{\varepsilon \cdot \cos\theta}{\text{sen}^2\theta} - C'(\theta) \cdot \cos\theta \right) \\ \varphi &= \frac{1}{R_1} \left[ \frac{d\varepsilon}{d\theta} \left( \text{sen}\theta + \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\theta} \right) - \frac{\varepsilon \cdot \cos\theta}{\text{sen}^2\theta} - C'(\theta) \cdot \cos\theta \right] \\ \varphi &= \frac{1}{R_1} \left[ \frac{d\varepsilon}{d\theta \cdot \text{sen}\theta} - \varepsilon \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} - C'(\theta) \cdot \cos\theta \right] \\ \varphi &= \frac{1}{R_1} \left[ \frac{\frac{d\varepsilon}{d\theta} \text{ sen}\theta - \varepsilon \cdot \cos\theta}{\text{sen}^2\theta} - C'(\theta) \cdot \cos\theta \right] \end{aligned}$$

Si observamos la expresión anterior tenemos que el paréntesis no es más que la derivada respecto de  $\theta$  de:  $\frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta}$

luego:

$$\varphi = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) - C'(\theta) \cdot \cos\theta \right]$$

Si consideramos la expresión de  $C(\theta)$  dada en la ecuación (5') tenemos:

$$C'(\theta) = \frac{dC(\theta)}{d\theta} \quad C(\theta) = \int \frac{f(\theta) \cdot d\theta}{\text{sen}\theta} + C$$

$$C'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \int \frac{f(\theta) \cdot d\theta}{\text{sen}\theta} + \frac{d}{d\theta} C = \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta}$$

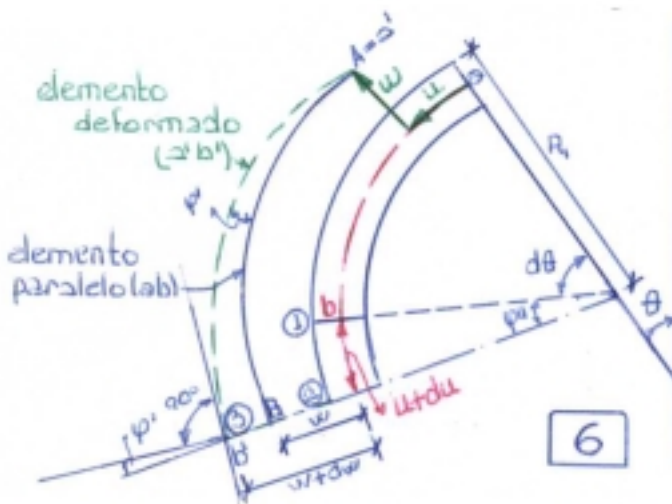
Reemplazando:

$$\varphi = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) - \frac{f(\theta)}{\text{tg}\theta} \right] \quad (11)$$

Como vemos este proceso para deducir  $(\varphi)$  es un poco largo, pero podemos expresar otra forma más rápida para deducir el valor  $(\varphi)$ , utilizando un camino más gráfico.

Si considera el elemento  $(ab)$  (figura N°6) cuyas secciones iniciales son  $(a)$  y  $(b)$ , luego veremos cuales con las rotaciones que experimente la sección  $(a)$ .

Cuando la sección  $(a)$  experimenta un corrimiento  $u$ , la sección  $(b)$  experimentará un corrimiento  $(u + du)$ , también la sección  $(a)$  tendrá en la dirección de la normal a la cáscara un corrimiento  $w$ , y la sección  $(b)$  tendrá un corrimiento  $(w + dw)$ ; pero teniendo en cuenta que las secciones nosotros las debemos considerar perpendicular a la deformada del eje de la cáscara.



Con estas consideraciones podemos ver cuales son las rotaciones que han experimentado las secciones  $(a)$  y  $(b)$ .

La sección  $(b)$  ha pasado de la posición (1) a la (2), barriendo un ángulo negativo que llamamos  $(\varphi'')$ , luego cuando ha pasado a la posición (3) ha girado un ángulo  $(\varphi')$ , y la rotación total de la sección será:

$$\varphi = \varphi' - \varphi''$$

Si trazamos una paralela al arco en la posición primitiva el ángulo que forma el arco deformado con el arco paralelo al primitivo, cuyo vértice es

(A), será también  $(\varphi')$ , por la condición de perpendicularidad de los ángulos, luego:

$$\varphi' = \frac{dw}{R_1 \cdot d\theta} \quad \text{la longitud } AB \text{ siempre la consideramos igual a la primitiva o sea:}$$

$$ab = R_1 d\theta$$

El valor de  $(\varphi'')$  será: 
$$\varphi'' = \frac{u + du}{R_1} = \frac{u}{R_1} \frac{du}{R_1}$$

$\frac{du}{R_1}$  = valor que se puede despreciar por cuanto es un diferencial dividido por un valor finito).

$$\therefore \varphi'' = \frac{u}{R_1}$$

Reemplazando en la expresión de  $(\varphi)$  tenemos:

$$\varphi = \frac{dw}{R_1 \cdot d\theta} - \frac{u}{R_1}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{R_1} \left( \frac{dw}{d\theta} - u \right)}$$

Sabemos que:

$$w = \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} - C(\theta) \cdot \cos\theta$$

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) - C'(\theta) \cdot \cos\theta + C(\theta) \cdot \text{sen}\theta$$

$$\varphi = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) - C'(\theta) \cdot \cos\theta + C(\theta) \cdot \text{sen}\theta - C(\theta) \cdot \text{sen}\theta \right]$$

$$C'(\theta) = \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} \quad \text{determinado anteriormente}$$

$$\varphi = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) - \frac{f(\theta)}{\text{tg}\theta} \right] \quad (11)$$

Como vemos llegamos a la misma expresión.

#### DETERMINACION del valor de $f(\theta)$ para la MEMBRANA ESFERICA.

La expresión de  $f(\theta)$  está dada por la ecuación (4')

$$f(\theta) = \varepsilon_1 \cdot R_1 - \varepsilon_2 \cdot R_2 \quad \text{pero como para la esfera } R_1 = R_2 = R \text{ tenemos:}$$

$$f(\theta) = R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

Los valores de  $(\varepsilon_1)$  y  $(\varepsilon_2)$  están dados por las expresiones:

$$\varepsilon_1 = \frac{S_1}{E_s} - \mu \frac{S_2}{E_s} \qquad \varepsilon_2 = \frac{S_2}{E_s} - \mu \frac{S_1}{E_s}$$

luego:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= R \left[ \left( \frac{S_1}{E_s} - \mu \frac{S_2}{E_s} \right) - \left( \frac{S_2}{E_s} - \mu \frac{S_1}{E_s} \right) \right] \\ &= \frac{R}{E_s} [S_1(1 + \mu) - S_2(1 + \mu)] \end{aligned}$$

$$\boxed{f(\theta) = \frac{R}{E_s} (1 + \mu) \cdot [S_1 - S_2]} \quad (12)$$

Nosotros hemos visto para todas las cargas posibles, como se determinan los esfuerzo  $S_1$  y  $S_2$  luego, una vez obtenidos estos valores, reemplazando en (12) se obtiene la función  $f(\theta)$ , que sirve luego para determinar los corrimientos y las rotaciones.

El valor  $(\mu)$  para el hormigón se toma por ejemplo igual a 0,1 y a veces se desprecia, por ser un valor muy chico.



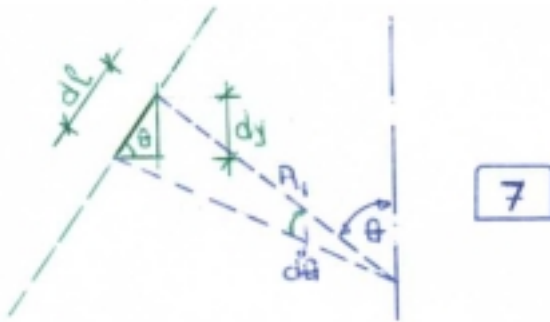
Caso para la **MEMBRANA CONICA**

Partimos de la expresión:  $f(\theta) = \varepsilon_1 \cdot R_1 - \varepsilon_2 \cdot R_2$

Para la membrana conica tenemos:  $R_1 = \infty$  ;  $R_2 = R$

$$f(\theta) = \varepsilon_1 \cdot R_1 \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 \cdot R_2}{\varepsilon_1 \cdot R_1} \right) = \varepsilon_1 \cdot R_1$$

Como en este caso seguimos teniendo el valor de  $R_1 = \infty$  debemos reemplazarlo. Nosotros podemos admitir siempre que un (dl) en un arco es lineal y ser:



$$dl = R_1 \cdot d\theta \quad ; \quad R_1 = \frac{dl}{d\theta}$$

En realidad si se toma un dl en una cáscara cónica, las normales trazados por los extremos del elemento serán paralelas y se cortarán en el infinito.

Pero por la simplificación estriba en considerar que al cortarse en un punto formarán un ángulo diferencial, y las direcciones de estas rectas varían muy poco con la dirección normal a los extremos del elemento.

Es decir que esta suposición siempre es válida porque siempre se cortarán en un punto determinado luego:

Es decir que esta suposición siempre es válida porque siempre se cortarán en un punto determinado luego:

$$f(\theta) = \varepsilon_1 \cdot \frac{dl}{d\theta} \quad (13)$$

La expresión para el corrimiento ( $\varepsilon$ ) es la misma que para membrana esféricas.

$$\varepsilon = \frac{r}{E_s} (S_2 - \mu S_1)$$

La expresión de ( $\eta$ ) se modifica de la siguiente manera. Se parte de la misma forma que para la membrana esférica.

$$\eta = C(\theta) - \frac{\varepsilon}{\text{tg}\theta} \quad ; \quad C(\theta) = \int \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} d\theta + C$$

$$\eta = \int \frac{\varepsilon_1 \frac{dl}{d\theta}}{\text{sen}\theta} d\theta + C - \frac{\varepsilon}{\text{tg}\theta}$$

$$\eta = \frac{1}{\text{sen}\theta} \int \varepsilon_1 \cdot dl + C - \frac{\varepsilon}{\text{tg}\theta} \quad (14)$$

La expresión de ( $\varphi$ ) para la membrana cónica será:

$$\varphi = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) - \frac{f(\theta)}{\text{tg}\theta} \right]$$

Como  $\theta$  es constante, al diferenciar tenemos:

$$\varphi = \frac{1}{R_1 \cdot \text{sen}\theta} \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \frac{f(\theta)}{R_1 \cdot \text{tg}\theta}$$

Reemplazando  $f(\theta)$  por la expresión (13):

$$\varphi = \frac{1}{R_1 \cdot \text{sen}\theta} \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \varepsilon_1 \frac{dl}{d\theta \cdot R_1 \cdot \text{tg}\theta} \quad \text{pero } dl = R_1 \cdot d\theta$$

$$\varphi = \frac{1}{R_1 \cdot \text{sen}\theta} \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \varepsilon_1 \frac{1}{\text{tg}\theta}$$

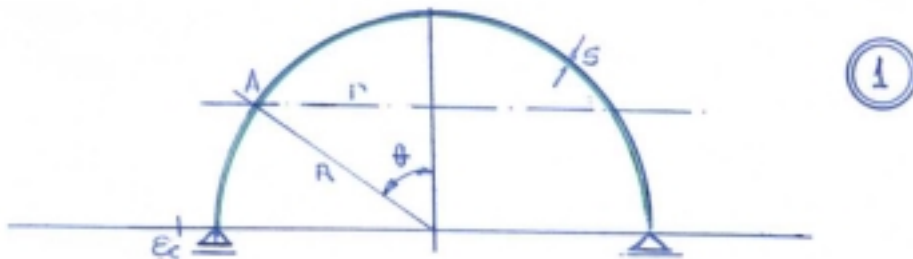
$$\varphi = \frac{1}{\text{sen}\theta} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \frac{\varepsilon_1}{\text{tg}\theta} \quad \text{como } dy = dl \cdot \text{sen}\theta$$

$$\boxed{\varphi = \frac{d\varepsilon}{dy} - \frac{\varepsilon_1}{\text{tg}\theta}} \quad (15)$$

Es decir que para calcular la rotación de una tg cualquiera en un punto tenemos que derivar  $\varepsilon$  en función de ( $y$ ).

## APLICACIONES DE CORRIMIENTO

### 1. CUPULA ESFERICA SIMPLEMENTE APOYADA



**En 1º lugar tendremos en cuenta el peso propio.**

Supongamos que la cúpula tenga espesor ( $s$ ) y radio ( $R$ ). Debido al peso propio nos interesa determinar cual es el corrimiento ( $\varepsilon$ ) en el contorno que se produce por deformación y la rotación ( $\varphi$ ) también en el contorno, podríamos determinar también el descenso en el vertice por ejemplo.

Es decir que estos son los descensos que pueden producirse debido al peso propio. Las expresiones analíticas que habíamos deducido para los descensos son:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{r}{Es} (S_2 - \mu S_1) \\ \eta &= \int \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} d\theta + C - \frac{\varepsilon}{\text{tg}\theta} \\ \varphi &= \frac{1}{R_1} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) - \frac{f(\theta)}{\text{tg}\theta} \right] \end{aligned} \right.$$

Nosotros estamos considerando el caso de la membrana esférica; luego para este caso tiene

aplicación la función  $f(\theta)$  que se expresa.

Siendo su expresión general igual:

$$f(\theta) = \varepsilon_1 \cdot R_1 - \varepsilon_2 \cdot R_2 = R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad \text{para } R_1 = R_2 = R$$

$$\text{Por otra parte: } \varepsilon_1 = \frac{S_1}{E_s} - \mu \frac{S_2}{E_s} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{S_2}{E_s} - \mu \frac{S_1}{E_s}$$

$$\text{Reemplazando tenemos: } f(\theta) = R \left[ \frac{S_1}{E_s} - \mu \frac{S_2}{E_s} - \left( \frac{S_2}{E_s} - \mu \frac{S_1}{E_s} \right) \right]$$

$$f(\theta) = \frac{R(1+\mu)}{E_s} (S_1 - S_2) \quad (1)$$

Para nuestro ejemplo, simplemente para poder resolver estas expresiones y calcular  $(\varepsilon)$  y  $(\eta)$ , vemos que todos están en función de los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  expresiones que nosotros para cada sistema de cargas hemos deducido anteriormente.

Es decir que si consideramos el caso de peso propio, sabemos que:

$$S_1 = -\frac{\gamma R s}{1 + \cos \theta} = -\frac{A}{1 + \cos \theta} \quad \text{donde } A = \gamma R s$$

$$S_2 + S_1 = R \cdot z \quad ; \quad z = -\gamma s \cdot \cos \theta$$

$$S_2 = -\gamma R s \cdot \cos \theta + \frac{A}{1 + \cos \theta}$$

$$S_2 = A \cdot \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right)$$

Luego reemplazando estos valores en las expresiones de los corrimientos tenemos:

$$\varepsilon = \frac{R \cdot \text{sen} \theta}{E_s} \left[ A \cdot \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right) - \mu \frac{(-A)}{1 + \cos \theta} \right]$$

$$\varepsilon = \frac{AR \cdot \text{sen} \theta}{E_s} \left[ \frac{1 + \mu}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right]$$

Podríamos escribir a esta expresión en forma más sintética, llamando  $K$  al valor  $AR/E_s$  ya que son todos valores constantes, luego:

$$\varepsilon = K \cdot \text{sen} \theta \left[ \frac{1 + \mu}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right]$$

Es decir que para cada punto se podría determinar el  $(\varepsilon)$  correspondiente pero nos interesa el valor en el contorno, luego  $\varepsilon_c$  es para  $\theta = 90^\circ$ .

$$\varepsilon_c = K(1 + \mu)$$

Para calcular  $(\eta)$  debemos calcular primeramente la función  $f(\theta)$ , reemplazando valores en la expresión (1) tenemos:

$$f(\theta) = \frac{R(1+\mu)}{Es} \left[ \left( \frac{-A}{1+\cos\theta} \right) - A \left( \frac{1}{1+\cos\theta} - \cos\theta \right) \right]$$

$$f(\theta) = \frac{AR}{Es} (1+\mu) \cdot \left[ \cos\theta - \frac{2}{1+\cos\theta} \right]$$

Para simplificar la expresión utilizamos también el valor  $K = AR/Es$ .

$$f(\theta) = K(1+\mu) \cdot \left[ \cos\theta - \frac{2}{1+\cos\theta} \right]$$

Ahora nosotros lo que necesitamos es el valor:  $\int \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} d\theta$

$$\text{Luego: } \int \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} d\theta = \int \frac{K(1+\mu)}{\text{sen}\theta} \left[ \cos\theta - \frac{2}{1+\cos\theta} \right] d\theta$$

Resolver esta integral es lo más complejo en todos los casos, ya que la derivada de  $(\epsilon)$  con respecto a  $(\theta)$ , es una cosa simple.

Para resolver esta integral la podemos expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} d\theta &= K(1+\mu) \int \frac{\cos\theta + \cos^2\theta - 2}{1+\cos\theta} \frac{1}{\text{sen}\theta} d\theta \\ &= K(1+\mu) \int \frac{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}{\text{sen}\theta(1+\cos\theta)} d\theta = -K(1+\mu) \int \frac{2\cos^2\theta - \cos\theta}{\text{sen}\theta(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= -K(1+\mu) \int \frac{1 - \cos^2\theta + 1 - \cos\theta}{\text{sen}\theta(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= -K(1+\mu) \left[ \int \frac{1 - \cos^2\theta}{\text{sen}\theta \cdot (1+\cos\theta)} d\theta + \int \frac{1 - \cos\theta}{\text{sen}\theta \cdot (1+\cos\theta)} d\theta \right] \\ &= -K(1+\mu) \left[ \int \frac{\text{sen}^2\theta}{\text{sen}\theta \cdot (1+\cos\theta)} d\theta + \int \frac{(1 - \cos\theta)(1+\cos\theta)}{\text{sen}\theta \cdot (1+\cos\theta) \cdot 1+\cos\theta} d\theta \right] \\ &= -K(1+\mu) \left[ \int \frac{\text{sen}\theta}{(1+\cos\theta)} d\theta + \int \frac{\text{sen}\theta}{(1+\cos\theta)^2} d\theta \right] \end{aligned}$$

La primera integral es de fácil resolución por cuanto que es el logaritmo de  $(1+\cos\theta)$ , luego:  
 $\text{sen}\theta \cdot d\theta = d(\cos\theta)$

El signo (-) que afecta a la expresión lo podemos introducir en los sumandos, ya que se hacen positivo, pues los denominadores pueden pasarse a numerador afectándolos de las potencias (-1) y (-2) repectivamente:

$$\begin{aligned} &= +K(1+\mu) \cdot \left[ \ln(1+\cos\theta) + \int \text{sen}\theta \cdot d\theta \cdot (1+\cos\theta)^{-2} \right] \\ &= +K(1+\mu) \cdot \left[ \ln(1+\cos\theta) + \int d(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)^{-2} \right] \\ &= K(1+\mu) \cdot \left[ \ln(1+\cos\theta) + \frac{(1+\cos\theta)^{-1}}{-1} \right] \end{aligned}$$

$$\int \frac{f(\theta)}{\text{sen}\theta} d\theta = K(1+\mu) \cdot [\ln(1+\cos\theta) - (1+\cos\theta)^{-1}]$$

Luego el valor de  $\eta$  sera:

$$\eta = K(1+\mu) \cdot \left[ \ln(1+\cos\theta) - \frac{1}{1+\cos\theta} \right] + C - \frac{K \cdot \text{sen}\theta \left( \frac{1+\mu}{1+\cos\theta} - \cos\theta \right)}{\text{tg}\theta}$$


---


$$\eta = K(1+\mu) \cdot \left[ \ln(1+\cos\theta) - \frac{1}{1+\cos\theta} \right] + C - K \cdot \cos\theta \left( \frac{1+\mu}{1+\cos\theta} - \cos\theta \right)$$

El objetivo de esto es determinar la constante (C) que depende de las condiciones de borde que tengamos en los apoyos, luego en nuestro caso particular para  $\theta=90^\circ$ , el ( $\eta$ ) debe ser cero, porque no puede haber descenso en los puntos del contorno, debido a la condición de apoyo que tienen (apoyo simple no permite desplazamiento vertical).

$$\eta = 0 = K(1+\mu)(-1) + C \quad \therefore \quad \boxed{C = K(1+\mu)}$$

El valor de esta constante lo reemplazamos en la expresión anterior y tenemos la expresión analítica del corrimiento ( $\eta$ ).

$$\eta = K(1+\mu) \left[ \ln(1+\cos\theta) - \frac{1}{1+\cos\theta} \right] + K(1+\mu) - K \cdot \cos\theta \left[ \frac{1+\mu}{1+\cos\theta} - \cos\theta \right]$$

Con esta expresión podemos calcular los corrimientos para cualquier punto conociendo el valor de  $\theta$ , así por ejemplo para  $\theta=0^\circ$  tendríamos el corrimiento en el vértice.

Determinación de ( $\varphi$ )

$$\frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} = K \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} \left[ \frac{1+\mu}{1+\cos\theta} - \cos\theta \right] = K \left[ \frac{1+\mu}{1+\cos\theta} - \cos\theta \right]$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) = K \left[ \frac{(1+\mu)\text{sen}\theta}{(1+\cos\theta)^2} + \text{sen}\theta \right] = K \text{sen}\theta \left[ \frac{1+\mu}{(1+\cos\theta)^2} \right] + 1$$

luego:

$$\varphi = \frac{1}{R} \left[ K \text{sen}\theta \left( \frac{1+\mu}{(1+\cos\theta)^2} + 1 \right) - K \frac{(1+\mu)}{\text{tg}\theta} \left( \cos\theta - \frac{2}{1+\cos\theta} \right) \right]$$

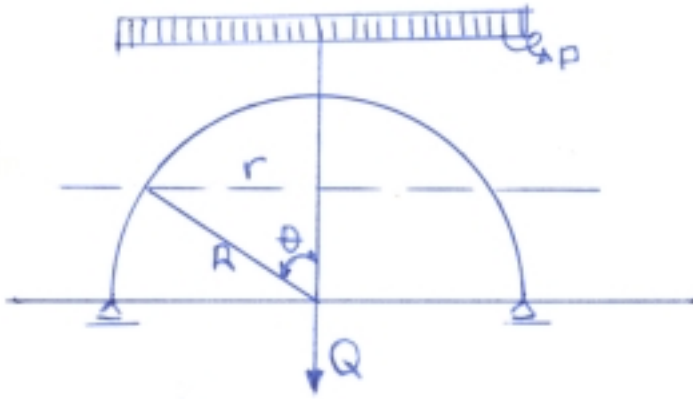
Estos valores nos interesan más adelante para resolver los casos de perturbaciones de borde que aparecen.

Para el caso del contorno tenemos:  $\theta=90^\circ$  ;  $\text{tg}\theta = \infty$

$$\varphi_c = \frac{1}{R} [K[(1+\mu)+1]] = \frac{K}{R} (2+\mu)$$

$$\varphi_c = \frac{K}{R}(2 + \mu)$$

CASO DE CARGA UNIFORME: por ejemplo carga de nieve (figura N°2).



Recordando que:

$$Q = p \cdot \pi \cdot r^2$$

$$S_1 = -\frac{p \cdot \pi \cdot r^2}{2\pi \cdot r \cdot \text{sen}\theta} = -\frac{p \cdot \pi \cdot r}{2\pi \cdot \text{sen}\theta}$$

como  $r = R \text{sen}\theta$

$$S_1 = -\frac{p \cdot R \text{sen}\theta}{2 \cdot \text{sen}\theta} = -p \frac{R}{2}$$

$$S_1 = -p \frac{R}{2}$$

$$S_2 + S_1 = Z \cdot R = -p \cdot R \cos^2 \theta$$

$$S_2 = -p \cdot R \cos^2 \theta + p \frac{R}{2} = p \frac{R}{2} (1 - 2 \cos^2 \theta)$$

$$S_2 = p \frac{R}{2} (1 - 2 \cos^2 \theta)$$

Calculo de ( $\epsilon$ ):

$$\epsilon = \frac{R \text{sen}\theta}{E_s} (S_2 - \mu S_1) = \frac{R \text{sen}\theta}{E_s} \left[ p \frac{R}{2} (1 - 2 \cos^2 \theta) + \mu \cdot p \frac{R}{2} \right]$$

$$\epsilon = p \frac{R^2 \text{sen}\theta}{2 \cdot E_s} [1 + \mu - 2 \cos^2 \theta]$$

Nos interesa el ( $\epsilon$ ) en el contorno, luego:  $\theta = 90^\circ$

$$\varepsilon_c = \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot E_s} (1 + \mu)$$

Calculo de ( $\eta$ ): Debemos calcular la función  $f(\theta)$  para estos nuevos valores:

$$f(\theta) = \frac{R}{E_s} (1 + \mu) [S_1 - S_2] = \frac{R(1 + \mu)}{E_s} \left[ -p \frac{R}{2} - p \frac{R}{2} (1 - 2 \cos^2 \theta) \right]$$

$$f(\theta) = \frac{R}{E_s} (1 + \mu) \left[ -p \frac{R}{2} \right] [1 + 1 - 2 \cos^2 \theta]$$

$$f(\theta) = \frac{R}{E_s} (1 + \mu) \left[ -p \frac{R}{2} \right] 2 [1 - \cos^2 \theta] = -p \frac{R^2}{E_s} (1 + \mu) \text{sen}^2 \theta$$

luego:

$$\frac{f(\theta)}{\text{sen} \theta} = -\frac{pR^2}{E_s} (1 + \mu) \frac{\text{sen}^2 \theta}{\text{sen} \theta} = -p \frac{R^2}{E_s} (1 + \mu) \text{sen} \theta$$

llamando:  $B = \frac{pR^2}{E_s}$

$$\frac{f(\theta)}{\text{sen} \theta} = -B(1 + \mu) \text{sen} \theta \quad \text{luego la integral será:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{f(\theta)}{\text{sen} \theta} d\theta &= \int -B(1 + \mu) \text{sen} \theta \cdot d\theta = (1 + \mu) \int -B \text{sen} \theta \cdot d\theta \\ &= (1 + \mu) B \cos \theta \end{aligned}$$

por lo tanto el valor de ( $\eta$ ) será:

Cálculo de la constante C para  $\theta=90^\circ$ ,  $\eta=0$ , luego:  $C=0$

$$\eta = (1 + \mu) B \cos \theta - \frac{B}{2} \cos \theta [(1 + \mu) - 2 \cos^2 \theta]$$

$$\eta = B \cos \theta \left[ (1 + \mu) - \frac{(1 + \mu)}{2} + \cos^2 \theta \right] = B \cos \theta \left[ \frac{1 + \mu}{2} + \cos^2 \theta \right]$$

Reemplazando B por su igual tendremos la expresión general:

$$\eta = \frac{pR^2}{E_s} \cos \theta \left[ \frac{1 + \mu}{2} + \cos^2 \theta \right]$$

Si quisiéramos conocer el descenso en el vértice será para  $\theta=0^\circ$

$$\eta_v = \frac{pR^2}{E_s} \left( \frac{1 + \mu}{2} + 1 \right) = \frac{pR^2}{E_s} \left( \frac{3 + \mu}{2} \right)$$

El descenso en el contorno es cero debido a la condición de apoyo (apoyo simple no permite desplazamiento nada más que en una dirección).

### Calculo de la rotación

$$\varphi = \frac{1}{R} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) - \frac{f(\theta)}{\text{tg}\theta} \right]$$

$$\frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} = \frac{pR^2}{2Es} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} (1 + \mu - 2\cos^2 \theta) = \frac{B}{2} (1 + \mu - 2\cos^2 \theta)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen}\theta} \right) = \frac{B}{2} [0 - 2 \times 2 \cos \theta (-\text{sen}\theta)] = \frac{B}{2} 4 \cos \theta \cdot \text{sen}\theta = B \cdot \text{sen}2\theta$$

$$\frac{f(\theta)}{\text{tg}\theta} = \frac{-B(1 + \mu)\text{sen}^2\theta}{\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}} = -B(1 + \mu)\cos\theta \cdot \text{sen}\theta = -B(1 + \mu)\frac{\text{sen}2\theta}{2}$$

luego:

$$\varphi = \frac{1}{R} [B\text{sen}2\theta + B(1 + \mu)\text{sen}2\theta]$$

$$\varphi = \frac{1}{R} \left[ 1 + \frac{1 + \mu}{2} \right] B\text{sen}2\theta = \frac{B}{R} \text{sen}2\theta \left( \frac{2 + 1 + \mu}{2} \right)$$

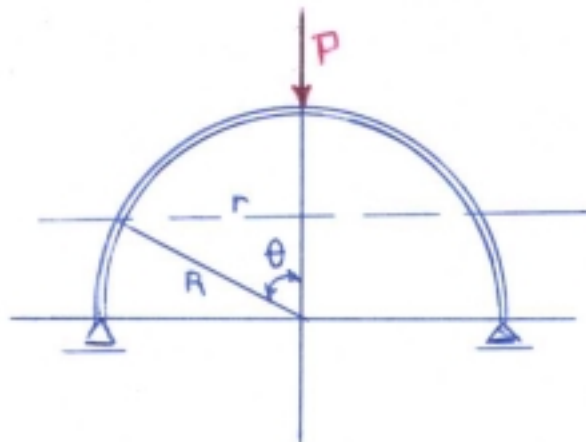
$$\boxed{\varphi = \frac{B}{R} \text{sen}2\theta \left( \frac{3 + \mu}{2} \right)} \quad \text{Expresión general}$$

Lo que nos interesa es ( $\varphi$ ) en el contorno, luego: para  $\theta = 90^\circ$   $\text{sen}2\theta = 0$ .

$\boxed{\varphi_c = 0}$  Cuando existe una carga uniforme sobre la cúpula, no hay rotación de la esfera.

### CASO DE UNA CARGA CONCENTRADA

Supongamos una cúpula sometida a una carga concentrada P en el vértice (figura N°3).



El esfuerzo  $S_1$  en este caso particular vale:



$$S_1 = \frac{-P}{2\pi \cdot R \cdot \text{sen}^2 \theta}$$

$$S_2 + S_1 = Z \quad : \quad Z = 0$$

$$S_2 = -S_1$$

$$S_2 = \frac{P}{2\pi \cdot R \cdot \text{sen}^2 \theta}$$

**Calculo del corrimiento ( $\epsilon$ )**

$$\epsilon = \frac{R \text{sen} \theta}{E_s} (S_2 - \mu S_1) = \frac{R \text{sen} \theta}{E_s} \left[ \frac{P}{2\pi \cdot R \text{sen}^2 \theta} + \frac{\mu P}{2\pi \cdot R \text{sen}^2 \theta} \right]$$

$$\epsilon = \frac{R \text{sen} \theta}{E_s} \left[ \frac{P}{2\pi \cdot R \text{sen}^2 \theta} \right] (1 + \mu) = \frac{P(1 + \mu)}{E_s \cdot 2\pi \text{sen} \theta} = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\text{sen} \theta}$$

llamando:  $\lambda = \frac{P(1 + \mu)}{E_s \pi}$

$$\boxed{\epsilon = \frac{\lambda}{2 \text{sen} \theta}} \quad (11)$$

El valor de ( $\epsilon$ ) en el oontorno se obtiene para  $\theta = 90^\circ$ .

$$\epsilon_c = \frac{\lambda}{2} = \frac{P(1 + \mu)}{2\pi \cdot E_s}$$

**Calculo del corrimiento ( $\eta$ )**

Debemos calcular la función  $f(\theta)$

$$f(\theta) = \frac{R(1 + \mu)}{E_s} (S_1 - S_2) = \frac{R}{E_s} (1 + \mu) \left[ -\frac{P}{2\pi \cdot R \text{sen}^2 \theta} - \frac{P}{2\pi \cdot R \text{sen}^2 \theta} \right]$$

$$f(\theta) = \frac{R}{E_s} (1 + \mu) \left[ -\frac{P}{\pi \cdot R \text{sen}^2 \theta} \right] = -\frac{P(1 + \mu)}{E_s \cdot \pi} \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} = -\lambda \frac{1}{\text{sen}^2 \theta}$$

$$\frac{f(\theta)}{\text{sen} \theta} = -\frac{\lambda}{\text{sen}^3 \theta}$$

$$\int \frac{f(\theta)}{\text{sen} \theta} d\theta = \int -\frac{\lambda}{\text{sen}^3 \theta} d\theta$$

Esta integral se puede resolver haciendo el siguiente reemplazo:

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = t$$

luego el  $\text{sen} \theta$  vale:

$$\operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{luego:}$$

$$\operatorname{sen} \theta = 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 2 \frac{t}{1+t^2}$$

Ahora debemos calcular  $d\theta$ , luego:

$$\frac{\theta}{2} = \operatorname{arctg} t \quad ; \quad \theta = 2 \operatorname{arctg} t$$

$$d\theta = 2(d \operatorname{arctg} t) = 2 \frac{dt}{1+t^2}$$

Reemplazando estos valores en la expresión II tenemos:

$$\int \frac{f(\theta)}{\operatorname{sen} \theta} d\theta = - \int \frac{\lambda}{\left[ \frac{2t}{1+t^2} \right]^3} \frac{2dt}{1+t^2} = - \int \frac{\lambda(1+t^2)^3}{(2t)^3} \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{f(\theta)}{\operatorname{sen} \theta} d\theta = - \int \frac{\lambda(1+t^2)^2}{8t^3} 2dt = - \int \frac{\lambda(1+t^2)^2}{4t^3} dt$$

$$\int \frac{f(\theta)}{\operatorname{sen} \theta} d\theta = - \frac{\lambda}{4} \int \frac{1}{t^3} + \frac{2t^2}{t^3} + \frac{t^4}{t^3} dt = - \frac{\lambda}{4} \int \left( \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t \right) dt$$

$$\int \frac{f(\theta)}{\operatorname{sen} \theta} d\theta = - \frac{\lambda}{4} \left[ \frac{t^{-2}}{-2} + 2 \log t + \frac{t^2}{2} \right] = - \frac{\lambda}{4} \left[ 2 \log t + \frac{t^4 - 1}{2t^2} \right]$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t = \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad ; \quad t^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad ; \quad t^4 = \frac{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$t^4 - 1 = \frac{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} - \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{t^4 - 1}{2t^2} = \frac{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} - \cos^4 \frac{\theta}{2}}{2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right)} = \frac{(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2})(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2})}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

ya que:

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{4}$$

luego:

$$\frac{t^4 - 1}{2t^2} = -\frac{\cos\theta}{2\frac{\sin^2\theta}{4}} = \frac{-2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

es decir:

$$\int \frac{f(\theta)}{\sin\theta} d\theta = -\frac{\lambda}{4} \left[ 2\log t - 2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \right] = -\frac{\lambda}{4} 2 \left[ \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \right]$$

Reemplazando valores en la expresion de  $\eta$  tenemos:

$$\eta = -\frac{\lambda}{2} \left[ \left( \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \right] + C - \frac{\lambda \cos\theta}{2\sin^2\theta}$$

$$\eta = -\frac{\lambda}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{\lambda \cos\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\lambda \cos\theta}{2\sin^2\theta} + C = -\frac{\lambda}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C$$

Determinamos el valor de la constante C para  $\theta = 90^\circ$   $\eta = 0$   $C = 0$  luego:

$$\eta = -\frac{\lambda}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

Reemplazando  $\lambda$  tendremos la expresi3n general

$$\eta = -\frac{P(1+\mu)}{2\pi \cdot E_s} \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad \text{expresion general del corrimiento } \eta \text{ para carga}$$

concentrada.

#### Calculo de la rotacion $\varphi$

$$\varphi = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\sin\theta} \right) - \frac{f(\theta)}{\operatorname{tg}\theta} \right] \quad R_1 = R_2 = R$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\sin\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\lambda}{2\sin^2\theta} \right) = -\frac{4\lambda \sin\theta \cos\theta}{4\sin^4\theta} = -\frac{\lambda \cos\theta}{\sin^3\theta}$$

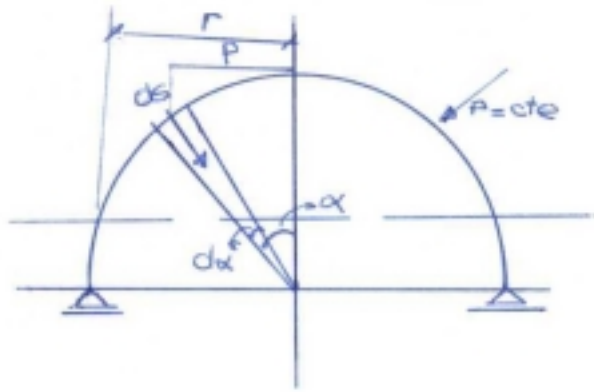
$$\varphi = \frac{1}{R} \left[ -\frac{\lambda \cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{\lambda}{\sin^2\theta \operatorname{tg}\theta} \right] = \frac{1}{R} \lambda \cos\theta \left[ -\frac{1}{\sin^3\theta} + \frac{1}{\sin^3\theta} \right] = 0$$

$$\boxed{\varphi = 0}$$

Lo que nos dice que no hay rotaci3n de la c3scara para el caso de tener una carga concentrada P.

### CUPULA SEMIESFERICA SOMETIDA A UNA PRESION RADIAL CONSTANTE

Vamos a determinar la expresi3n analitica de los descensos, corrimientos en sentido horizontal y la rotacion generica de una seccion cualquiera.



Recordando que:  $S_1 = \frac{-Q}{2\pi \cdot r \cdot \text{sen}\theta}$

La forma de calcular la carga Q para una presión constante es de la siguiente manera:

De un (ds) que abarca un (dα) ubicado a un ángulo (α) con respecto al eje vertical, luego considerando el área de revolución completa que corresponde al elemento ds (siendo p el radio) tenemos que el valor del área de rotación dA será:

$$dA = 2\pi r ds$$

Sobre esa área está actuando la presión constante (P) de dirección radial que proyectada en dirección vertical (pues lo que nos interesa determinar es Q) será:

$$dQ = P dA \cos \alpha = P 2\pi r ds \cos \alpha$$

Como:  $P = R \text{ sen}\alpha$        $ds = R d\alpha$       será

$$dQ = P \cdot 2\pi R \cdot \text{sen}\alpha \cdot R \cdot d\alpha \cdot \cos \alpha$$

$$dQ = P \cdot 2\pi R^2 \text{sen}\alpha \cdot d(\text{sen}\alpha)$$

$$Q = \int_0^\theta P \cdot 2\pi R^2 \text{sen}\alpha \cdot d(\text{sen}\alpha) = \frac{P \cdot 2\pi R^2 \text{sen}^2 \theta}{2}$$

luego:  $S_1 = -\frac{P \cdot \pi R^2 \cdot \text{sen}^2 \theta}{2\pi \cdot R \cdot \text{sen}^2 \theta} = -P \frac{R}{2}$

$$\boxed{S_1 = -P \frac{R}{2}}$$

Esto es justamente el valor del esfuerzo que corresponde a una cúpula esférica cuando hay una presión radial constante.

El otro esfuerzo  $S_2$  es:  $S_2 = Z R - S_1$

Para este caso particular  $Z = -P$  pues ya tiene la dirección radial y de sentido negativo luego:

$$S_2 = -PR + P \frac{R}{2} = -P \frac{R}{2}$$

$$\boxed{S_2 = -P \frac{R}{2}}$$

Es decir que los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  son iguales.  
La expresión de  $(\epsilon)$  habíamos dicho que era:

$$\epsilon = \frac{R \operatorname{sen} \theta}{E_s} (S_2 - \mu S_1) = \frac{R \operatorname{sen} \theta}{E_s} \left( -P \frac{R}{2} + \mu \cdot P \frac{R}{2} \right)$$

sacando factor comun nos queda:

$$\epsilon = -P \frac{R^2 \operatorname{sen} \theta}{2E_s} (1 - \mu)$$

Se puede calcular el  $(\epsilon)$  en el contorno de abajo.  
Con la expresión dada se puede calcular los  $(\epsilon)$  en cualquier punto.  
El  $\epsilon_c$  en el contorno vale para  $\theta = 90^\circ$ .

$$\epsilon_c = \frac{-PR^2(1-\mu)}{2E_s}$$

para este caso particular todos los esfuerzos son de compresión y el  $(\epsilon)$  tiene sentido hacia adentro. Es un corrimiento interno.

Calcularemos ahora  $(\eta)$  para ello tenemos que conocer primeramente  $f(\theta)$  cuya expresión era:

$$f(\theta) = \frac{R(1+\mu)}{E_s} (S_1 - S_2) = 0$$

Es igual a cero por cuanto  $S_1$  y  $S_2$  son iguales luego la expresión dada se anula.  
La expresión de  $(\eta)$  es:

$$\eta = \int f(\theta) \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta} + C - \frac{\epsilon}{\operatorname{tg} \theta} = C - \frac{\epsilon}{\operatorname{tg} \theta}$$

$$\eta = C + \frac{PR^2 \cos \theta}{2E_s} (1 - \mu)$$

La constante se determina para las condiciones de borde abajo es decir para  $\theta=90^\circ$  el valor de  $(\eta=0)$  para este caso luego:

$$C=0$$

La expresión final de  $\eta$  será:

$$\eta = P \frac{R^2 \cos \theta}{2E_s} (1 - \mu)$$

Se podría calcular entonces el descenso en el vertice. El descenso en el vertice se obtiene para  $\theta=0^\circ$  luego:

$$\eta_v = \frac{PR^2}{2E_s} (1 - \mu)$$

La rotación  $\phi$  se puede determinar usando la expresión:

$$\varphi = \frac{1}{R} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen } \theta} \right) - \frac{f(\theta)}{\text{tg } \theta} \right]$$

$\frac{f(\theta)}{\text{tg } \theta} = 0$  se anula por cuanto para este caso particular  $f(\theta) = 0$ .

Luego nos queda unicamente  $\varphi = \frac{1}{R} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen } \theta} \right) \right]$

pero tenemos que:  $\frac{\varepsilon}{\text{sen } \theta}$  pasa a ser una constante nos quedará:

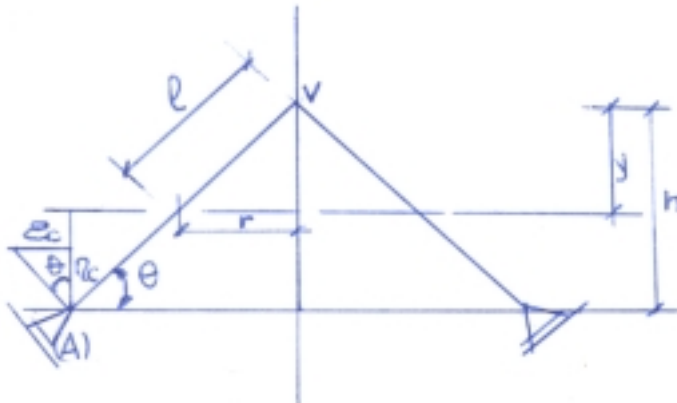
$$\frac{\varepsilon}{\text{sen } \theta} = -\frac{PR^2}{2Es} (1 - \mu)$$

Esto nos esta demostrando que:  $\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\varepsilon}{\text{sen } \theta} \right) = 0$

luego:  $\varphi = 0$  Es decir que no hay rotación para este caso particular.

### CUBIERTAS CONICAS: en regimen de Membrana

Regimen de membrana quiere decir que los apoyos tienen que ser adecuados para que se cumpla el regimen de membrana.



Un apoyo que desarrolle una reacción que produzca un esfuerzo normal en el extremo. El ángulo de inclinación es  $\theta$ . Ubicamos un plano a una distancia  $y$  del vértice superior.  
1) Influencia del peso propio: la carga  $Q$  que corresponde al peso propio vale:

$$Q = \pi r l s \gamma$$

$$\text{luego: } S = -\frac{\pi r l s \gamma}{2\pi \cdot r \text{sen } \theta} = -\frac{\gamma y}{2 \text{sen}^2 \theta} = A_y$$

$$l = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$S_1 = Ay \quad A = \frac{\gamma s}{2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \text{cte}$$

Esto nos dice que el valor del esfuerzo  $S_1$  varia en forma lineal respecto a la altura. El esfuerzo  $S_2$  vale:

$$S_2 = ZR_2 \quad \text{debido que } R_1 = \infty$$

$$Z = -\gamma s \cos \theta$$

$$S_2 = -\gamma s \cos \theta \frac{r}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$S_2 = -\gamma s c \operatorname{tg}^2 \theta \cdot y = B \cdot y$$

teniendo en cuenta que:  $r = y \cdot c \operatorname{tg} \theta$  ;  $B = -\gamma s c \operatorname{tg}^2 \theta$

tenemos:  $S_2 = B \cdot y$

Luego el esfuerzo  $S_2$  varia también linealmente con (y). Los esfuerzos maximos serán para  $y = h$ .

$$\varepsilon = \frac{r}{Es} (S_2 - \mu S_1) \quad \text{ponemos todo en funcion de } y$$

$$\varepsilon = \frac{y \operatorname{cot} g \theta}{Es} [B \cdot y - \mu \cdot Ay] = (B - \mu A) \frac{\operatorname{cot} g \theta}{Es} y^2 = D \cdot y^2 \therefore \varepsilon = D \cdot y^2$$

La expresion de  $\eta$  es:  $\eta = \int \frac{\varepsilon_1}{\operatorname{sen}^2 \theta} dy + C - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \theta}$

$$\varepsilon_1 = \frac{S_1}{Es} - \frac{\mu S_2}{Es} = \frac{1}{Es} (S_1 - \mu S_2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Es} (Ay - \mu By) = \frac{A - \mu B}{Es} y = Fy$$

$$\eta = \frac{Fy^2}{2 \operatorname{sen}^2 \theta} + C - Dy^2 \operatorname{cot} g \theta$$

La constante se puede determinar de la forma siguiente como tenemos un apoyo conico, recordando que: si el punto A tiene un corrimiento hacia afuera ( $\varepsilon_c$ ) el ( $\eta_c$ ) correspondiente es un ( $\eta$ ) negativo por cuanto es un ( $\eta$ ) para arriba luego: se cumple la condición que ( $\eta_c$ ) en el contorno es:

$$\eta_c = -\varepsilon_c \operatorname{cot} g \theta \quad \text{si } h \text{ es la altura total}$$

$$\eta_c = -Dh^2 \operatorname{cot} g \theta$$

para determinar la constante tenemos que para:  $y=h$   $\eta=\eta_c$

$$-Dh^2 \operatorname{cot} g \theta = \frac{F}{2 \operatorname{sen}^2 \theta} + C - Dh^2 \operatorname{cot} g \theta$$

$$C = -\frac{F}{2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

La expresion que nos da en definitiva el valor de ( $\eta$ ) es:

$$\eta = \frac{F}{2\text{sen}^2 \theta} (y^2 - h^2) - Dy^2 \cot g\theta$$

Con esta expresion podemos calcular ( $\eta$ ) en cualquier punto: para  $y=0$  se tiene ( $\eta$ ) en el vertice o sea el descenso del vertice:

$$\eta_v = -\frac{Fh^2}{2\text{sen} \theta}$$

$$\eta_v = -\frac{h^2}{2\text{sen}^2 \theta \cdot Es} [A - \mu B] = -\frac{h^2}{2Es \text{sen}^2 \theta} \left[ -\frac{\gamma s}{2\text{sen}^2 \theta} + \mu \gamma s \frac{\cos^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta} \right]$$

$$\eta_v = \frac{\gamma s h^2}{4Es \cdot \text{sen}^4 \theta} [1 - 2\mu \cos^2 \theta]$$

para el hormigón se puede tomar a  $\mu = 0,1$  a  $0,15$

por ejemplo para  $\theta = 60^\circ$

$$\eta_v = \frac{\gamma s h^2}{4Es \cdot 0,55} (1 - 2 \cdot 0,1 \cdot 0,25)$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2 = 2 \cdot 10^9 \text{ kg/cm}^2$$

$$\eta_v = 0,43 \frac{\gamma s h^2}{Es}$$

$$h = 5m$$

$$s = 0,10m$$

$$\eta_v = 0,43 \frac{\gamma h^2}{E} = 1,3 \cdot 10^{-5} m$$

El valor de  $\mu$  para el hormigón generalmente se desprecia por cuanto su influencia en los resultados es poca, dado que su valor es muy pequeño.

Valor muy pequeño, es un descenso insignificante. Estas estructuras son muy rígidas por la poca deformación que tienen.

DETERMINACION DE " $\phi$ ":



$$\varphi = \frac{d\varepsilon}{dy} - \frac{\varepsilon_1}{\operatorname{tg} \theta} = 2Dy - Fy \cdot c \operatorname{tg} \theta = (2D - Fc \operatorname{tg} \theta) \cdot y$$

$$\varphi = [2(B - \mu A)c \operatorname{tg} \theta - (A - \mu B)c \operatorname{tg} \theta] \frac{y}{E_s} = [2B - 2\mu A - A + \mu B] y \frac{c \operatorname{tg} \theta}{E_s}$$

$$\varphi = [B(2 + \mu) - A(1 + 2\mu)] y \frac{c \operatorname{tg} \theta}{E_s}$$

$$\varphi = - \frac{\gamma \cdot s}{E \cdot s \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta} y \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} [2(2 + \mu) \cos^2 \theta - (1 + 2\mu)]$$

$\varphi$  en el contorno y  $\theta = 60^\circ$

$$\varphi = - \frac{\gamma \cdot h \cdot 0,5}{E \cdot 1,32} (4,2 \cdot 0,25 - 1,2) = 0,057 \frac{\gamma h}{E} = 0,0000000342 \text{ m (valor muy pequeño)}$$

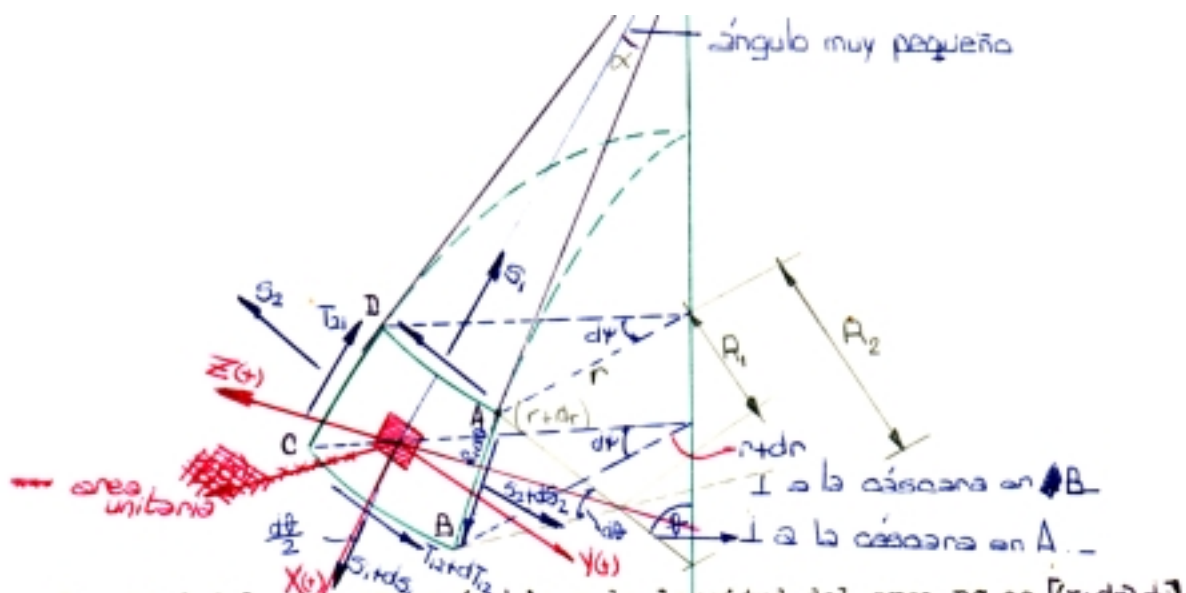
### MEMBRANAS DE REVOLUCION CON CARGAS NO SIMETRICAS

Hasta ahora hemos trabajado con cargas que tenían simetría radial y hemos utilizado las expresiones para obtener los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  y hemos visto que cuando se presentan cargas con simetría radial el esfuerzo tangencial, era igual a cero, ahora al considerar las cargas que no son simétricas veremos que los esfuerzos son distintos y que son: El esfuerzo en la dirección del meridiano ( $S_1$ ), en la dirección del paralelo ( $S_2$ ) y el esfuerzo tangencial que actúa en las caras del elemento considerado que lo designamos (T). Es decir que vamos a estudiar la membrana de revolución, considerando el elemento en la forma vista anteriormente (figura 1).

En la figura hemos considerado un arco de paralelo de radio (r) que abarca un ángulo  $d\psi$ , otro arco de paralelo de radio (r+dr) y que abarca el mismo ángulo  $d\psi$ .

El ángulo que forma el eje con la normal a la membrana es ( $\theta$ ) en el elemento considerado, y el radio será  $R_2$ .

Luego nosotros sabemos que el radio de curvatura que corresponde al meridiano forma entre sí con la normal en ese punto al meridiano un ángulo que llamamos ( $d\theta$ ) y el radio correspondiente es el radio  $R_1$ , radio de curvatura del meridiano, la longitud de este pequeño arco de meridiano  $R_1 d\theta$  (long. arco AB).



La longitud del arco AD es  $r d\psi$ ; y la longitud del arco BC es  $[(r+dr)d\psi]$ .

Los esfuerzos que vamos a tener son:

**Vamos a considerar 3 ejes de coordenadas en el centro del elemento. Un eje que coincide con la normal a la membrana que llamamos con (z).**

**Es decir que si sobre este elemento está actuando por ejemplo un sistema de fuerzas cualquiera, si tomamos la unidad de superficie del elemento, superficie unitaria  $1 \text{ cm}^2$  de cáscara, sobre dicho  $\text{cm}^2$  si tenemos una fuerza cualquiera, al descomponerla nos dará tres componentes. Una componente según la normal que llamamos (z), una componente según la tangente al meridiano que la llamamos (x) y una componente según la tangente al paralelo en dicho punto, que la llamamos (y).**

En otras palabras, si tenemos un área unitaria y sobre esta área unitaria actúa una fuerza, de cualquier dirección, pero que al descomponer esa fuerza según las 3 direcciones, tangente al paralelo, normal a la cáscara y tangente al meridiano, tendremos las componentes Z, X e Y, que son las 3 componentes de la fuerza según las 3 direcciones.

Sobre la cara AD del elemento que estamos considerando actúa un esfuerzo según la dirección de la tangente al meridiano que lo llamamos  $S_1$ .

En la cara opuesta o sea la CB, actuará también según la dirección de la tangente al meridiano en dicho punto un esfuerzo que vale  $(S_1 + dS_1)$ .

En la cara CD del elemento considerado, actúa en dirección de la tangente al paralelo en dicho punto el esfuerzo  $S_2$ , que es un esfuerzo perpendicular a la dirección del meridiano. En la cara opuesta es decir la cara AB actúa en dirección a la tangente al paralelo en dicho punto el esfuerzo que vale  $(S_2 + dS_2)$ .

Los esfuerzos tangenciales los designaremos de la siguiente manera:

Sobre la cara CD actúa un esfuerzo tangencial que lo llamamos  $T_{21}$ , que significa el esfuerzo que actúa sobre una cara que es normal a la dirección  $n^\circ 2$  (dado por el primer subíndice) y el  $2^\circ$  subíndice significa la dirección del esfuerzo, es decir que tiene la dirección del esfuerzo 1 de dicho elemento. Sobre la cara opuesta o sobre la cara AB actuará un esfuerzo tangencial similar a lo anterior, pero que vale  $T_{21} + dT_{21}$ .

Sobre la cara AD actúa un esfuerzo tangencial que lo designamos  $T_{12}$  (Que significa lo siguiente: el  $1^\circ$  subíndice expresa que actúa sobre una cara que es normal a la dirección del esfuerzo (1) y el  $2^\circ$  subíndice expresa que la dirección de dicho esfuerzo tangencial es la del esfuerzo (2).

Sobre la cara opuesta a la AD, es decir la BC actuará un esfuerzo tangencial que vale  $(T_{12} + dT_{12})$ .

Todas estas fuerzas deben estar en equilibrio. También se demuestra que los esfuerzos tangenciales son iguales (como se demuestra en el plano) en el paralelo y en el meridiano.

Este concepto se puede demostrar por ejemplo, tomando momentos de todas las fuerzas respecto del eje Z.

suma de momentos con respecto al eje  $z = 0$

De esta expresión se llega a la siguiente conclusión, las fuerzas exteriores todas están cortando al eje ( $z$ ) es decir que las 3 componentes X, Z e Y tienen momento cero.

También  $S_1$  y  $S_1 + dS_1$  cortan al eje ( $z$ ) luego los momentos de estas fuerzas con respecto al eje ( $z$ ) se anulan.

$S_2$  y  $S_2 + dS_2$  vemos que no cortan al eje ( $z$ ) pero al tomar momento vemos que son iguales y de sentido contrario, quedando solamente el momento de la fuerza ( $dS_2$ ) pero como consideramos un elemento diferencial, las distancias al eje de las fuerzas será un infinitésimo, luego el momento de la fuerza  $dS_2$  con respecto al eje ( $z$ ) será un infinitésimo de orden superior que lo despreciamos.

Luego lo único que nos queda son los momentos de las fuerzas tangenciales, que son: despreciando siempre los infinitésimos de orden superior.

Momentos de las fuerzas  $T_{21}$  y  $(T_{21} + dT_{21})$ , tenemos que formar un par, cuya distancia de acuerdo a la figura es (arco)  $(r * d\psi)$ , pero también debemos considerar que los esfuerzos  $T_{21}$  y  $(T_{21} + dT_{21})$  actúan en todo lo largo de la cara del elemento considerado, luego la longitud de la cara será  $(R_1 * d\theta)$  (arco).

Este par tiene signo positivo, pues su sentido es el de giro de la agujas del reloj. Luego la expresión queda, despreciando el infinitésimo de 2° orden

$$T_{21} R_1 d\theta r d\psi$$

El momento de las fuerzas  $T_{12}$  y  $(T_{12} + dT_{12})$  se analiza de manera análoga, pero el sentido del par es  $(-)$  pues es antihorario, luego:

$$T_{12} r d\theta R_1 d\psi$$

Realizando la sumatoria e igualando a cero tenemos:

$$\sum M = 0 = T_{21} * R_1 * d\theta * r * d\psi - T_{12} * r * d\theta * R_1 * d\psi = 0$$

$$T_{21} = T_{12}$$

**Nosotros vimos que cuando actuaban fuerzas simétricas bastaban solamente dos ecuaciones. Ahora para el caso que no hay simetría radial necesitamos tres ecuaciones, que son las siguientes:**

Las ecuaciones que necesitamos plantear son las ecuaciones de equilibrio sobre los tres ejes ( $z, x, y$ ).

**1) SUMATORIA DE LAS PROYECCIONES DE TODAS LAS FUERZAS SOBRE EL EJE X IGUAL A CERO**

$$\sum X = 0$$

En primer lugar tomamos la proyecciones de las fuerza. exteriores que la designamos con X, pero esta fuerza actúa por unidad de superficie, le la superficie considerada vale:

$$r * d\psi * R_1 * d\theta \quad \text{superficie del elemento}$$

Luego la proyección la fuerza exterior sobre el eje X vale:

$$\boxed{X * r * d\psi * R_1 * d\theta} \quad \square$$

2) Proyección del esfuerzo  $S_1$  sobre el eje (X).

La proyección de  $S_1$  es negativo, pues se proyecta negativamente y será:

$$-S_1 * r * d\psi * \cos \frac{d\theta}{2} \quad \boxed{1}$$

cos dθ/2 es el coseno de un ángulo infinitamente pequeño luego podemos considerar que:  
 $\cos d\theta / 2 = 1$

La protección de (S<sub>1</sub> + dS<sub>1</sub>) se proyecta positivamente sobre el eje (x) y será:

$$(S_1 + dS_1) * (r + dr) * d\psi * \cos \frac{d\theta}{2} \quad \boxed{2}$$

### Sumando (1) y (2) tenemos la proyección de sobre el eje (X)

$$\begin{aligned} & -S_1 * r * d\psi + (S_1 + dS_1) * (r + dr) * d\psi = \\ & -S_1 * r * d\psi + S_1 * r * d\psi + S_1 * dr * d\psi + r * dS_1 * d\psi + dS_1 * dr * d\psi = \\ & -S_1 * r * d\psi + S_1 * r * d\psi + [S_1 * dr + r * dS_1 + dS_1 * dr] * d\psi = \end{aligned}$$

al producto dS<sub>1</sub> \* dr lo despreciamos:

$$= -S_1 * r * d\psi + S_1 * r * d\psi + [S_1 * dr + r * dS_1] * d\psi$$

si analizamos el corchete vemos que:

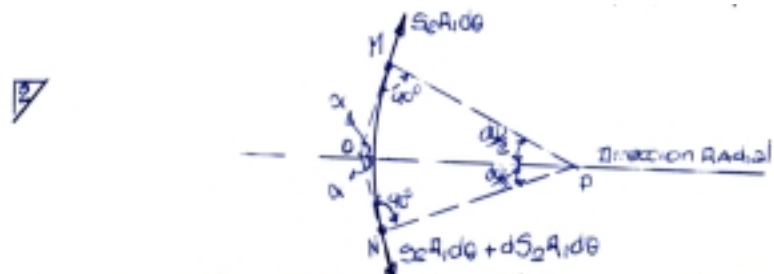
$$S_1 * dr + r * dS_1 = d(S_1 * r)$$

La proyección de S<sub>1</sub> sobre el eje (x) vale:

$$\boxed{d(S_1 * r) * d\psi} \quad \boxed{II}$$

### 3)Proyección del esfuerzo sobre el eje (X): para calcular la proyección de S<sub>2</sub> sobre el eje (X) procedemos de la siguiente manera:

Determinamos primera la resultante de las tuerzas S<sub>2</sub> y (S<sub>2</sub> + dS<sub>2</sub>), esta resultante será una resultante en dirección radial (figura 2)



proyectando en dirección radial a la dirección de curva al eje, nos va a dar como proyección como las S<sub>2</sub> son iguales va a dar:

$$2 * S_2 * R_1 * d\theta * \cos \alpha + dS_2 * R_1 * d\theta * \cos \alpha$$

Pero como en M y en N los lados (MO) y (MP) y (NO) y (NP) forman entre si 90°

respectivamente el coseno de alfa es igual al seno de  $d\psi/2$  o sea:

$$\cos \alpha = \text{sen} \frac{d\psi}{2} \quad \text{luego reemplazando:}$$

$$2 * S_2 * R_1 * d\theta * \text{sen} \frac{d\psi}{2} + dS_2 * R_1 * d\theta * \text{sen} \frac{d\psi}{2}$$

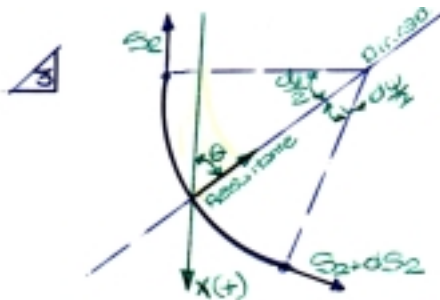
Pero como  $d\psi/2$  es un ángulo pequeño, el seno puede ser reemplazado por el ángulo  $d\psi/2$ , luego se tendrá:

$$2 * S_2 * R_1 * d\theta * d \frac{\psi}{2} + dS_2 * R_1 * d\theta * d \frac{\psi}{2} \quad (\text{se desprecian infinitésimos de orden superior}).$$

Luego:

$$(A) \quad 2 * S_2 * R_1 * d\theta * d \frac{\psi}{2} \quad \text{Este valor es la resultante en la dirección radial}$$

que ahora lo debemos proyectar sobre la dirección del eje (X), y el ángulo que forma la resultante con el eje (X) es  $(\theta)$  y el signo es menos (pues es contrario al sentido (+) de (X) (figura 3)



Luego:  
 $- S_2 * R_1 * d\theta * d\psi * \cos \theta$

Proyección de  $S_2$  sobre el eje X vale:

$$\boxed{- S_2 * R_1 * d\theta * d\psi * \cos \theta} \quad \text{III}$$

Ahora bien sobre el eje (X) la proyección de las fuerzas tangenciales  $T_{12}$  y  $(T_{12} + dT_{12})$  son cero, pues no tienen proyección por formar  $90^\circ$  entre las fuerzas y el eje.

#### 4) Proyección de $T_{21}$ y $(T_{21} + dT_{21})$ sobre el eje X

Si observamos la figura 1, vemos que al prolongar  $T_{21}$ ,  $(T_{21} + dT_{21})$  estas se cortan en un punto del eje, justamente con la prolongación de X, pues las tres son tangente al meridiano, luego la proyección de estas dos fuerzas valdrá:

Una tiene una dirección y la otra tiene dirección contraria, luego se anulan las  $(T_{21})$  y queda solamente la  $(dT_{21})$ , que será (+) por coincidir con el sentido positivo de X, luego será:

$$dT_{21} * R_1 * d\theta * \cos \alpha$$

como  $\alpha$  es un ángulo muy pequeño, su coseno vale 1:  $\cos \alpha \approx 1$

$$\boxed{dT_{21} * R_1 * d\theta} \quad \text{IV} \quad \text{proyección de } T_{21} \text{ sobre el eje X}$$

Con las expresiones I, II, III y IV podemos escribir la sumatoria general de las proyecciones sobre el eje X..

$$\sum X = 0 = X * r * d\psi * R1 * d\theta + d(S1 * r) * d\psi - S2 * R1 * d\theta * d\psi * \cos \alpha + dT21 * R1 * d\theta$$

□ ↗

pero a  $d(S_1 * r) * d\psi$  podemos escribirla de la siguiente manera:

Si observamos que tanto  $S_1$  como el radio ( $r$ ) varia unicamente con respecto a ( $\theta$ ) y no con respecto a ( $\psi$ ) me mantiene constante, así que la variación de  $S_1$  y  $r$  se produce exclusivamente debido a la variación de  $\theta$ , lo que nos permite que la diferencial se pueda escribir de la siguiente manera:

$$d(S1 * r) * d\psi = \frac{\partial}{\partial \theta} (S1 * r) * d\theta * d\psi$$

También si analizamos ( $dT21 * R1 * d\theta$ ), vemos que  $T21$  varia en función de ( $\psi$ ) luego podemos escribir como:

$$\frac{\partial T21}{\partial \psi} * d\psi * R1 * d\theta$$

Pero además como  $T21 = T12 = T$  reemplazamos:  $\partial T21 = \partial T$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} * d\psi * R1 * d\theta$$

reemplazando ambas expresiones en □ tenemos:

$$\sum X = 0 = X * r * d\psi * R1 * d\theta + \frac{\partial(S1 * r)}{\partial \theta} * d\theta * d\psi - S2 * R1 * d\theta * d\psi * \cos \theta + \frac{\partial T}{\partial \psi} d\psi * R1 * d\theta$$

ordenando tenemos:

$$\frac{\partial(S1 * r)}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \psi} * R1 - S2 * R1 * \cos \theta = -X * R1 * r \quad \square$$

primera ecuación diferencial deducida en base a las proyecciones de las fuerza. sobre el eje X.

## 2) PROYECCIÓN DE LAS FUERZAS SOBRE EL EJE Y

$$\sum Y = 0$$

1) Proyección de las fuerzas exteriores sobre el eje (y)

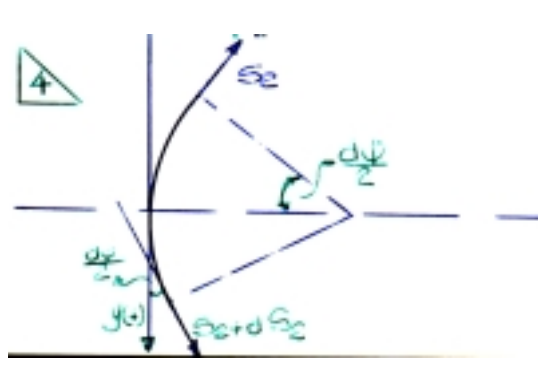
$$Y * R1 * d\theta * r * d\psi = 0 \quad \square$$

2) Proyección de  $S_1$  sobre el eje (y)

S1 no tiene proyección sobre el eje (y) debido a que S1 es tangente al meridiano y el eje (y) es tangente al paralelo y como forman entre sí 90° su proyección vale cero.

### 3) Proyección de S2 sobre el eje (Y)

Esta proyección es fácil de calcularla porque están en un mismo plano (figura 4), y como las proyecciones serán de signo contrario, las proyecciones de S2 se anulan quedando solamente la proyección de (dS2) que será de signo positivo, por coincidir con el sentido (+) de las (y) luego:



$$dS2 * R1 * d\theta * \cos \frac{d\psi}{2} = dS2 * R1 * d\theta$$

demos expresarla como:

$$\frac{\partial S2}{\partial \psi} * d\psi * R1 * d\theta \quad \text{III'}$$

Ya que dS2 varía respecto de (ψ)

### 4) Proyección de T12 sobre el eje (y)

Esta proyección se realiza con su valor, pues T12 es paralelo al eje (y) pero se anulan las T12 por tener signo contrario, quedando solamente (dT12) pues despreciando los infinitésimos de orden superior será:

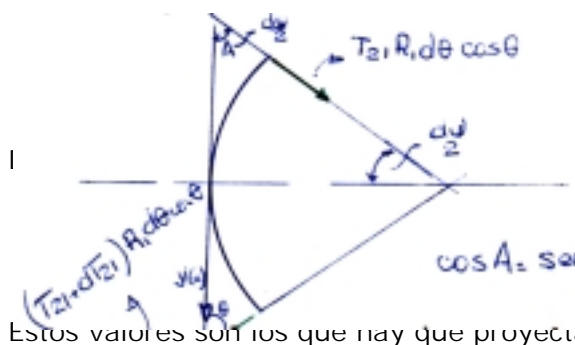
$$\begin{aligned} & -T12 * r * d\psi + (T12 + dT12) * (r + dr) * d\psi = \\ & = -T12 * r * d\psi + T12 * r * d\psi + T12 * dr * d\psi + dT12 * r * d\psi + dT12 * dr * d\psi = \\ & = d(T12 * r) * d\psi \end{aligned}$$

Que también se puede escribir

$$\frac{\partial (T * r)}{\partial \theta} * d\theta * d\psi \quad \text{IV'}$$

### 5) Proyección de T21.

Obtener esta proyección es bastante complejo, para simplificar podemos hacer lo siguiente: como T21 tiene la dirección de la tangente al meridiano, la proyectamos sobre el paralelo. Es decir que si proyectamos T21 sobre el plano del paralelo vamos a tener una proyección que va a tener la dirección del radio, pues es tangente al meridiano y se proyecta el valor:



$$T21 * R1 * d\theta * \cos \theta$$

e sentido contrario que será:

$$(T21 + dT21) * R1 * d\theta * \cos \theta$$

Estos valores son los que hay que proyectar sobre el eje (y).

Observamos que las proyecciones sobre el eje (y) tienen el mismo sentido, luego se tiene dos veces la proyección (T21) y (dT21) esta afectado por otro infinitésimo que se desprecia.

Luego la proyección será:

$$2 * T_{21} * R_1 * d\theta * \cos \theta * \cos A$$

pero  $\cos A = \sin d\psi/2$  ; pero como  $d\psi/2$  es muy pequeño:

$$\sin \psi / 2 \approx d\psi / 2 \quad 2 * T_{21} * R_1 * d\theta * \cos \theta * \frac{d\psi}{2} = T * R_1 * d\theta * d\psi * \cos \theta$$

proyección de T21 sobre el eje (y):  $T * R_1 * d\theta * d\psi * \cos \theta$   $\square \nabla$

**Realizando la sumatoria tenemos:**

$$\sum Y = 0 = \frac{\partial S_2}{\partial \psi} * d\psi * R_1 * d\theta + Y * R_1 * d\theta * r * d\psi + \frac{\partial(T * r)}{\partial \theta} * d\theta * d\psi + T * R_1 * d\psi * d\theta * \cos \theta = 0$$

$$\sum Y = 0 = \frac{\partial S_2}{\partial \psi} * R_1 + Y * R_1 * r + \frac{\partial(T * r)}{\partial \theta} + T * R_1 * \cos \theta = 0$$

Ordenando:  $\frac{\partial S_2}{\partial \psi} * R_1 + \frac{\partial(T * r)}{\partial \theta} + T * R_1 * \cos \theta = -Y * R_1 * r$  segunda ecuación.

La 3a. ecuación es la proyección sobre el eje z, veremos que vamos a llegar a la misma ecuación que habíamos obtenido para el caso de fuerzas simétricas es decir:

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = z$$

$$\sum Z = 0$$

Vemos que los esfuerzos tangenciales tienen proyección cero con respecto al eje (z) por estar contenidos en planos normales al eje (z)

1) La proyección de S1 sobre el eje (z) vale: Despreciando infinitésimos de orden superior tenemos:

$$2 * S_1 * r * d\psi * \sin \frac{d\theta}{2} = 2 * S_1 * r * d\psi * \frac{d\theta}{2}$$

$-S_1 * r * d\psi * d\theta$  proyección de S1.

2) Proyección de S2 sobre el eje (z):

Para proyectar sobre el eje (z) nos conviene 1º determinar la resultante en la dirección del radio y luego proyectar dicha resultante sobre el eje Z . La resultante ya la hemos calculado anteriormente (ecuación A).

$$S_2 * R_1 * d\theta * d\psi$$

Pero cuando la proyectamos sobre el eje (X) era por  $(\cos \theta)$  en cambio al proyectarla sobre el eje (z) será, por  $(\sin \theta)$  luego:



$$\boxed{-S2 * R1 * d\theta * d\psi * \text{sen}\theta}$$
 proyección de S2

La proyección de las fuerzas exteriores vale:

$$\boxed{Z * R1 * d\theta * r * d\psi}$$

Luego:

$$\sum Z = 0 = -S1 * r * d\psi * d\theta - S2 * R1 * d\theta * d\psi * \text{sen}\theta + Z * R1 * d\theta * r * d\psi$$

reemplazando  $r = R2 * \text{seno } \theta$  tenemos:

$$-S1 * R2 * d\psi * d\theta * \text{sen}\theta - S2 * R1 * d\theta * d\psi * \text{sen}\theta + Z * R1 * R2 * d\psi * d\theta * \text{sen}\theta = 0$$

$$-S1 * R2 * \text{sen}\theta - S2 * R1 * \text{sen}\theta + Z * R1 * R2 * \text{sen}\theta = 0$$

$$-S1 * R2 - S2 * R1 = -Z * R1 * R2$$

$$\boxed{\frac{S1}{R1} + \frac{S2}{R2} = Z}$$

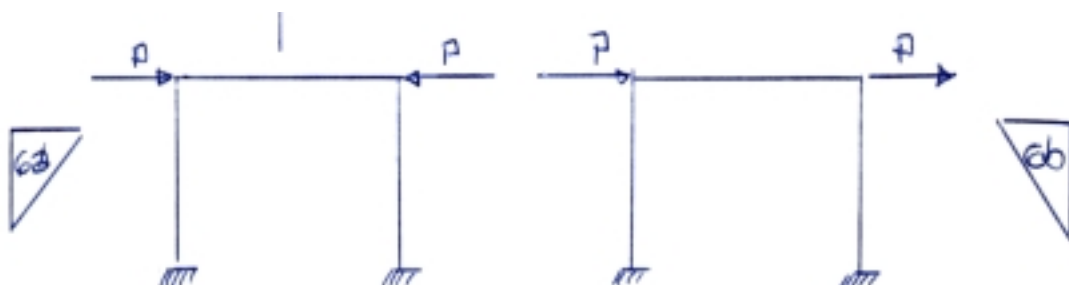
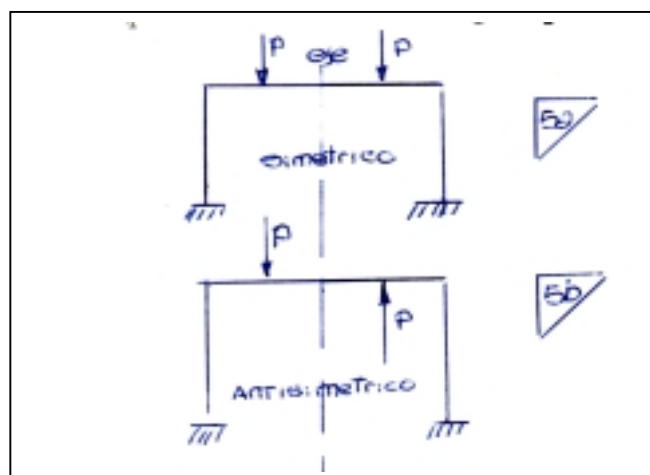
tercera ecuación.

Ahora bien con el sistema de 3 ecuaciones diferenciales con tres incógnitas se puede resolver el problema.

Nosotros vamos a evitar este trabajo pues es muy complicado, luego seguiremos un método más simplificado.

Dicha simplificación consiste en lo siguiente:

consideremos un estado de cargas que se llama antisimétrico y que responde a la siguiente característica. Por ejemplo si tenemos una estructura cualquiera (fig. 5a) respecto de un eje (1—1) tenemos cargas iguales recibe el nombre de simétrico, pero si en cambio tenemos el sistema de carga como lo indica la figura 5b, respecto del mismo eje tenemos que las fuerzas producen efectos distintos a los anteriores y recibe el nombre de antisimétrico. Otro caso es el que se indica en las figuras (6a) y (6b).



Si tomamos una cáscara y cortamos con un plano (p—p) veremos:

si dibujamos a la cáscara en planta, nos quedan determinados cuatro cuadrantes que designamos con I, II, III y IV. Como fuerza exterior podemos considerar una fuerza H por unidad de superficie, la unidad de superficie tomada es un punto, pues es una fuerza continua, que puede ser fuerza de viento, una fuerza de sismo se adapta a este sistema de cargas.

Justamente la fuerza de sismo se adapta a este sistema de cargas antisimétricas, por eso es una ventaja para la deducción de la fórmula.

En el caso de que actúa una fuerza (H) (figura 7), la podemos descomponer en una dirección radial y en una dirección tangencial según el eje (y). Recordemos que el eje (y) positivo tiene el sentido de los ángulos  $\psi$  crecientes.

Luego cuando (y) está en el I<sup>er</sup> cuadrante, y además formamos un cuadro con los signos de las 3 componentes de las fuerzas exteriores (X, Y, Z) para cada uno de los cuadrantes tendremos:

La (y) en el 1<sup>er</sup> cuadrante (figura 7) produce proyección positiva:

	I	II	III	IV	
Y	+	+	-	-	$y = y_0 \text{ sen } \psi$
X	-	+	+	-	$x = x_0 \text{ cos } \psi$
Z	-	+	+	-	$z = z_0 \text{ cos } \psi$

Lo que nos dice que en 1° cuadrante (y) es positivo.

Veamos ahora en el 2° cuadrante cuanto vale (y) descomponiendo siempre a H en una tangente y en una dirección radial; vemos que (y) tiene proyección positiva porque el eje (y) positivo siempre se toma en el sentido de los arcos crecientes. Luego en el 2° cuadrante la proyección de H da un valor de (y) positivo (+).

En el 3° cuadrante la (Y +) no coincide con el sentido de la proyección de H sobre la dirección tangencial, lo que nos determina que la proyección de H sobre el eje (y) es negativa.

Veamos ahora que pasa con las tres componentes (X) y (Z) esto se puede ver más fácilmente en la figura 8.

Sí tomamos una componente radial hacia el CENTRO, cuando la proyectamos después según la dirección (z) y (x) que tienen valores positivos hacia afuera y en el sentido de los arcos crecientes respectivamente.

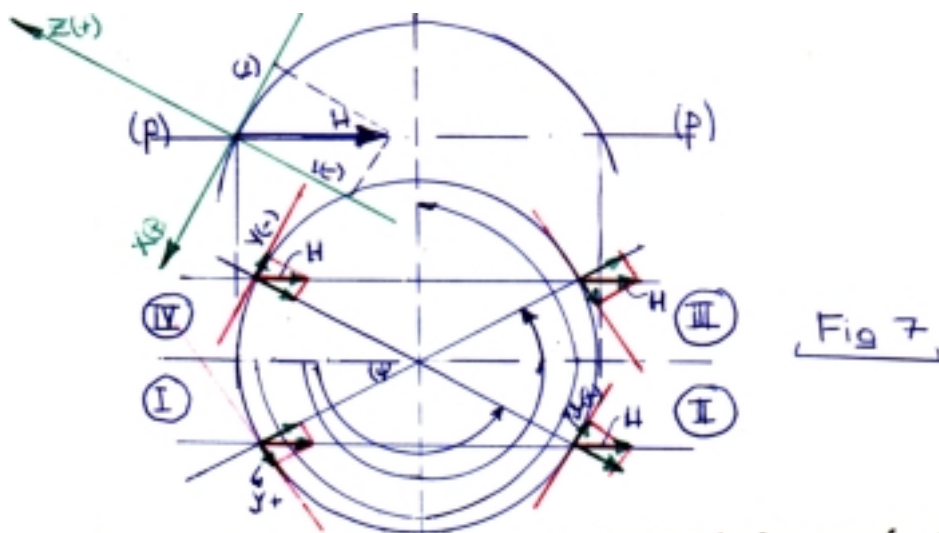


Fig 7

Vemos que en el 1° cuadrante la fuerza proyectada según x y según z serán negativa.

**En el 2° cuadrante la componente radial aparece hacia afuera en consecuencia las proyecciones sobre (x) y (z) serán de signo positivo.**

En el 3° cuadrante la componente radial es hacia afuera, luego las proyecciones sobre (x) y (z) serán positivas.

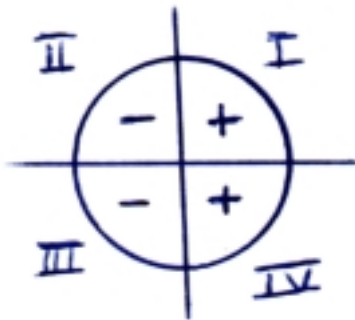
En el 4° cuadrante en cambio la componente radial va dirigida hacia el centro, luego las proyecciones serán negativas.

Esto pone en evidencia lo siguiente: Que la componente (y) sigue la ley del seno, puesto que en el 1° y 2° cuadrante las proyecciones son positivas y en el 3° y 4° cuadrante son negativas. Luego es factible expresar a esta componente por una función seno que será:

$$Y = Y_{\theta} * \text{sen} \psi$$

Es decir que varía con el seno del ángulo ( $\psi$ ), pero también puede depender del ángulo  $\theta$ , dependiendo de la posición del paralelo. Es por esto que se le afecta del factor  $Y_{\theta}$ .

La componente X sigue la ley de la función coseno porque es negativa en el 1° y 4° cuadrante y positiva en el 2° y 3° (cabe destacar que los cuadrantes de la función coseno se toman de la siguiente manera):



y que no se debe confundir con los cuadrantes indicados en la figura 7.

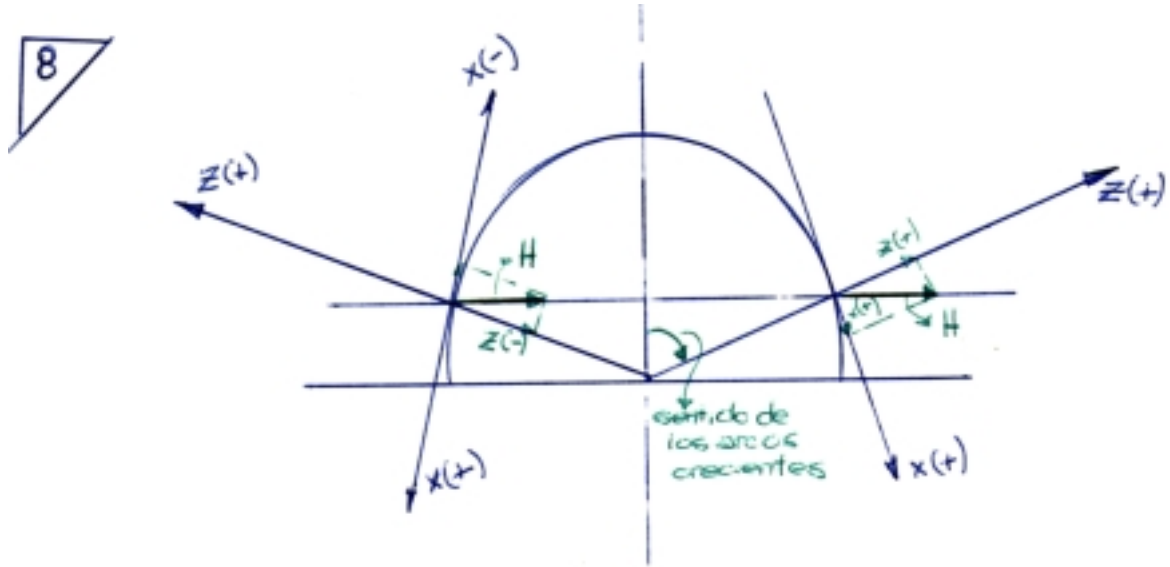
Es decir que podemos expresar:

$$X = X_{\theta} * \text{cos} \psi$$

También Z sigue la ley del Coseno:

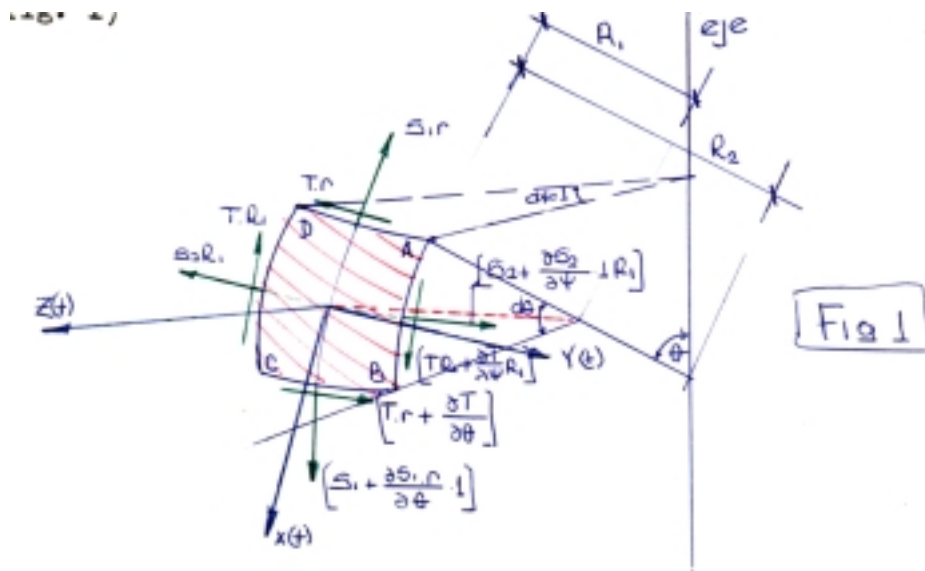
$$Z = Z_{\theta} * \text{cos} \psi$$

**Un sistema de cargas que puede seguir esta ley de variación se denomina antisimétrico.**



SÍNTESIS PARA OBTENER RAPIDAMENTE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DEDUCIDAS ANTERIORMENTE

Si consideramos el mismo elemento de la figura 1 vista anteriormente tenemos (fig. 1)



Nosotros consideraremos que el ángulo ( $d\psi$ ) tiene un valor unitario  $d\psi = 1$  y si también el ángulo  $d\theta$  le damos un valor unitario  $d\theta = 1$  va a ocurrir que a los lados de este elemento se tendrá:

Lado AD =  $r \cdot d\psi$  pero  $d\psi = 1 \Rightarrow AD = r = CB$

Lado AB = lado CD =  $R_1 \cdot d\theta$  pero  $d\theta = 1 \Rightarrow AB = CD = R_1$

**Si el esfuerzo por unidad de longitud es  $S_1$  el esfuerzo total será  $S_1 \cdot r$ .**

En la cara opuesta o sea CB se tendrá:  $(S1 * r + \frac{\partial(S1 * r)}{\partial \theta} * d\theta)$

pero  $d\theta = 1$  luego: 
$$S1 * r + \frac{\partial(S1 * r)}{\partial \theta}$$

Sobre la cara CD, el esfuerzo total será  $(S_2 * R_1)$ , y en la cara AB el esfuerzo vale:

$S2 * R1 + \frac{\partial(S2 * r1)}{\partial \psi} * d\psi$  pero como  $d\theta$  y  $d\psi$  son unitarios y además  $R1$  es constante en todo el elemento considerado podemos escribir:

$$S2 * R1 + \frac{\partial S2}{\partial \psi} * R1$$

Los esfuerzos tangenciales que actúa serán:  
Recordando que  $T_{21} = T_{12} = T$

Pero la cara CD, es  $T * R1$ , para la cara AB será:  $T * R1 + \frac{\partial T}{\partial \psi} * R1 * d\psi$

Pero  $d\psi = 1$  
$$T * R1 + \frac{\partial T}{\partial \psi} * R1$$

El esfuerzo tangencial sobre la cara AD será  $(T * r)$  y sobre la cara opuesta BC será:

$$T * r + \frac{\partial(T * r)}{\partial \theta} * d\theta$$

pero  $d\theta = 1$ , luego 
$$T * r + \frac{\partial(T * r)}{\partial \theta}$$

Luego las ecuaciones de proyección serán:

a) ecuación de proyección sobre la normal (z)  $\sum Z = 0$

1) Fuerzas exteriores:

el área =  $R1 * r$ , luego será:  $Z * r * R1$  proyección de las fuerzas exteriores

Sabemos que no hay proyección de los esfuerzos tangenciales sobre el eje (z), y las únicas proyecciones son las de  $S1$  y  $S2$  las proyecciones de las diferenciales resultan infinitésimos de orden superior, luego se desprecian, por lo tanto tenemos: proyección de  $S1$  sobre el eje (z) dará:

proyección negativa, pues está dirigida hacia adentro y será:

$$-2 * S1 * r * \text{sen} \frac{d\theta}{2}, \text{ pero como } \text{sen} \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$$

$d\theta = 1$  queda que:  $\text{sen} \frac{d\theta}{2} = \frac{1}{2}$  luego:

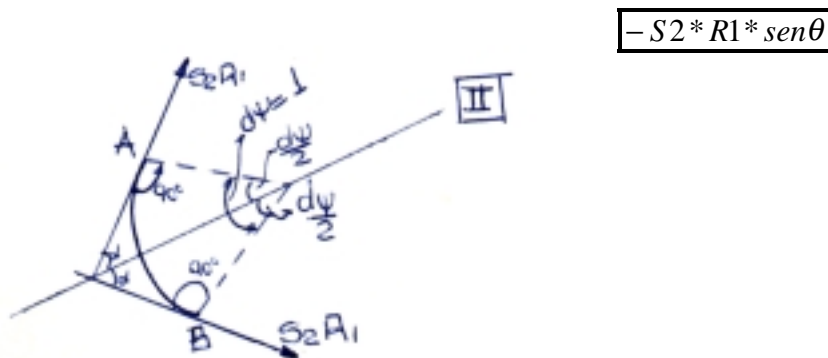
$$\boxed{-2 * S1 * r * \frac{1}{2} = -S1 * r}$$
 proyección de  $S_1$  sobre el eje (z).

proyección de  $S_2$  es también negativa por estar dirigida hacia adentro y vale:

$$-2 * S2 * R1 * \text{sen} \frac{d\psi}{2} \quad \text{pero como:} \quad \text{sen} \frac{d\psi}{2} = \frac{d\psi}{2} \quad \text{y } d\psi = 1$$

$$\boxed{-2 * S2 * R1 * \frac{1}{2} = -S2 * R1}$$
 Resultante de  $S_2$  sobre el plano horizontal.

La proyección de la resultante sobre el eje (z) vale:



La proyección de  $S_2$  se muestra en la figura 2 (II).

$$2 * S2 * R1 * \cos \alpha \quad \text{pero } \cos \alpha = \text{sen} \frac{\psi}{2}$$

Por ser los ángulos en A y B igual a  $90^\circ$  o sea por la condición de complementarios.

Luego la sumatoria de las proyecciones sobre el eje (z) son:

$$\sum Z = 0 = Z * r * R1 - S1 * r - S2 * R1 * \text{sen} \theta$$

reemplazando  $r = R2 * \text{sen} \theta$

$$\text{tenemos: } Z * R2 * R1 * \text{sen} \theta - S1 * R2 * \text{sen} \theta - S2 * R1 * \text{sen} \theta = 0$$

$$\text{ordenando: } Z * R2 * R1 * \text{sen} \theta = S1 * R2 * \text{sen} \theta - S2 * R1 * \text{sen} \theta$$

La proyección de  $S_2$  sobre el eje (x), es la proyección de la resultante sobre el plano horizontal (figura II) proyectada sobre el eje (x) que será:

$$-S_2 * R_1 * \cos \theta$$

Luego: 
$$\sum X = 0 = Z * R_1 * r + \frac{\partial(S_1 * r)}{\partial \theta} + \frac{\partial(T)}{\partial \psi} * R_1 - S_2 * R_1 * \cos \theta = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial(S_1 * r)}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \psi} * R_1 - S_2 * R_1 * \cos \theta = -X * R_1 * r} \quad 1^\circ \text{ ecuación de proyección}$$

c) Ecuación de proyección sobre la tangente al paralelo, eje (y):

$$\sum Y = 0$$

proyección de las fuerzas exteriores vale:  $Y * r * R_1$

Tenemos que  $S_1$  no tiene proyección pues forma  $90^\circ$  con la dirección del eje (y)  
Para  $S_2$  se anulan las proyecciones  $S_2 * R_1$  y queda solamente la derivada parcial.

$\frac{\partial(S_2)}{\partial \psi} * R$  multiplicado por el coseno de un ángulo muy pequeño que lo consideraremos igual a uno.

La proyección de (T) se anulan los  $(T * r)$  quedando solamente la derivada parcial:

$$\frac{\partial(T * r)}{\partial \theta}$$

para la proyección de  $X * T * R_1$  tenemos que:  
Como  $T * R_1$  tiene la dirección de la tangente al meridiano y si lo proyectamos sobre el plano del paralelo, la proyección que se obtiene tiene dirección radial.



Dicha proyección vale:  $T * R1 * d\theta * \cos\theta$  ; pero  $d\theta=1$  queda:  $T * R1 * \cos\theta$   
 Del otro lado tenemos otra proyección pero de sentido contrario que será:

$$(T * R1 + \frac{\partial T}{\partial \psi} * R1) * d\theta * \cos\theta$$

despreciando los infinitésimos de segundo orden y haciendo  $d\theta=1$  tenemos:

$$T * R1 * \cos\theta$$

Luego estos valores los debemos proyectar sobre el eje (y) que será:

$$2 * T * R1 * \cos\theta * \cos A = 2 * T * R1 * \cos\theta * \text{sen} \frac{\psi}{2} = 2 * T * R1 * \cos\theta * \frac{1}{2}$$

$$\boxed{T * R1 * \cos\theta}$$

Luego:

$$\sum Y = 0 = Y * r * R1 + \frac{\partial S2}{\partial \psi} * R1 + \frac{\partial (R * r)}{\partial \theta} + T * R1 * \cos\theta$$

$$\boxed{\frac{\partial S2}{\partial \psi} * R1 + \frac{\partial (T * r)}{\partial \theta} + T * R1 * \cos\theta = -Y * r * R1} \quad 2^\circ \text{ ecuación de proyección.}$$



## 2.1. Vasija vinaria de acero inoxidable

---

Aplicación de la teoría analítica de Odone Belluzzi

## Vasija vinaria de acero inoxidable

### Aplicación de la teoría analítica de Odone Belluzzi

#### Introducción

El presente trabajo tiene por objeto presentar los resultados obtenidos del análisis efectuado sobre un tanque metálico, así como también una breve explicación sobre el procedimiento desarrollado y la forma de utilizar la herramienta de cálculo empleada.

En este estudio se hizo uso de la teoría de Belluzzi sobre membranas curvas, ya que, debido al reducido espesor de la pared del tanque, las hipótesis que más adelante se explicarán pueden considerarse válidas.

#### Generalidades sobre la teoría de las membranas curvas

Las membranas son estructuras laminares delgadísimas, considerándose por ello desprovistas de rigidez a flexión y torsión. Por consiguiente, están sometidas en cada punto sólo a esfuerzos que actúan en el plano tangente; o sea, están desprovistas de momentos flectores y torsores y de esfuerzos cortantes perpendiculares a su superficie. En otros términos: las tensiones están uniformemente repartidas en el espesor de la membrana.

En las membranas planas la deformación elástica tiene una influencia importante sobre los valores de los esfuerzos y, por tanto, es necesario tenerla en cuenta. No siendo así, los esfuerzos resultarían ilimitados. En las membranas curvas las deformaciones elásticas no tienen influencia sensible sobre los esfuerzos (salvo que sean tan grandes que alteren notablemente la forma de la membrana). Por consiguiente, estas membranas se consideran inextensibles, aunque se tienen en cuenta los alargamientos cuando interesa el cálculo de las deformaciones.

Para calcular los esfuerzos en las membranas bastan las condiciones de equilibrio, por lo que el problema es estáticamente determinado (internamente). Y es particularmente sencillo en el caso, muy frecuente, de membranas con forma de superficie de revolución y cargadas con simetría axial. En los casos generales de fuerzas no simétricas o de membranas de forma cualquiera, el problema, aunque continúa siendo estáticamente determinado, requiere la solución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

En el caso de las losas curvas, que difieren de las membranas porque no son muy delgadas, y que, por consiguiente, resisten asimismo a flexión, el problema, estáticamente indeterminado (internamente), es mucho más complicado, tanto desde el punto de vista conceptual como desde el matemático. Sin embargo, también en el estudio de las losas curvas pueden utilizarse con buena aproximación los resultados válidos para las membranas, teniendo en cuenta por separado las acciones en el contorno, lo que permite sustituir cálculos muy largos y laboriosos por pocas operaciones simples.

## Esfuerzos internos en las membranas de revolución

Considérese un recipiente o depósito de chapa, o bien una cúpula muy delgada o una envolvente de tejido (globo) con forma de superficie de revolución de eje vertical como la que se muestra en la figura nro. 1.

La superficie puede ser de doble curvatura, o bien de simple curvatura cuando es cilíndrica o cónica. Sobre la pared actúan fuerzas igualmente dispuestas en todos los puntos de un mismo paralelo y variables generalmente de uno a otro. Pueden tener una componente X según la

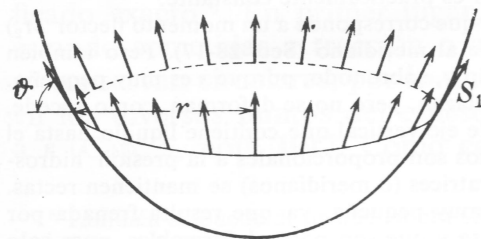


Figura nro. 1

tangente al meridiano y otra Z según la normal a la membrana, por unidad de área de ésta, siendo estas componentes funciones solamente de la ordenada del paralelo y no de la longitud del punto que se considera; esto es, son iguales para todos los meridianos y constantes a lo largo de los paralelos.

A lo largo de los meridianos existen tensiones  $\sigma_1$  dirigidas según la tangente al meridiano, provocadas por la resultante Q (vertical) de las fuerzas exteriores. Estas tensiones son nulas si lo es la resultante. A lo largo de los paralelos existen tensiones  $\sigma_2$  dirigidas según la tangente al paralelo, que están provocadas, sea por la componente Z de las fuerzas exteriores, sea por el hecho de que las tensiones  $\sigma_1$ , cambiando de dirección de punto a punto del meridiano (si éste es curvo), no están equilibradas entre sí y ejercen una acción radial sobre los paralelos (ver figura nro. 2-a). Las  $\sigma_2$  existen también si es nula la componente Z de las fuerzas exteriores, en cuyo caso se deben sólo a la segunda causa. En el caso de membranas cónicas, si en un cierto entorno no actúan fuerzas exteriores, las  $\sigma_1$ , que no cambian de dirección, resultan equilibradas entre sí (figura nro. 2-b), teniéndose, por consiguiente,  $\sigma_2 = 0$ . Así, en este caso, las  $\sigma_2$  están producidas sólo por las eventuales fuerzas exteriores Z.

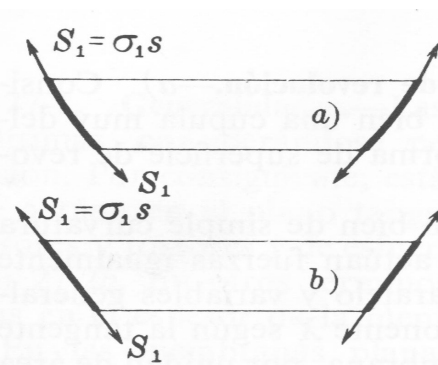


Figura nro. 2

Las  $\sigma_1$  se transmiten a través de las secciones normales a los meridianos, o sea, producidas por superficies cónicas coaxiales con la membrana y normales a ésta. Las  $\sigma_2$  se transmiten a través de las secciones producidas por planos meridianos.

Por razones de simetría, en las secciones según los meridianos o paralelos son nulas las tensiones  $\tau$  (en el plano tangente); en otros términos: dos gajos contiguos se comportan del mismo modo y, por consiguiente, no se transmiten tensiones  $\tau_{21}$ . De donde, por el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, son nulas también las tensiones  $\tau_{12}$  en las secciones según los paralelos

(o bien porque las fuerzas exteriores X y Z tienen momento nulo respecto al eje de revolución).

Supóngase que el espesor  $s$  sea muy pequeño; esto es, que el comportamiento sea el de una membrana. Admítase, por consiguiente, que tanto  $\sigma_1$  como  $\sigma_2$  están uniformemente repartidas en el espesor  $s$ ; ésta es la hipótesis que se utiliza como fundamento del estudio de los depósitos o cúpulas delgadas en cuestión. En general esto se justifica asumiendo que el espesor  $s$  es tan

pequeño que resulta lícito desprestigiar la rigidez a flexión. Sin embargo, es conveniente examinar con más atención su significado exacto. En primer lugar, las diversas franjas según los paralelos, estando sometidas a tracción o a compresión, modifican su radio  $r$ , pero se conservan circulares, por lo que la tensión  $\sigma_2$  puede suponerse constante en los diversos puntos del espesor, ya que éste es muy pequeño respecto a  $r$ . Como consecuencia de las variaciones  $\Delta r$  de los radios  $r$  de los diversos paralelos, las franjas según los meridianos pueden deformarse y, por consiguiente, su curvatura modificarse en algún punto, lo que provoca tensiones  $\sigma_1'$  correspondientes a momentos flectores, variables linealmente en el espesor desde un máximo positivo a un máximo negativo de igual valor absoluto.

Las  $\sigma_1'$  se superponen a las tensiones  $\sigma_1$  de forma que las tensiones totales ya no resultan uniformemente repartidas. Sin embargo, las tensiones  $\sigma_1'$  son muy pequeñas, porque lo son las variaciones de curvatura del meridiano, pero sobre todo porque es pequeño el espesor  $s$ ; por consiguiente, son despreciables respecto a las  $\sigma_1$ , que por ello se mantienen prácticamente invariables, o sea, uniformemente repartidas en el espesor. En otros términos: el momento flector  $M_1$  es despreciable. Por tanto, la hipótesis en cuestión equivale a suponer despreciable la deformación de la estructura, o sea, a considerar ésta como una membrana indeformable, ya que en tal hipótesis no variaría el radio  $r$  de los paralelos ni la forma del meridiano, tanto más cuanto que en las membranas curvas el equilibrio subsiste incluso sin que se deformen, pues la componente normal  $Z$  de las fuerzas exteriores está equilibrada por las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , mientras que la componente vertical está equilibrada por la tensión  $\sigma_1$ .

Al ser despreciable el momento flector en las franjas meridianas, también lo es el esfuerzo cortante  $\tau$ , por consiguiente, la tensión  $\tau$  dirigida normalmente a la superficie media (esto es, a mitad del espesor) de la membrana.

En el caso de una membrana infinitamente flexible (tejido), los momentos flectores son nulos por no poder soportarlos.

Por consiguiente, en todo punto de la membrana se tiene un estado plano de tensiones, cuyo plano es el tangente en el punto a la superficie media de la membrana. Por razones de simetría, las tensiones principales vienen a ser las  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  indicadas ( $\tau_{21} = \tau_{12} = 0$ ); o sea, las direcciones principales son las tangentes al meridiano y al paralelo por este punto. Cualquier otra sección de la membrana, oblicua respecto al meridiano y al paralelo, está sometida a tensiones  $\sigma$  y  $\zeta \tau$  (situadas en el plano indicado) variables con la orientación de la sección. Sólo en el caso en que  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\sigma$  es constante y  $\tau$  nula en toda la sección.

En lugar de las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , se consideran frecuentemente sus resultantes  $S_1$  y  $S_2$ , correspondientes al espesor total  $s$  y a la unidad de ancho de una franja de membrana dirigida según el meridiano o el paralelo, que representan el esfuerzo normal en estas franjas. Evidentemente, se tiene

$$S_1 = \sigma_1 \cdot 1 \cdot s, \quad S_2 = \sigma_2 \cdot 1 \cdot s,$$

o sea que

$$\sigma_1 = S_1 / s, \quad \sigma_2 = S_2 / s.$$

A  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau$  se les llama tensiones de membrana, mientras que a  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $T = \tau \cdot 1 \cdot s$ , las denominaremos esfuerzos de membrana. Las dimensiones de los esfuerzos  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $T$  son  $[F] [L]^1$ .

Las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  (y, por consiguiente, también los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$ ) no dependen de la deformación de la pared; por tanto, el problema es estáticamente determinado; es decir, resoluble empleando exclusivamente las condiciones de equilibrio.

Cuando se conocen los valores de  $S_1$  y  $S_2$  y, por consiguiente, de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , las condiciones de resistencia son

$$\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2 \leq \sigma_{adm},$$

$$\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1 \leq \sigma_{adm}.$$

en que  $\nu$  y  $\sigma_{adm}$  son el módulo de Poisson y la tensión normal admisible respectivamente del material que constituye la membrana.

## Ecuaciones fundamentales de las membranas curvas cargadas con simetría radial

Supongamos que se corta la membrana por un plano horizontal genérico (o mejor, por una superficie cónica coaxial y normal a los meridianos) y que sustituimos la parte situada por encima por los esfuerzos  $S_1$  transmite a la situada por debajo. La componente vertical de  $S_1$  es  $S_1 \cdot \sin \theta$  (figura nro. 1), si  $\theta$  (colatitud) es el ángulo que la tangente al meridiano forma con el plano horizontal (o que la normal a la membrana forma con el eje de simetría). Por consiguiente, si  $r$  es el radio del paralelo correspondiente a la sección que se ha practicado, la suma de las componentes verticales de las  $S_1$  a lo largo del paralelo es  $S_1 \cdot \sin \theta \cdot 2\pi r$ . Indiquemos con  $Q$  la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la parte inferior de la membrana. Por la simetría de las fuerzas,  $Q$  es vertical. El equilibrio en dirección vertical exige que se tenga

$$S_1 \cdot \sin \theta \cdot 2\pi r = Q,$$

de donde

$$S_1 = Q / (2\pi r \cdot \sin \theta).$$

La ecuación anterior determina  $S_1$  independientemente de  $S_2$ . En el caso de las cúpulas, la superficie está invertida y el esfuerzo  $S_1$  resulta de compresión.

El cálculo de  $S_2$  puede realizarse a partir de la relación matemática que vincula los esfuerzos de membrana con sus respectivos radios de curvatura; ésta es

$$S_1 / R_1 + S_2 / R_2 = Z,$$

por lo tanto

$$S_2 = (Z - S_1 / R_1) \cdot R_2$$

siendo  $R_1$  y  $R_2$  los radios de curvatura instantáneos del meridiano y del paralelo respectivamente y  $Z$  la componente instantánea (positiva hacia fuera) según la dirección de la normal a la superficie media de la membrana.

Cuando los líquidos en general forman parte de las acciones exteriores, se debe considerar el efecto que las presiones  $p = \gamma_l \cdot V$ , normales a la superficie de la membrana, tienen en los valores de  $Q$  y de  $Z$ , siendo  $\gamma_l$  y  $V$  el peso específico y el volumen de la masa de líquido involucrada.

## Comentarios y explicaciones sobre el programa de cálculo

El cálculo de las solicitaciones del tanque en estudio ha sido realizado en Microsoft Excel mediante el empleo de un conjunto de fórmulas, derivadas de la teoría anteriormente explicada, que han sido modificadas para facilitar su utilización.

El programa permite estudiar los efectos producidos por las siguientes acciones exteriores:

- **Peso propio**
- **Líquidos**

Para obtener las solicitaciones debidas al peso propio exclusivamente basta con asignar al nivel de agua o al peso específico de la misma el valor cero. En cambio, si se pretenden conocer los esfuerzos generados sólo por la acción de líquidos basta con anular el valor del peso específico del material.

d **MATERIALES.**

<b>ACERO INOXIDABLE</b>			
<b>Propiedad</b>	<b>Símb.</b>	<b>Unidad</b>	<b>Valor</b>
<b>Peso específico</b>	$\gamma$	[kN/m <sup>3</sup> ]	78
<b>Módulo de elasticidad</b>	$E$	[MPa]	210000
<b>Módulo de Poisson</b>	$\nu$	[adim.]	0,25
<b>Tensión admisible</b>	$\sigma_{adm}$	[MPa]	140

<b>AGUA</b>			
<b>Propiedad</b>	<b>Símb.</b>	<b>Unidad</b>	<b>Valor</b>
<b>Peso específico</b>	$\gamma_l$	[kN/m <sup>3</sup> ]	9800

A continuación se muestran las seis tablas de entrada que se utilizan para el ingreso de datos en Excel. La tabla I, como puede observarse, hace referencia a las características del acero interviniente, como por ejemplo su peso específico, su módulo de elasticidad, etc. La tabla II permite el ingreso del peso específico del agua contenida en el interior del tanque. Es conveniente aclarar que todos los valores deben introducirse en las unidades indicadas, correspondientes al Sistema Internacional.

Las celdas sombreadas en gris contienen valores que deben ser introducidos obligatoriamente por el usuario. En cambio, aquellas cuyo fondo es de color amarillo presentan dos alternativas: si en la celda se escribe, ya sea en mayúsculas o minúsculas, la abreviatura “pd”, automáticamente Excel adopta un valor por defecto (pd). Este valor depende del de parámetro al cual se asigna según se describe a continuación:

- **Nivel de agua desde el fondo del tanque:** Si en esta celda se escribe “pd”, Excel adopta como nivel de agua la altura correspondiente al límite entre la zona de encuentro del cono superior y el cilindro. En cambio, si se asigna un valor determinado, será éste el que Excel utilice para el cálculo.
- **Espesores de cono superior, cilindro y cono inferior:** La abreviatura “pd” indicará a Excel que adopte como espesor el asignado al tanque en general en la tabla III. De lo contrario, el cálculo será realizado con el valor indicado.
- **Diámetro inferior del cono superior y diámetro superior del cono inferior:** “pd” indicará a Excel que asigne a estas celdas el diámetro del cilindro; por el contrario, un valor determinado permitirá modificar estas dimensiones independientemente del diámetro del cilindro. Esta alternativa podría utilizarse, por ejemplo, para la verificación de un cono o tronco de cono apoyado en su extremo inferior sometido a la acción del peso propio; o bien, para el cálculo de un cono o tronco de cono sostenido por su extremo superior bajo la acción del peso propio, agua, o una combinación de ambos.

Las celdas que no se encuentran sombreadas no pueden ser modificadas por el usuario, ya que

### DIMENSIONES DEL TANQUE

Dimensiones	Símb.	Unidad	Valor
Espesor	$s$	[mm]	2,5
Diámetro superior	$\phi_{As}$	[mm]	510
Diámetro del cilindro	$\phi_c$	[mm]	3.100
Diámetro inferior	$\phi_{Ai}$	[mm]	100
Altura del cono superior	$H_s$	[mm]	525
Altura del cilindro	$H_c$	[mm]	2.997
Altura del cono inferior	$H_i$	[mm]	457
Altura de la zona superior de empalme	$h_s$	[mm]	143
Radio del empalme superior	$R_s$	[mm]	150
Altura de la zona inferior de empalme	$h_i$	[mm]	146
Radio del empalme inferior	$R_i$	[mm]	150
Nivel de agua desde el fondo del tanque	$N$	[mm]	pd
Volumen de agua	$V$	[hl]	243,80
Altura total del tanque	$H$	[mm]	3.979
Peso total del tanque	$P$	[kN]	9,09
Altura del punto de apoyo desde el f. d. t.	$y_v$	[mm]	300

TABLA III

CONO SUPERIOR			
Dimensiones	Símb.	Unidad	Valor
Pendiente del tronco de cono	$\theta_s$	[grados]	17,79
			0,00
Diámetro inferior	$\phi_{Bs}$	[mm]	pd
Diámetro límite del tronco de cono	$\phi_{Ds}$	[mm]	2892
Espesor	$s_s$	[mm]	pd
Peso total	$P_s$	[kN]	1,73

TABLA IV

CILINDRO			
Dimensión	Símb.	Unidad	Valor
Espesor	$s_c$	[mm]	pd
Peso total	$P_s$	[kN]	5,69

TABLA V

CONO INFERIOR			
Dimensión	Símb.	Unidad	Valor
Pendiente del tronco de cono	$\theta_i$	[grados]	167,34
			0,00
Diámetro superior	$\phi_{Bi}$	[mm]	pd
Diámetro límite del tronco de cono	$\phi_{Di}$	[mm]	2866
Espesor	$s_i$	[mm]	pd
Peso total	$P_i$	[kN]	1,66

TABLA VI

las mismas forman parte de la rutina de cálculo. Sus valores pueden leerse, pero no modificarse.

La tabla III se refiere a la geometría del tanque en general, así como también a los parámetros que determinan la posición de sus vínculos, nivel y volumen de agua y peso de material. Esto también es válido para las tablas IV, V y VI, correspondientes, como a cada una de las tres partes que componen el tanque.

El sistema de referencia adoptado para el análisis consta de dos ejes perpendiculares entre sí, cuyo origen se encuentra ubicado en el punto de intersección entre el plano superior del tanque y el eje de simetría. El sentido del semieje horizontal positivo es hacia la derecha, mientras que el del semieje vertical del mismo signo es hacia abajo. El gráfico ubicado a la derecha de las tablas de entrada en Excel representa lo explicado.

## El algoritmo y los mensajes de advertencia

Si se observan las tablas de entrada correspondientes a los conos superior e inferior, puede advertirse la presencia de un botón programable con la leyenda "Actualizar", en la fila titulada con el nombre "Pendiente del tronco de cono". El empleo de esta tecla permite que Microsoft Excel itere internamente, hasta que el valor de la celda inferior indicado con rojo, se aproxime, por debajo del error máximo permitido, a cero. Este algoritmo tiene por objeto resolver mediante iteraciones una ecuación que permite calcular el valor de la pendiente, en función de los valores introducidos como datos. El razonamiento que justifica este proceso es el siguiente: según puede

apreciarse en los planos del tanque, el encuentro circular entre los troncos de cono y el cilindro forma parte constituyente de los conos superior e inferior; esto quiere decir que los empalmes se realizan en las piezas extremas del tanque y no en el cilindro. Entonces, aceptando lo dicho, y conociendo los diámetros superior e inferior del tanque así como también los radios de empalme, es posible trazar una envolvente de éstos últimos, es decir, arcos de círculo. Por lo tanto, la inclinación de la pared de los conos estará determinada por la pendiente de la recta tangente a dicha envolvente que pasa por los puntos extremos de los diámetros superior e inferior. Ésta condición física puede expresarse matemáticamente mediante una ecuación que no puede resolverse en forma directa, ya que la incógnita (ángulo de inclinación) aparece tres veces en distintos términos.

Puede presentarse el caso de querer introducir como dato el ángulo de inclinación de la pared de los conos, especialmente en el cono inferior, ya que ésta viene condicionada fundamentalmente por necesidades funcionales. Para esto puede emplearse la función "Buscar objetivo" del menú "Herramientas" que Excel trae incorporada, la cual permite hallar el valor del radio de empalme en función del asignado al ángulo de inclinación.

En la tabla III existen tres parámetros que merecen especial atención. Éstos son los siguientes:

- 1) **Radio del empalme superior.**
- 2) **Radio del empalme inferior.**
- 3) **Altura del punto de apoyo desde el fondo del tanque.**

Al introducir los valores de los dos primeros, la vinculación matemática que existe entre las distintas variables que intervienen en el cálculo, genera un cambio en el valor de referencia para la aproximación (valor de color rojo). En consecuencia, si bien el resto de los valores se autocalculan, la solución física no es correcta, ya que tampoco lo es la inclinación de la pared de los conos no. Por lo tanto, para tener siempre presente la necesidad de iterar, en lugar de los títulos 1) y 2) aparece el mensaje "ACTUALIZAR PENDIENTE", el cual avisa que, como paso inmediato, debe pulsarse el botón programable. En el tercer caso sucede algo similar pero el concepto es diferente: cuando se introduce una altura del punto de apoyo, superior a la distancia que existe entre el fondo del tanque y el extremo superior del tronco de cono inferior, el programa no puede resolver el problema, apareciendo, como consecuencia el mensaje "VALOR EXCESIVO".

## Verificación de la geometría y limitaciones del programa

Una forma bastante simple de verificar la solución hallada por el algoritmo iterativo es la de graficar en un sistema de coordenadas ortogonales, los valores que adopta el radio del tanque en función de la altura. Este gráfico se encuentra ubicado debajo de la última tabla de entrada y representa el semicontorno derecho del tanque incluido el punto de apoyo. La continuidad de esta geometría en toda la altura y su forma simple y regular garantizan que la solución encontrada por el algoritmo es lo suficientemente razonable como continuar con el análisis.

Como en todo programa de cálculo, existe una serie de limitaciones que es importante conocer antes de su empleo. En este caso, además de las correspondientes a la teoría de Belluzzi, y las mencionadas en cuanto a los vínculos, podemos destacar, entre las más importantes, las siguientes:

- **Como acciones exteriores sólo pueden considerarse el peso propio, los líquidos o una combinación de ambos.**
- **El nivel de agua debe estar comprendido entre el fondo del tanque y el extremo superior del cilindro.**

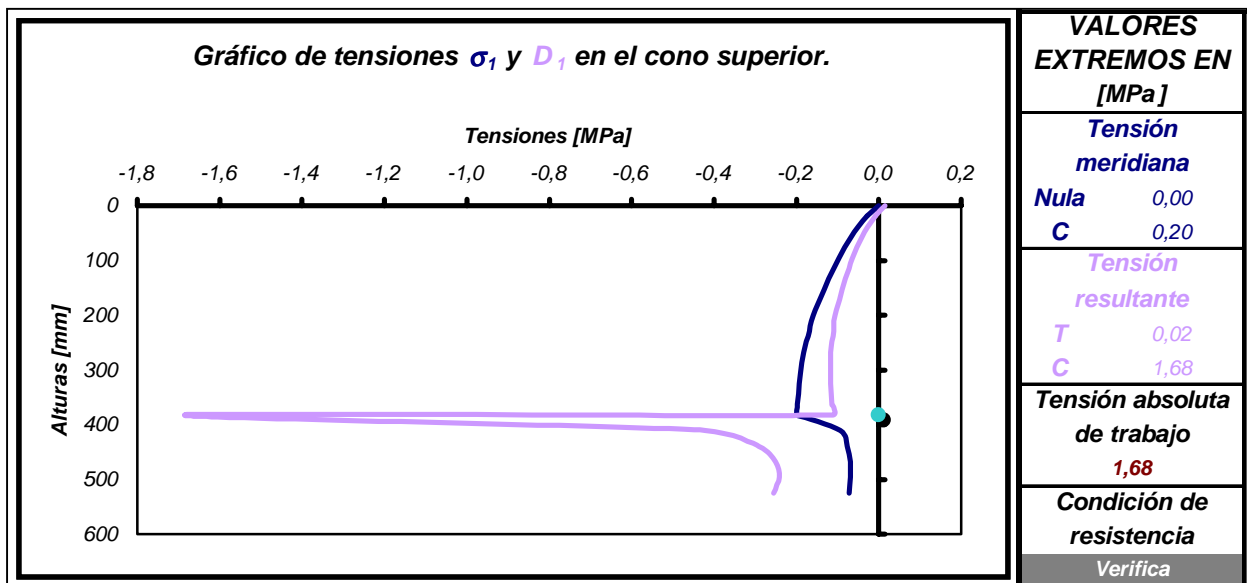


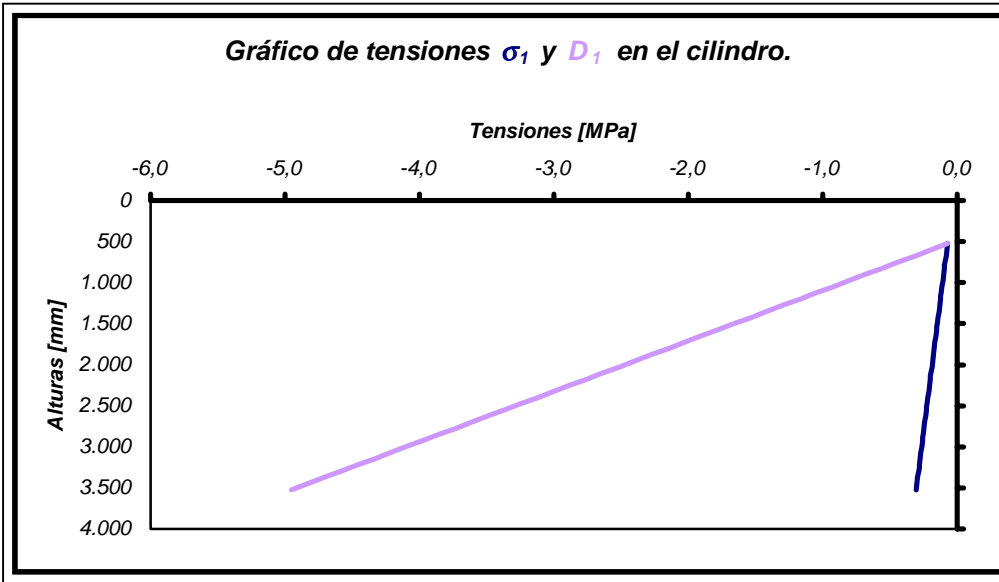
- Las zonas de encuentro entre los troncos de cono y el cilindro, responden, en el plano, a arcos de círculos, no siendo posible el empalme con curvas de radio variable (elipses, espirales, etc.).

## Resultados del análisis y expresión de las conclusiones

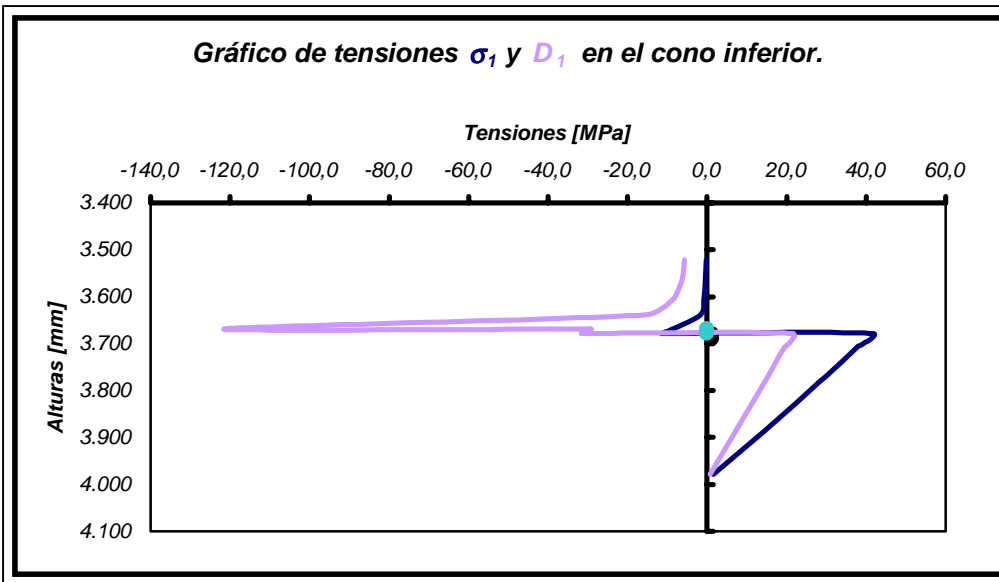
Para realizar la verificación del tanque es necesario, como se expuso al desarrollar la teoría de Belluzzi, determinar el efecto que una tensión genera en la dirección de la otra y viceversa. El valor obtenido de esta manera, al que se denominará tensión resultante, debe ser comparado con el de la tensión admisible del material para verificar que éste no sea superado. Como los valores de las tensiones resultantes dependen de la ordenada instantánea y, en consecuencia, la cantidad de los mismos será proporcional al doble del número de puntos que se estudien, se hace necesario buscar el máximo valor absoluto de estas tensiones. Por otro lado, cabe hacer notar que una tensión, al ser una magnitud vectorial, queda perfectamente definida cuando se dan a conocer su dirección; sobre ésta, el sentido; la intensidad y el punto de aplicación. En las planillas que se adjuntan en la sección de Anexos, el punto de aplicación queda determinado por la ordenada del sistema de referencia; la dirección, por el ángulo de inclinación; la intensidad, por el valor, y el sentido, por el signo de la tensión que se considere, ya sea principal o resultante.

Los gráficos que se muestran a continuación representan la variación de las tensiones principales y resultantes en función de la ordenada de referencia.

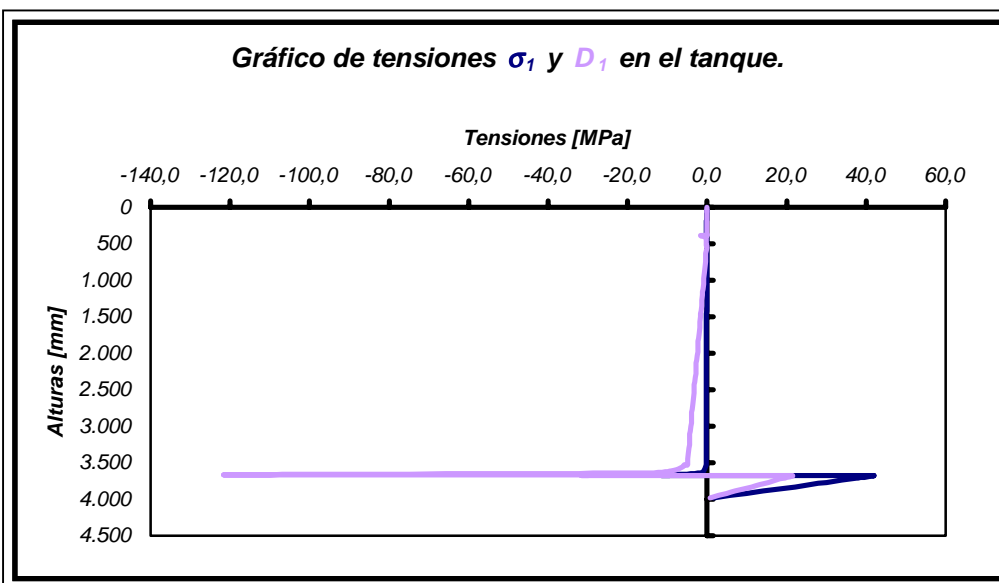




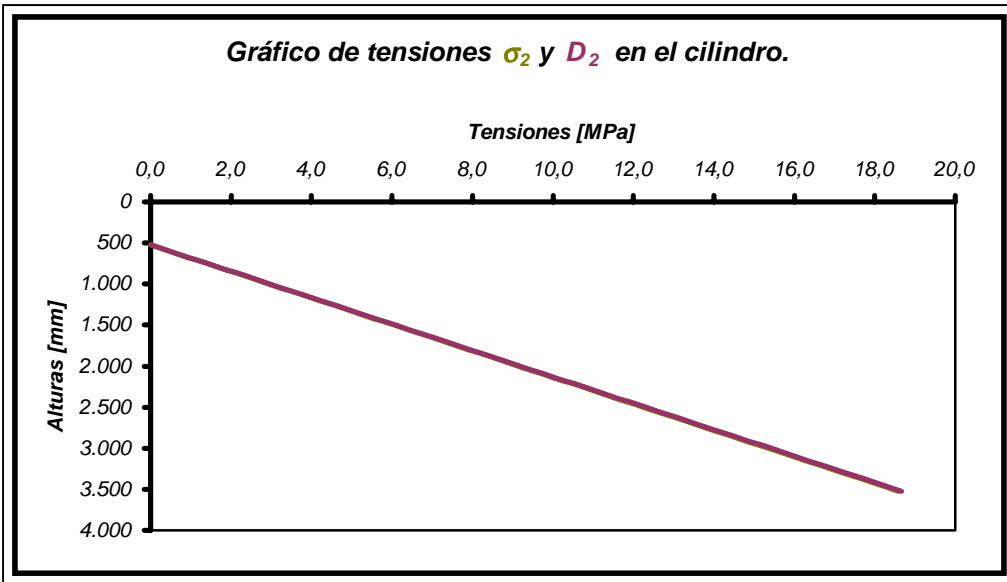
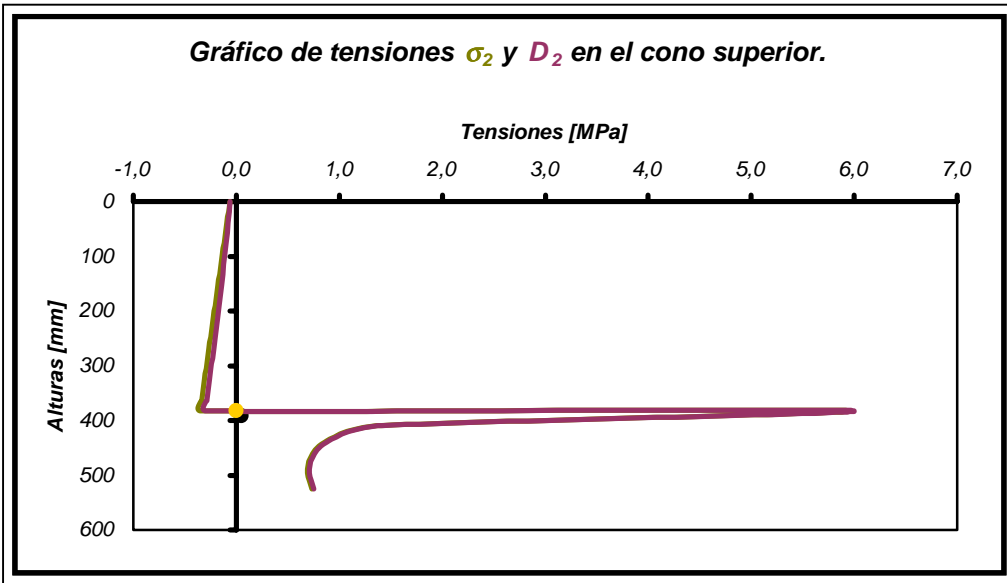
VALORES EXTREMOS EN [MPa]	
<b>Tensión meridiana</b>	
C	0,07
C	0,30
<b>Tensión resultante</b>	
C	0,07
C	4,95
<b>Tensión absoluta de trabajo</b>	
	4,95
<b>Condición de resistencia</b>	
Verifica	

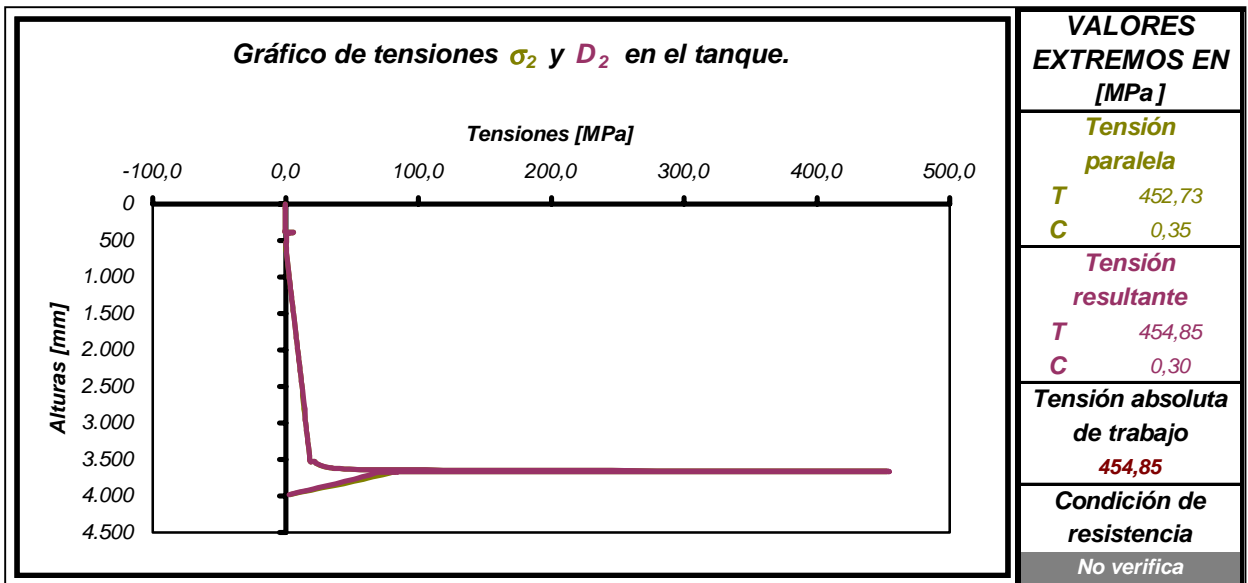
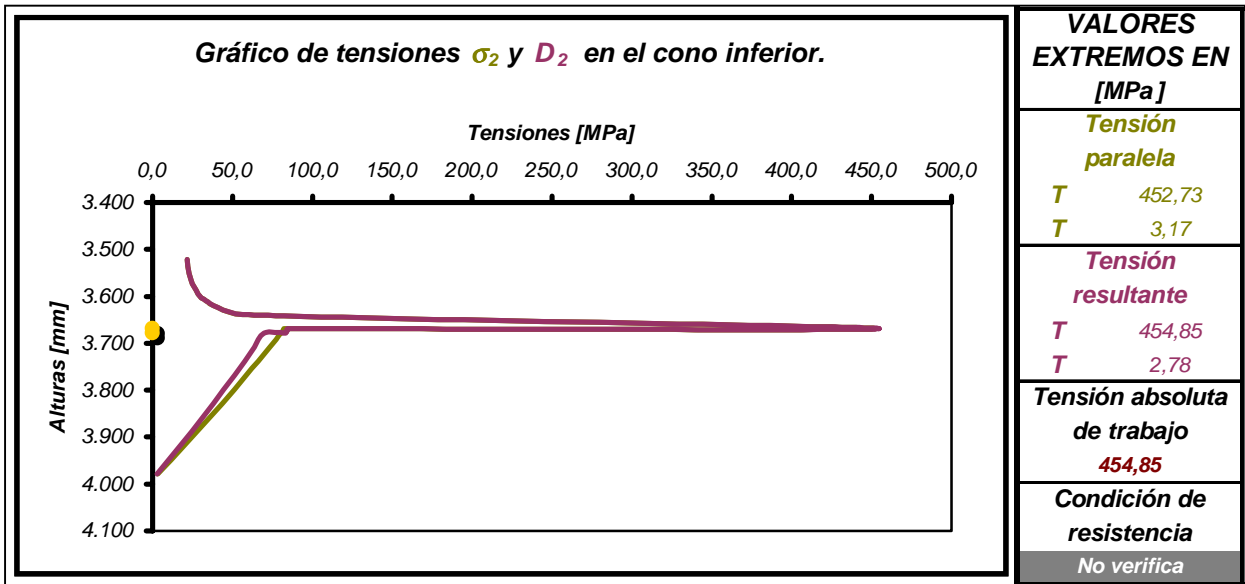


VALORES EXTREMOS EN [MPa]	
<b>Tensión meridiana</b>	
T	41,44
C	11,58
<b>Tensión resultante</b>	
T	21,38
C	121,67
<b>Tensión absoluta de trabajo</b>	
	121,67
<b>Condición de resistencia</b>	
Verifica	



VALORES EXTREMOS EN [MPa]	
<b>Tensión meridiana</b>	
T	41,44
C	11,58
<b>Tensión resultante</b>	
T	21,38
C	121,67
<b>Tensión absoluta de trabajo</b>	
	121,67
<b>Condición de resistencia</b>	
Verifica	





Los cuadros de texto que acompañan a cada gráfico indican los valores extremos que adoptan tanto las tensiones principales como las resultantes a lo largo de la parte analizada en cada caso. Las letras "T" y "C" y la palabra "Nula" ubicadas a la izquierda de los valores se refieren al tipo de esfuerzo, es decir, tracción, compresión y neutro respectivamente. Puede destacarse, además, el cuadro de verificación de la condición de resistencia, referido también a la parte correspondiente. Es de apreciar, en los gráficos de los conos superior e inferior, la presencia de un punto indicador sobre el eje de las ordenadas, el cual representa el límite entre las zonas de empalme y los troncos de cono respectivos.

En cuanto a la variación de las tensiones puede observarse que, en coincidencia con el punto indicador, en sendos conos, se produce una discontinuidad apreciable. La razón de este cambio radica en la diferencia de formas de las superficies en contacto. En efecto, el traspaso desde el tronco de cono hacia el segmento esférico, involucra una sustancial reducción del ángulo que forma la tangente a la superficie con el eje horizontal, con lo cual la tensión meridiana aumenta considerablemente. Por otro lado, si bien el efecto del agua es despreciable en el cono superior, la variación brusca que experimenta la tensión paralela en esta zona, se debe fundamentalmente a la influencia que sobre ésta tiene la tensión meridiana, ya que en la zona de empalme, el radio de curvatura del meridiano tiene un valor definido. Las variaciones de esta tensión en el cono inferior

pueden explicarse de la misma manera, teniendo en cuenta, que ahora, el efecto del líquido incrementa notablemente los esfuerzos meridianos, razón por la cual los valores de las tensiones paralelas se vuelven sumamente críticos. Es precisamente en esta zona, como puede advertirse en los gráficos, que la condición de resistencia no es verificada. Ante esta situación surgen dos posibles soluciones: Colocar un refuerzo en las cercanías de las zonas críticas, o bien, aumentar el espesor del cono inferior.

## Bibliografía.

**SENTINELLI, FRANCISCO. Cátedra Estructuras Especiales UTNFRM 1969 – Ed. Hnos. Villafañe.**

**BELLUZI, ODOÑO. Scienza delle Costruzioni – Vol. III. 1957 . Ed. Nicola Zannichelli – Bologna. Italia.**

## Autores.

- González, Celina.
- Guglielmi, Ariel.
- Lucero, Daniel.
- Pina, Juan Carlos.
- Quiroga, Pablo.

Sección  
2.2.4

# Anexos

## ANÁLISIS DE ESFUERZOS.

Parte	Ordenada	Ángulo de inclinación		Radio instantáneo	Tensión meridiana	Tensión paralela	Tensión resultante	
	y	θ		r	σ <sub>1</sub>	σ <sub>2</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>
	[mm]	[rad]	[grados]	[mm]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
C O N O  S U P E R I O R	0	0,31	17,79	255	0,00	-0,06	0,02	-0,06
	19	0,31	17,79	315	-0,03	-0,08	-0,01	-0,07
	38	0,31	17,79	374	-0,05	-0,09	-0,03	-0,08
	57	0,31	17,79	434	-0,07	-0,11	-0,04	-0,09
	76	0,31	17,79	493	-0,08	-0,12	-0,05	-0,10
	96	0,31	17,79	553	-0,10	-0,13	-0,06	-0,11
	115	0,31	17,79	612	-0,11	-0,15	-0,07	-0,12
	134	0,31	17,79	672	-0,12	-0,16	-0,08	-0,13
	153	0,31	17,79	731	-0,13	-0,18	-0,09	-0,14
	172	0,31	17,79	791	-0,14	-0,19	-0,10	-0,16
	191	0,31	17,79	850	-0,15	-0,21	-0,10	-0,17
	210	0,31	17,79	910	-0,16	-0,22	-0,11	-0,18
	229	0,31	17,79	970	-0,17	-0,24	-0,11	-0,19
	248	0,31	17,79	1.029	-0,18	-0,25	-0,11	-0,21
	268	0,31	17,79	1.089	-0,18	-0,26	-0,12	-0,22
	287	0,31	17,79	1.148	-0,19	-0,28	-0,12	-0,23
	306	0,31	17,79	1.208	-0,19	-0,29	-0,12	-0,25
	325	0,31	17,79	1.267	-0,19	-0,31	-0,12	-0,26
	344	0,31	17,79	1.327	-0,20	-0,32	-0,11	-0,27
	363	0,31	17,79	1.386	-0,20	-0,34	-0,11	-0,29
382	0,31	17,79	1.446	-0,20	-0,35	-0,11	-0,30	
382	0,31	17,79	1.446	-0,20	5,93	-1,68	5,98	
411	0,70	40,38	1.497	-0,09	1,32	-0,42	1,34	
439	0,96	55,16	1.523	-0,08	0,86	-0,29	0,88	
468	1,18	0,00	1.539	-0,07	0,72	-0,25	0,74	
496	1,38	79,02	1.547	-0,07	0,69	-0,24	0,71	
525	1,57	90,00	1.550	-0,07	0,74	-0,26	0,75	

Res  
ultados  
de  
las  
soli  
cita  
cio  
nes

C I L I N D R O	525	1,57	90,00	1.550	-0,07	0,00	-0,07	0,02
	600	1,57	90,00	1.550	-0,08	0,46	-0,19	0,48
	675	1,57	90,00	1.550	-0,08	0,93	-0,32	0,95
	750	1,57	90,00	1.550	-0,09	1,39	-0,44	1,42
	825	1,57	90,00	1.550	-0,09	1,86	-0,56	1,88
	900	1,57	90,00	1.550	-0,10	2,32	-0,68	2,35
	975	1,57	90,00	1.550	-0,11	2,79	-0,80	2,81
	1.049	1,57	90,00	1.550	-0,11	3,25	-0,93	3,28
	1.124	1,57	90,00	1.550	-0,12	3,72	-1,05	3,75
	1.199	1,57	90,00	1.550	-0,12	4,18	-1,17	4,21
	1.274	1,57	90,00	1.550	-0,13	4,65	-1,29	4,68
	1.349	1,57	90,00	1.550	-0,14	5,11	-1,41	5,14
	1.424	1,57	90,00	1.550	-0,14	5,57	-1,53	5,61
	1.499	1,57	90,00	1.550	-0,15	6,04	-1,66	6,08
	1.574	1,57	90,00	1.550	-0,15	6,50	-1,78	6,54
	1.649	1,57	90,00	1.550	-0,16	6,97	-1,90	7,01
	1.724	1,57	90,00	1.550	-0,16	7,43	-2,02	7,47
	1.799	1,57	90,00	1.550	-0,17	7,90	-2,14	7,94
	1.874	1,57	90,00	1.550	-0,18	8,36	-2,27	8,41
	1.949	1,57	90,00	1.550	-0,18	8,83	-2,39	8,87
	2.024	1,57	90,00	1.550	-0,19	9,29	-2,51	9,34
	2.098	1,57	90,00	1.550	-0,19	9,76	-2,63	9,80
	2.173	1,57	90,00	1.550	-0,20	10,22	-2,75	10,27
	2.248	1,57	90,00	1.550	-0,21	10,68	-2,88	10,74
	2.323	1,57	90,00	1.550	-0,21	11,15	-3,00	11,20
	2.398	1,57	90,00	1.550	-0,22	11,61	-3,12	11,67
	2.473	1,57	90,00	1.550	-0,22	12,08	-3,24	12,13
	2.548	1,57	90,00	1.550	-0,23	12,54	-3,36	12,60
	2.623	1,57	90,00	1.550	-0,23	13,01	-3,49	13,07
	2.698	1,57	90,00	1.550	-0,24	13,47	-3,61	13,53
	2.773	1,57	90,00	1.550	-0,25	13,94	-3,73	14,00
	2.848	1,57	90,00	1.550	-0,25	14,40	-3,85	14,46
	2.923	1,57	90,00	1.550	-0,26	14,87	-3,97	14,93
2.998	1,57	90,00	1.550	-0,26	15,33	-4,10	15,40	
3.072	1,57	90,00	1.550	-0,27	15,79	-4,22	15,86	
3.147	1,57	90,00	1.550	-0,28	16,26	-4,34	16,33	
3.222	1,57	90,00	1.550	-0,28	16,72	-4,46	16,79	
3.297	1,57	90,00	1.550	-0,29	17,19	-4,58	17,26	
3.372	1,57	90,00	1.550	-0,29	17,65	-4,71	17,73	
3.447	1,57	90,00	1.550	-0,30	18,12	-4,83	18,19	
<b>3.522</b>	<b>1,57</b>	<b>90,00</b>	<b>1.550</b>	<b>-0,30</b>	<b>18,58</b>	<b>-4,95</b>	<b>18,66</b>	

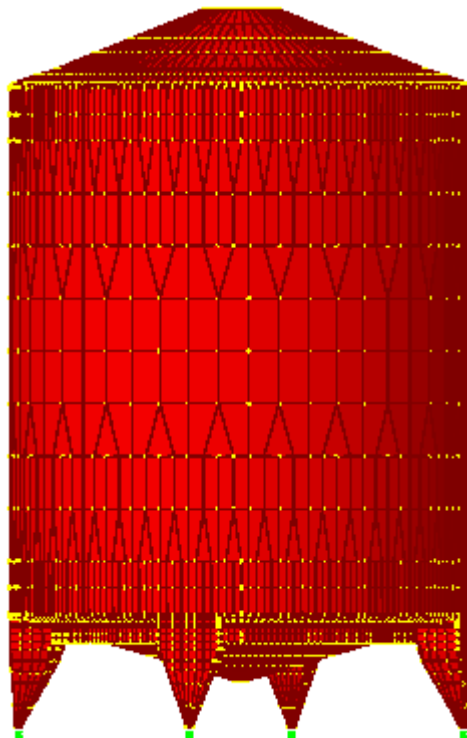
C O N O I N F E R I O R	<b>3.522</b>	<b>1,57</b>	<b>90,00</b>	<b>1.550</b>	<b>-0,30</b>	<b>21,73</b>	<b>-5,74</b>	<b>21,81</b>
	3.551	1,37	101,25	1.547	-0,35	22,79	-6,05	22,88
	3.581	1,17	112,97	1.538	-0,50	26,00	-7,00	26,12
	3.610	0,95	125,83	1.522	-0,82	33,56	-9,21	33,77
	3.639	0,68	141,31	1.494	-1,65	56,23	-15,71	56,64
	<b>3.668</b>	<b>0,22</b>	<b>167,34</b>	<b>1.433</b>	<b>-8,49</b>	<b>452,73</b>	<b>-121,67</b>	<b>454,85</b>
	<b>3.668</b>	<b>0,22</b>	<b>167,34</b>	<b>1.433</b>	<b>-8,49</b>	<b>82,70</b>	<b>-29,16</b>	<b>84,82</b>
	3.669	0,22	167,34	1.428	-8,79	82,45	-29,41	84,65
	3.670	0,22	167,34	1.423	-9,10	82,21	-29,65	84,48
	3.672	0,22	167,34	1.419	-9,40	81,96	-29,89	84,31
	3.673	0,22	167,34	1.414	-9,71	81,71	-30,14	84,14
	3.674	0,22	167,34	1.409	-10,02	81,47	-30,38	83,97
	3.675	0,22	167,34	1.404	-10,33	81,22	-30,63	83,80
	3.676	0,22	167,34	1.400	-10,64	80,97	-30,88	83,63
	3.677	0,22	167,34	1.395	-10,95	80,73	-31,13	83,46
	3.678	0,22	167,34	1.390	-11,26	80,48	-31,38	83,29
	<b>3.679</b>	<b>0,22</b>	<b>167,34</b>	<b>1.385</b>	<b>-11,58</b>	<b>80,23</b>	<b>-31,64</b>	<b>83,12</b>
	<b>3.679</b>	<b>0,22</b>	<b>167,34</b>	<b>1.385</b>	<b>41,44</b>	<b>80,23</b>	<b>21,38</b>	<b>69,87</b>
	3.709	0,22	167,34	1.252	37,67	73,18	19,38	63,76
	3.739	0,22	167,34	1.118	33,86	65,99	17,36	57,52
	3.769	0,22	167,34	985	29,99	58,65	15,33	51,15
	3.799	0,22	167,34	851	26,08	51,16	13,29	44,64
	3.829	0,22	167,34	718	22,12	43,53	11,24	38,00
	3.859	0,22	167,34	584	18,11	35,75	9,17	31,22
	3.889	0,22	167,34	451	14,05	27,82	7,10	24,31
	3.919	0,22	167,34	317	9,95	19,75	5,01	17,26
	3.949	0,22	167,34	184	5,79	11,53	2,91	10,09
<b>3.979</b>	<b>0,22</b>	<b>167,34</b>	<b>50</b>	<b>1,58</b>	<b>3,17</b>	<b>0,78</b>	<b>2,78</b>	



# Vasija vinaria de acero inoxidable

---

Aplicación del Método de los Elementos Finitos  
Elemento Plano



## Verificación de un tanque metálico

### Aplicación del Método de los Elementos Finitos

#### Elementos Planos

#### Introducción

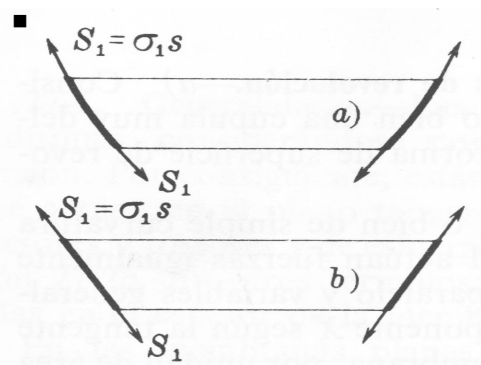
El presente trabajo tiene por objeto exponer los resultados obtenidos del análisis de un tanque metálico utilizando el Método de los Elementos Finitos. Además, se desarrolla una breve explicación del tipo de elemento utilizado para el modelo, y como se fue desarrollando el modelado del tanque. La herramienta utilizada para modelar la estructura y calcular las solicitaciones es el programa de cálculo SAP2000 Non Linear.

#### Análisis del problema real

El problema que se presenta corresponde a la determinación de las solicitaciones en una estructura que responde a las características de una membrana curva; un tanque cilíndrico de acero inoxidable utilizado en la industria vitivinícola.

Las membranas son estructuras laminares delgadísimas, considerándose por ello desprovistas de rigidez a flexión y torsión. Por consiguiente, están sometidas en cada punto sólo a esfuerzos que actúan en el plano tangente; o sea, carecen de momentos flectores, torsores y de esfuerzos cortantes. En otros términos: las tensiones están uniformemente repartidas en el espesor de la membrana.

En esta estructura encontramos que en un punto cualquiera de la superficie se presenta la siguiente situación:



- A lo largo de los meridianos existen tensiones  $\sigma_1$  dirigidas según la tangente al meridiano.

- A lo largo de los paralelos existen tensiones  $\sigma_2$  dirigidas según la tangente al paralelo.

• Figura 1: Esfuerzos  $S_1$

Recordando la Teoría de la Elasticidad, notamos que en el problema de tensión plana, las tensiones se desarrollan en el plano del elemento. En el caso bajo estudio, tenemos una situación similar lo que nos permitiría considerar a nuestro problema como uno de tensión plana. La importancia de esto radica en que el programa que se va a utilizar para realizar el modelado trabaja en tensión plana; si trabajara en deformación plana se debería tener en cuenta la diferencia al modelar la estructura.

## Análisis del elemento elegido para el modelo

Para el estudio del problema se eligió realizar un modelo en el programa SAP2000NL, y utilizar en el modelado del tanque el elemento tipo **Shell** que proporciona dicho programa.

- Elemento Shell

El elemento shell, que puede tener tres o cuatro nodos, combina el comportamiento de membrana con el de placa.

El comportamiento de membrana usa una formulación isoparamétrica que incluye rigidez a desplazamientos en el plano del elemento, y rigidez a rotación en el plano, alrededor de la normal al mismo. Únicamente tomará fuerzas y momentos torsores ( alrededor de la normal) en el plano.

El comportamiento como placa incluye rigidez flexional en dos direcciones ortogonales, y rigidez a desplazamientos en dirección normal al plano del elemento; sin tener en cuenta los efectos de deformación por corte. Sólo tomará momentos flectores y fuerzas normales al plano.

En general, este tipo de elemento nos permite modelar estructuras del siguiente tipo:

- ✓ Cáscaras tridimensionales, como tanques y domos.
- ✓ Estructuras de placas, como losas.
- ✓ Tabiques

Al modelar una estructura con elementos shell podemos elegir que adopte comportamiento puramente de membrana, puramente de placa, o la combinación de ambos como shell.

En estructuras tridimensionales se recomienda adoptar para el elemento el comportamiento de shell. El tipo de membrana o de placa es más conveniente utilizarlo para estructuras planas o aquellas que estén correctamente vinculadas.

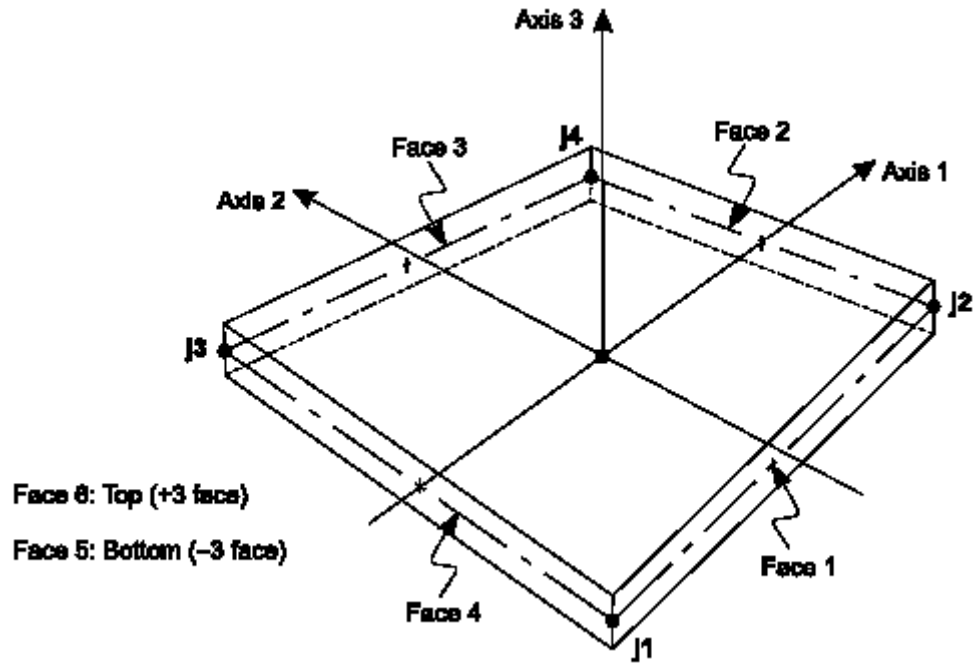
Para calcular la rigidez del elemento se utiliza una integración numérica de ocho puntos. Las tensiones y esfuerzos internos, en las coordenadas locales del elemento, se evalúan con una integración en los puntos de Gauss y luego se extrapolan a los nodos.

- Ejes locales y numeración de nodos

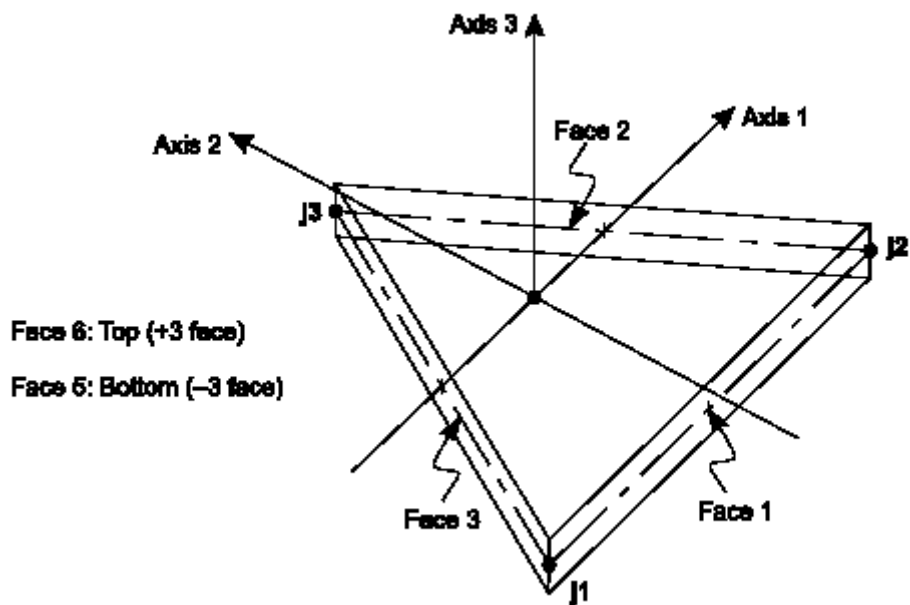
El elemento shell puede adoptar cualquiera de las formas siguientes:

- ✓ Elemento cuadrangular, definido por cuatro nodos **j1; j2; j3 y j4**.
- ✓ Elemento triangular, definido por tres nodos **j1; j2 y j3**.

Los ejes locales se denominan como **1, 2 y 3**, y responden a un sistema de coordenadas dextrógiro. Los dos primeros (1 y 2) se ubican en el plano del elemento, mientras que el tercero es normal a dicho plano.



• Figura 2: Elemento cuadrangular de 4 nodos



• Figura 3: Elemento triangular de 3 nodos

- Grados de libertad

El elemento shell siempre tiene en cuenta los seis grados de libertad de cada uno de los nodos a los que está conectado. Cuando se utiliza el comportamiento puro de membrana, se debe asegurar que los grados de libertad correspondientes a la translación normal al plano y las rotaciones debidas a la flexión han sido restringidos. Por otro lado, cuando el elemento es usado como placa deberán restringirse los grados de libertad correspondientes a la translación en el plano y a la rotación alrededor de la normal al plano.

- Esfuerzos internos y tensiones

◆ **Esfuerzos internos:**

Los esfuerzos internos del elemento son las fuerzas y momentos que resultan de integrar las tensiones a lo largo del espesor del elemento, y son:

- **Fuerzas en el plano en dirección de los ejes:**

$$F_{11} = \int_{-th/2}^{+th/2} \sigma_{11} dx_3$$

$$F_{22} = \int_{-th/2}^{+th/2} \sigma_{22} dx_3$$

- **Fuerzas transversales:**

$$F_{12} = \int_{-th/2}^{+th/2} \sigma_{12} dx_3$$

- **Momentos flectores:**

$$M_{11} = - \int_{-thb/2}^{+thb/2} t \sigma_{11} dx_3$$

$$M_{22} = - \int_{-thb/2}^{+thb/2} t \sigma_{22} dx_3$$

- **Momento torsor:**

$$M_{12} = - \int_{-thb/2}^{+thb/2} t \sigma_{12} dx_3$$

- **Fuerzas de corte:**

$$V_{13} = \int_{-thb/2}^{+thb/2} \sigma_{13} dx_3$$

$$V_{23} = \int_{-thb/2}^{+thb/2} \sigma_{23} dx_3$$

En las expresiones anteriores, se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- $x_3$  es la coordenada correspondiente al espesor del elemento medida desde el plano medio de este.
- Los esfuerzos internos son fuerzas y momentos por unidad de longitud en el plano.

◆ **Tensiones:**

se pueden obtener de la siguiente forma:

$$\sigma_{11} = \frac{F_{11}}{th} - \frac{12 M_{11}}{thb^3} x_3$$

$$\sigma_{22} = \frac{F_{22}}{th} - \frac{12 M_{22}}{thb^3} x_3$$

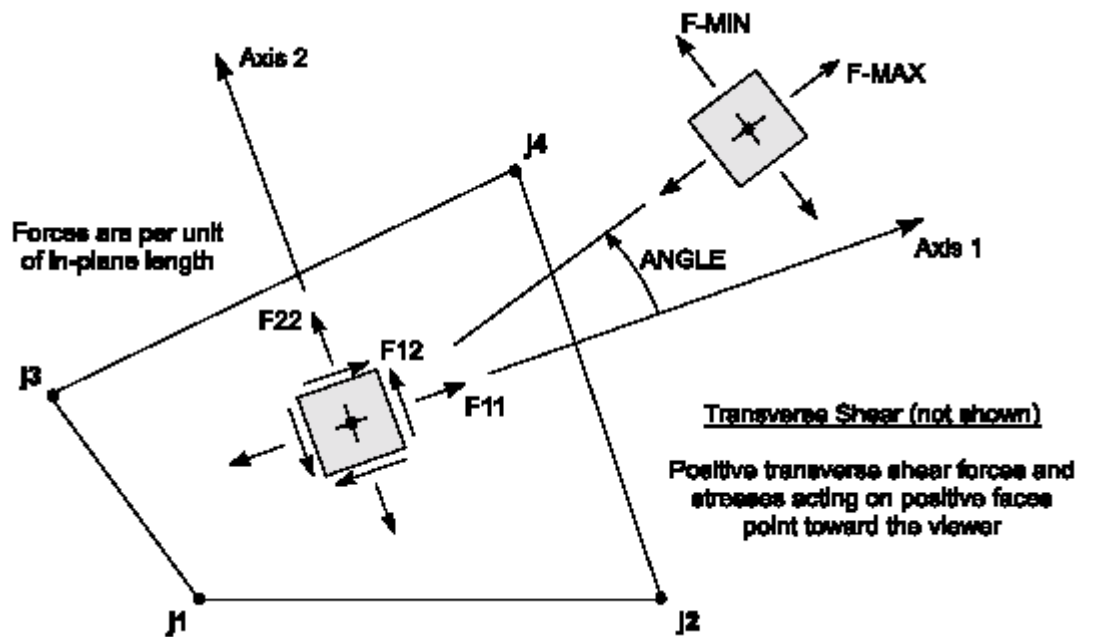
$$\sigma_{12} = \frac{F_{12}}{th} - \frac{12 M_{12}}{thb^3} x_3$$

$$\sigma_{13} = \frac{V_{13}}{thb}$$

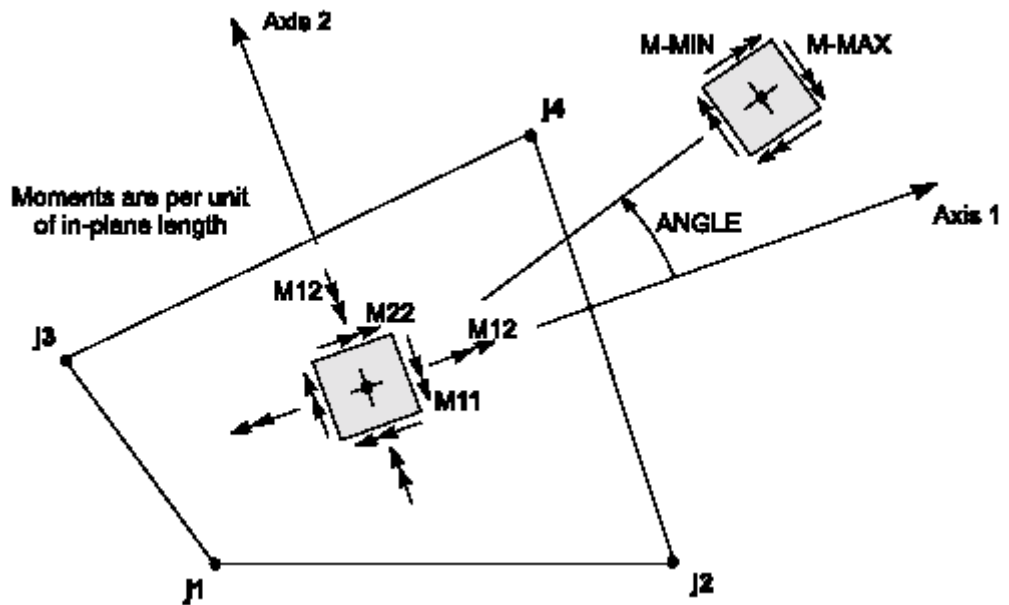
$$\sigma_{23} = \frac{V_{23}}{thb}$$

$$\sigma_{33} = 0$$

En las expresiones de los esfuerzos internos y las tensiones anteriores **b** es el ancho del elemento y **th** es el espesor del mismo.



• Figura 4: Tensiones y esfuerzos de membrana



• Figura 5: Momentos flectores y torsores de placa

Las tensiones y esfuerzos internos se evaluarán con una integración en los puntos de Gauss del elemento y luego se extrapolan a los nodos.

## Consideraciones sobre el modelo

- Materiales y secciones utilizadas

### ◆ Material

Al realizar el modelo es necesario definir para los elementos adoptados, sus características mecánicas y geométricas. En el caso bajo análisis el material utilizado es acero inoxidable; el cual cuenta con las siguientes propiedades:

ACERO INOXIDABLE			
Propiedad	Símbolo	Unidad	Valor
Densidad	$\delta$	[ kg/m <sup>3</sup> ]	7,79
Peso específico	$\gamma$	[ kN/m <sup>2</sup> ]	77,9
Módulo de elasticidad	E	[ MPa ]	193000
Módulo de Poisson	$\mu$	[ adim. ]	0,25

• Tabla 1: Propiedades

Los datos corresponden al ACERO INOXIDABLE AISI 316 CON ADICION DE MOLIBDENO, el cual es utilizado en la industria vitivinícola. La adición de molibdeno mejora la resistencia a la corrosión en ciertos medios.

## ◆ Secciones

Se utilizaron cuatro tipos diferentes de secciones, para todas ellas se adoptó el comportamiento tipo shell, y fueron denominadas como: sección membrana, sección apoyo, sección empinif, sección viga.

A cada sección es necesario asignarle un espesor constante para el comportamiento como membrana y otro para el comportamiento como placa con rigidez flexional. El primero es utilizado por el programa para calcular la rigidez de membrana y el peso propio del elemento. El segundo es empleado para calcular la rigidez flexional del elemento comportándose como placa. De acuerdo a estas consideraciones se definieron los cuatro distintos espesores y las cuatro secciones.

Secciones

Designación	Espesores en mm		Comportamiento
	De membrana	De placa	
<b>Membrana</b>	<b>2,5</b>	<b>1</b>	<b>shell</b>
<b>Apoyo</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>shell</b>
<b>Empinif</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>Shell</b>
<b>Viga</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>Shell</b>

• Tabla 2: Secciones

La sección **membrana** es la que se adoptó para todos los elementos del modelo excepto para los apoyos, la viga ubicada en el cono inferior y el empalme entre el cilindro y el cono inferior. Se dispusieron distintos espesores debido a que se pretende aproximarse de la mejor forma posible al comportamiento de una estructura tipo membrana, las cuales sólo presentan fuerzas en el plano, sin estar sometidas a momentos y esfuerzos de corte. Al disminuir el espesor de placa limitamos la capacidad del elemento de trabajar a flexión, haciéndose despreciables los esfuerzos derivados de ella con respecto a los correspondientes a la membrana. De esta forma nos acercamos más al verdadero comportamiento del tanque, ante la imposibilidad de utilizar el elemento bajo el comportamiento de membrana pura en estructuras tridimensionales que presenta el programa utilizado.

A la sección **apoyo** se le asignó un espesor mayor debido a que se estimó que los apoyos estarían sometidos a solicitaciones mayores. Se adoptan 3 mm porque para espesores menores las tensiones son muy grandes al igual que las deformaciones.

La sección **empinif** corresponde al empalme entre el cilindro y el cono inferior. Como nos podemos imaginar, en este lugar las tensiones alcanzan valores considerablemente más altos que en otros lugares del tanque por lo que se optó por incrementar el espesor en dicha zona.

Por último, la sección **viga** corresponde a la viga ubicada en el cono inferior, el espesor en este caso es dato, y se utilizó un perfil C 30x100x3.

## • Malla

### ◆ Elementos utilizados

Como se indicó en los párrafos anteriores, se utilizaron elementos tipo shell. Además, prácticamente en la totalidad del modelo, exceptuando las patas de apoyo, se optó por los elementos cuadriláteros de cuatro nodos.



Para modelar las barras en las que terminan las patas de apoyo se emplearon elementos de barra (frame).

#### ◆ Discretización

- **Cono inferior:** la malla va aumentando su densidad desde el centro hacia fuera. Comienza con doce elementos de una amplitud de  $30^\circ$  cada uno, y se densifica progresivamente para terminar en el encuentro con el cilindro con elementos de  $1^\circ 52' 30''$  de amplitud (16 elementos cada  $30^\circ$ ). También se realizó una mayor discretización en la zona donde se encuentra la viga. Para esta se utilizaron dos elementos en el alma y uno en el ala inferior.

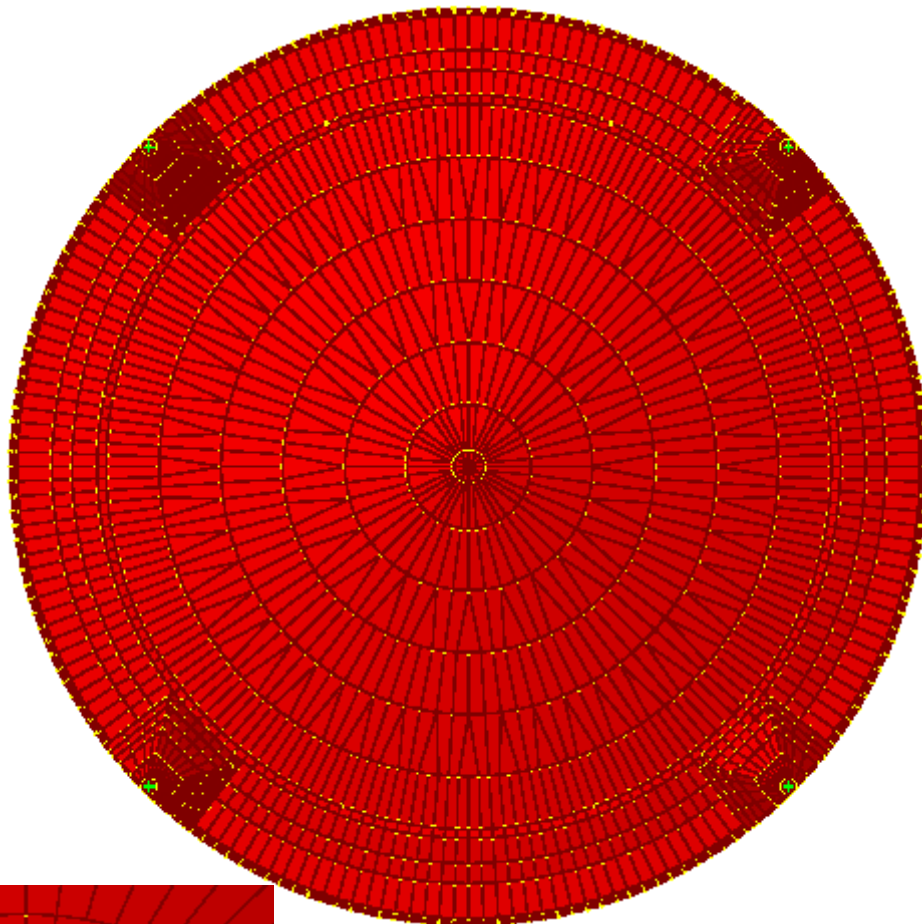


Figura A

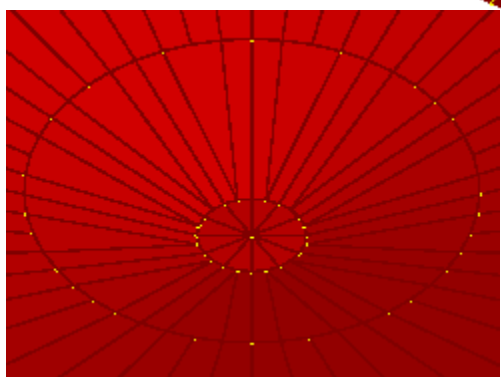


Figura B

- Figura 6: Discretización del cono inferior

Figura A: vista inferior

Figura B: detalle del centro del cono

Figura C: detalle del encuentro con el cilindro y de la viga.

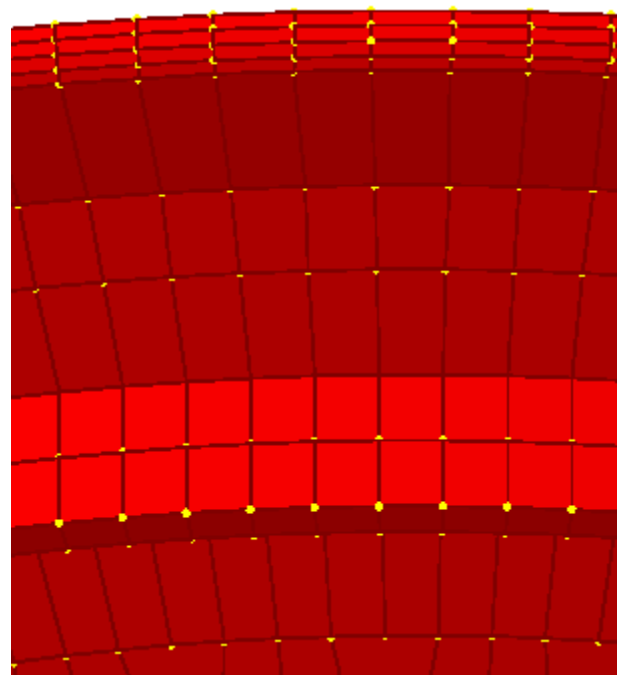
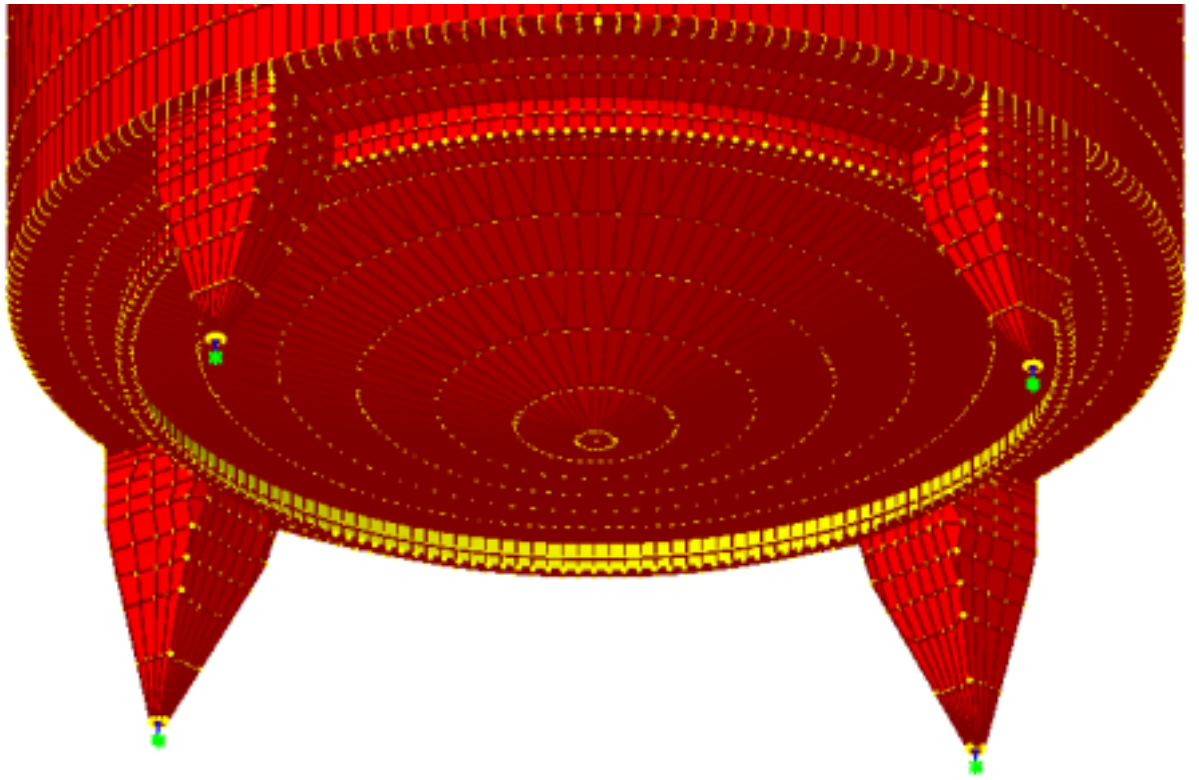
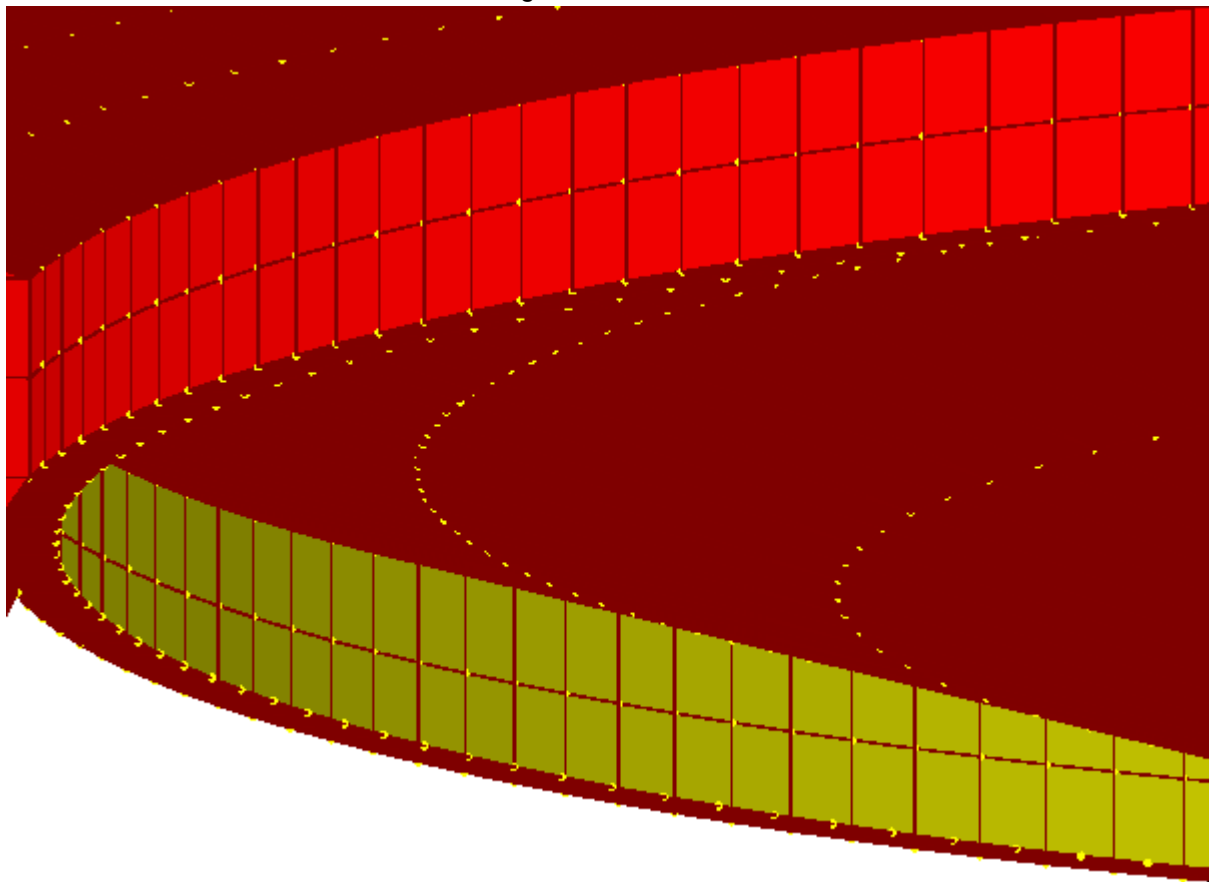


Figura C

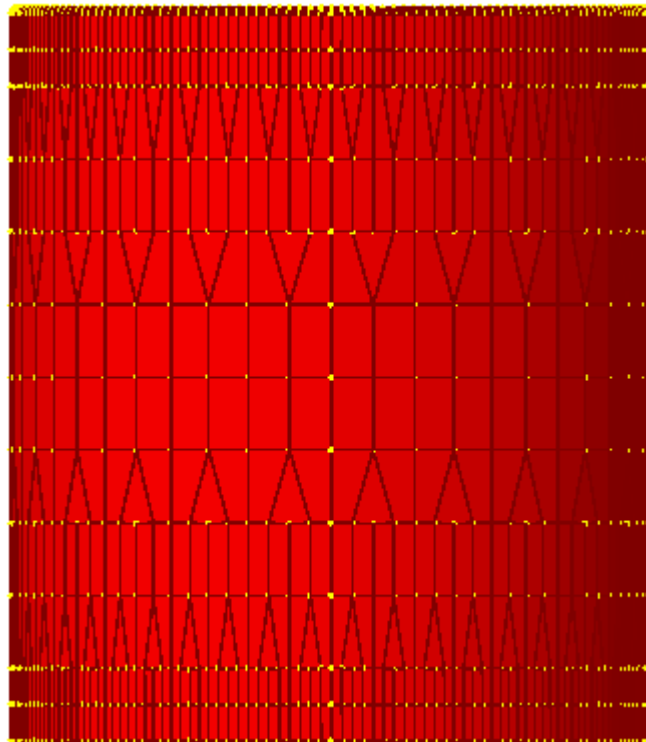


• Figura 7: Vista del cono inferior

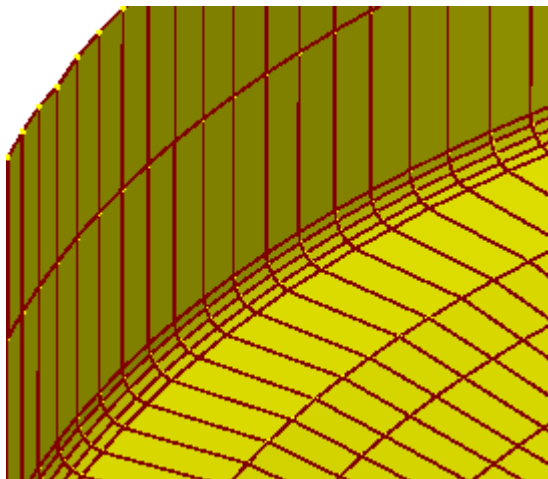


• Figura 8: Detalle de la viga

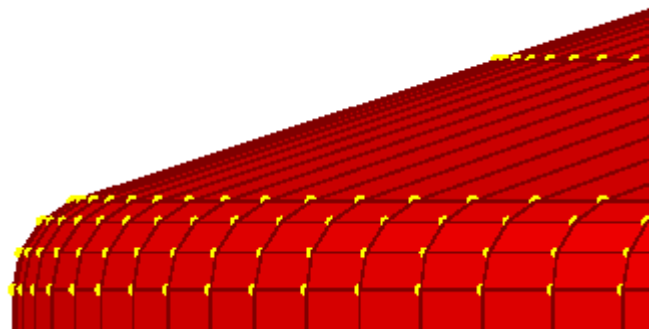
- **Cilindro:** en el cilindro encontramos una mayor densificación en los encuentros con el cono superior e inferior, donde se presentarán concentraciones de tensiones importantes. En la parte central del mismo la malla será menos densa por no presentarse grandes gradientes de tensiones.



• Figura 9: Cilindro

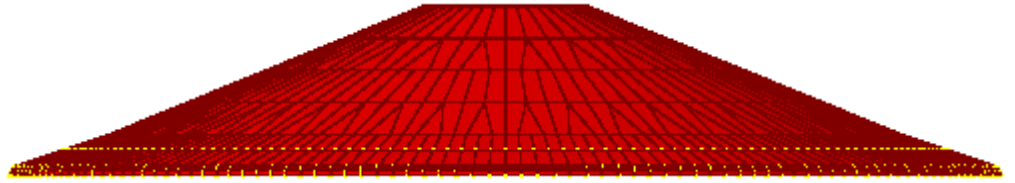


• Figura 10: Detalle del encuentro inferior

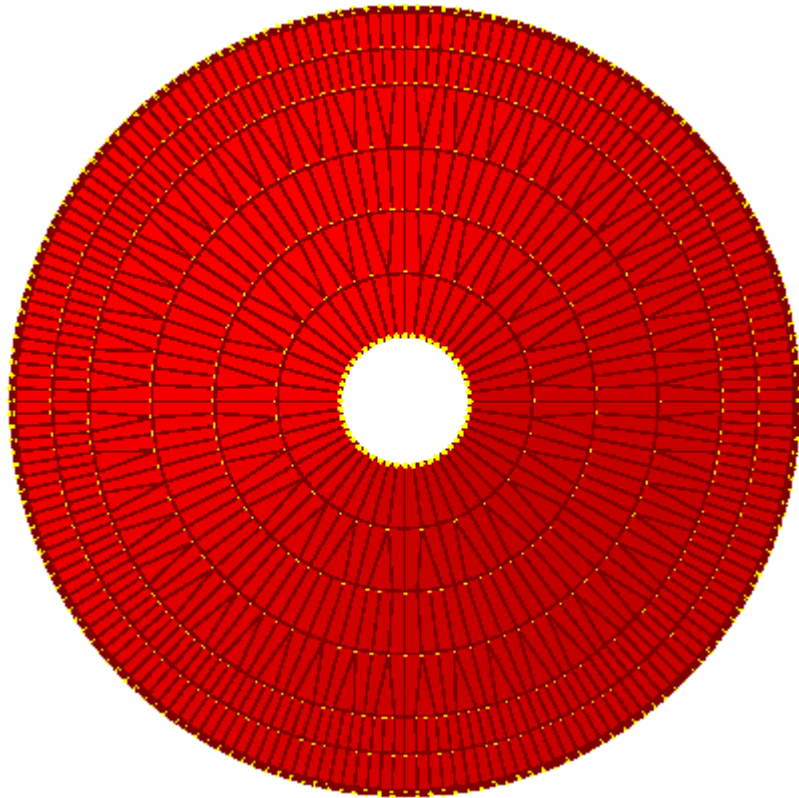


• Figura 11: Detalle del encuentro superior

- **Cono superior:** presenta el mismo tipo de discretización que el cono inferior. En este caso los elementos ubicados en el centro del cono son de cuatro nodos y presentan un arco cuyo ángulo es igual a  $7^{\circ} 30'$ . En el encuentro con el cilindro la malla se densifica de forma que los elementos abarcan un ángulo de  $1^{\circ} 52' 30''$  ( cuatro cada  $7^{\circ} 30'$  ).



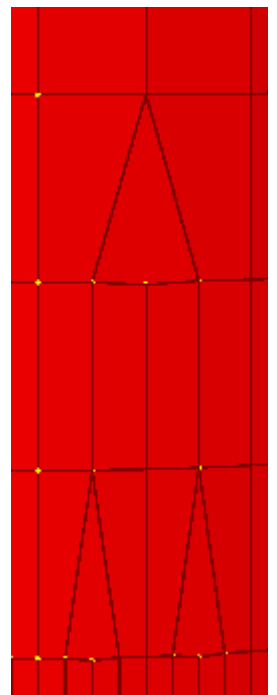
• Figura 12: Cono superior vista lateral

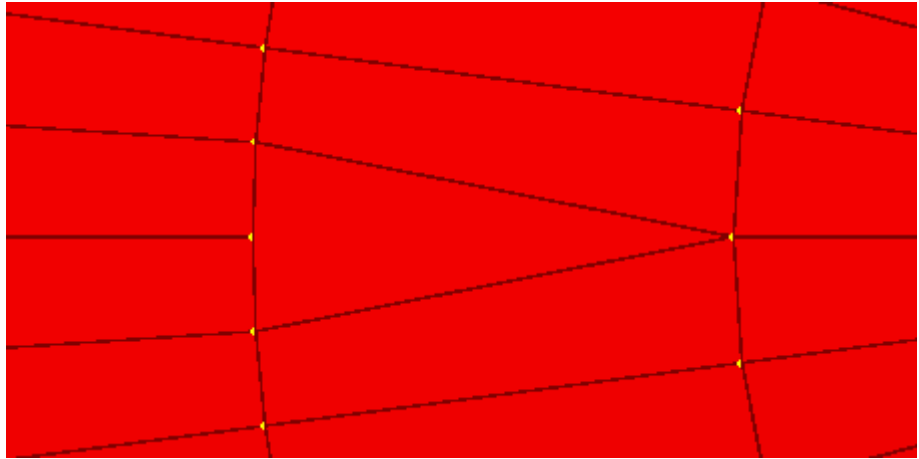


• Figura 13: Cono superior vista superior

- **Elementos de transición:** para realizar la transición necesaria para densificar la malla se optó utilizar elementos cuadrangulares de cuatro nodos. Estos en comparación con los elementos de tres nodos, también utilizados para realizar transiciones de densidad de mallas tienen un grado de aproximación mayor.

• Figura 14: Transición realizada en el cilindro





• Figura 15: Transición realizada en los conos

- Cargas y estados de cargas

Las cargas aplicadas al modelo se reducen a las debidas a la acción del vino sobre el tanque y la correspondiente al peso propio del mismo. Para la primera situación se cargó el modelo con la distribución de presiones que genera un líquido actuando sobre una superficie. La misma responde a una variación dependiente de la altura. Además, a modo de simplificación se adoptó para el vino el peso específico del agua por tener esta una distribución de presiones bien conocida.

Los estados de carga considerados fueron tres:

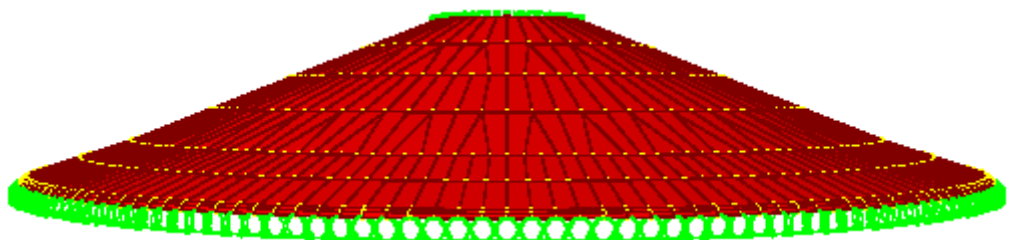
1. Peso propio
2. Acción del vino
3. Peso propio + Acción del vino

- Condiciones de vínculo

En este punto es importante destacar que fueron analizados dos modelos: uno del tanque en su totalidad y otro para el cono superior en particular. En cada uno de ellos se utilizaron condiciones de vínculo diferentes.

Para el modelo del tanque completo los vínculos están ubicados únicamente en las patas de apoyo (cuatro en total). Se impidieron a estos puntos los desplazamientos en el plano ( $u_1$  y  $u_2$ ) y en la dirección normal a este ( $u_3$ ) como también las rotaciones alrededor de los ejes situados en el plano ( $r_1$  y  $r_2$ ).

El modelo correspondiente al cono superior por separado se corrió con distintas condiciones de vínculo, como por ejemplo: totalmente empotrado en su base o restringiéndole los desplazamientos verticales en su parte inferior y los desplazamientos en el plano en su parte superior.



• Figura 16: Cono superior

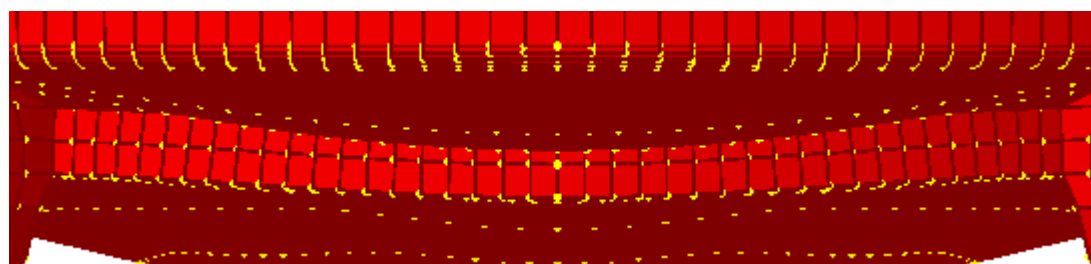
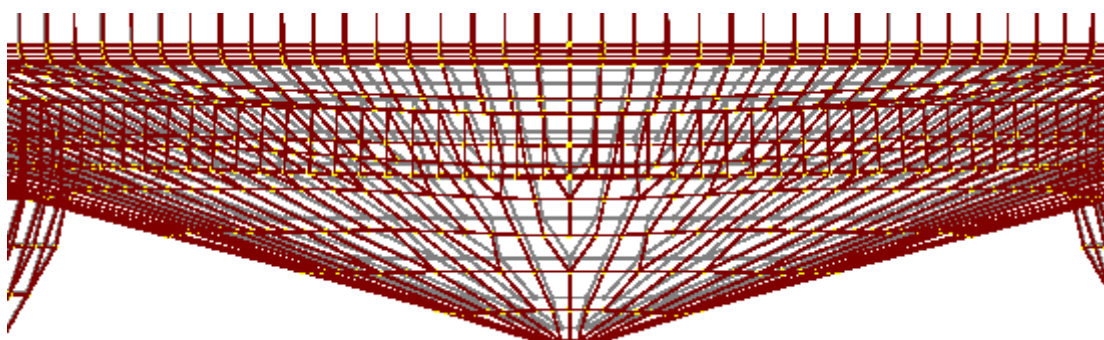
## Resultados del análisis y conclusiones

El primer paso que sería necesario dar para realizar la verificación del tanque sería analizar la deformación del mismo, junto con los esfuerzos internos y las tensiones obtenidos.

- Deformaciones

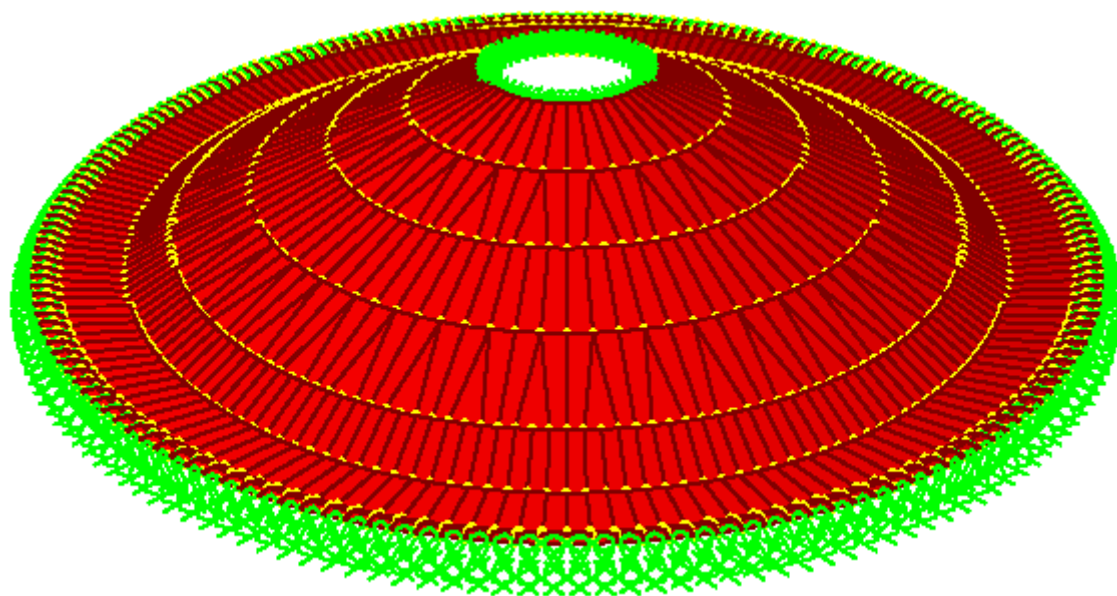
Al observar la deformada obtenida por medio del programa podemos notar lo siguiente:

- 1) En el cilindro se produce un descenso que toma prácticamente en todos los puntos un valor cercano a los siete decimos de milímetro. Además, se origina una deformación a lo largo de la línea perimetral del cilindro que tiende a abrir el tanque. Este efecto aumenta desde la parte superior hasta aproximadamente un cuarto de la altura donde comienza a decrecer. El fenómeno antes descrito se ve alterado en las franjas debajo de las cuales están ubicadas las patas de apoyo. En dicha zona la deformación es en sentido contrario, produciéndose un efecto similar al de pandeo.
- 2) En el cono inferior debemos analizar tres elementos por separado: la parte del cono que se encuentra por encima de la viga, la que se localiza por debajo y la viga propiamente dicha. En la primera es donde se producen las mayores deformaciones ( del orden de los 2 cm ). En la segunda las deformaciones decrecen desde valores de alrededor de 1,7 cm en las proximidades de la viga hasta cerca de 1 cm en el centro. Por su parte la viga sufre una deformación de flexión combinada con torsión alcanzando sus máximos cerca del centro de la misma donde toma valores del orden de 1 cm.



- Figura 17: Deformada del cono inferior

- 3) Por su parte en el cono superior lo más importante surge del análisis realizado sobre el modelo independiente de esta parte del tanque. En él notamos que aparecen deformaciones por flexión en la membrana, siendo esto una contradicción con la teoría de Belluzi.



• Figura 18: Deformada cono superior

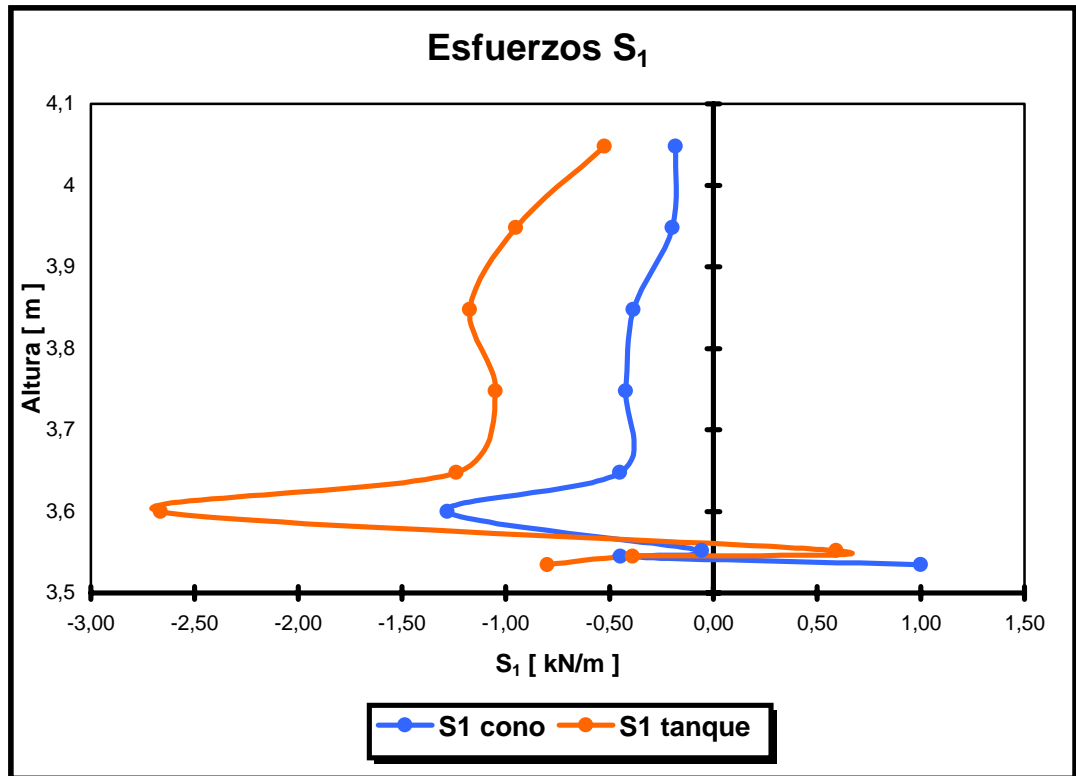
- Esfuerzos internos y tensiones

El primer análisis que se realizó de las tensiones y esfuerzos internos fue lo que motivó el modelado del cono superior en forma independiente. La distribución sin una variación definida en los diagramas de tensiones y esfuerzos, principalmente en la dirección de los meridianos, no es clara ni de fácil interpretación.

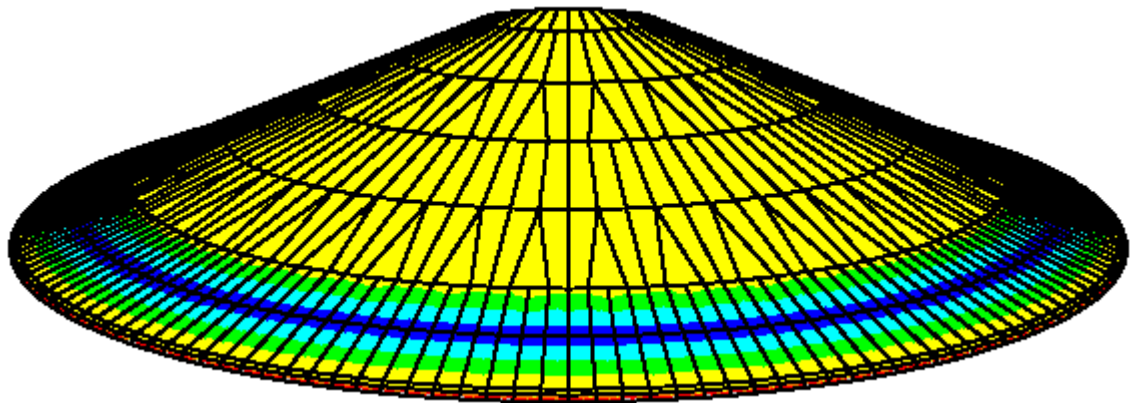
Se puede notar cierta tendencia en el reparto de las tensiones y los esfuerzos internos. En el cilindro las fuerzas dirigidas según los paralelos toman valores positivos que van aumentando desde la parte superior hasta el encuentro con el cono inferior. En el cono superior las fuerzas negativas y disminuyen con la altura, situación contraria a lo que ocurre en el cono inferior donde tenemos fuerzas positivas y disminución a medida que descendemos. Para el caso de las fuerzas orientadas según los meridianos, encontramos que en las zonas ubicadas directamente por encima de las patas de apoyo predomina la compresión, como en las partes entre ellas prepondera la tracción; en ambos casos con valores máximos en la parte inferior del cilindro.

Al introducirnos en el análisis del modelo correspondiente al cono superior, vemos que en este caso que tanto la variación de las tensiones como de las fuerzas responde de forma más aproximada a la teoría de Belluzi. Para ambas los valores son negativos y con una variación aproximadamente lineal hasta el punto donde se produce la flexión de la membrana. En ese lugar en los valores de las tensiones y las fuerzas se provoca un salto considerable; y la distorsión se intensifica más en las proximidades de los apoyos.

Para graficar la variación de las fuerzas  $S_1$  y  $S_2$  se obtuvieron los valores de estas en los nodos de los elementos y luego se promediaron los valores correspondientes a los nodos comunes a dos elementos.

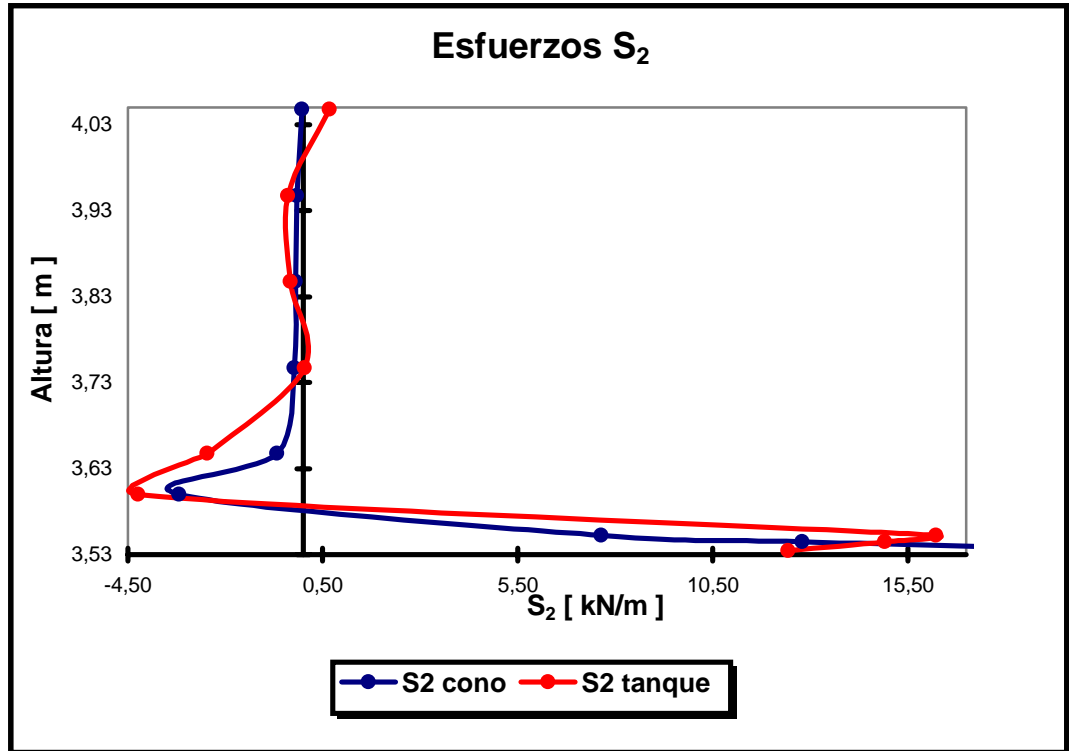


• Figura 19: Gráfica con la variación de los esfuerzos  $S_1$  obtenido para el modelo del tanque y el del cono

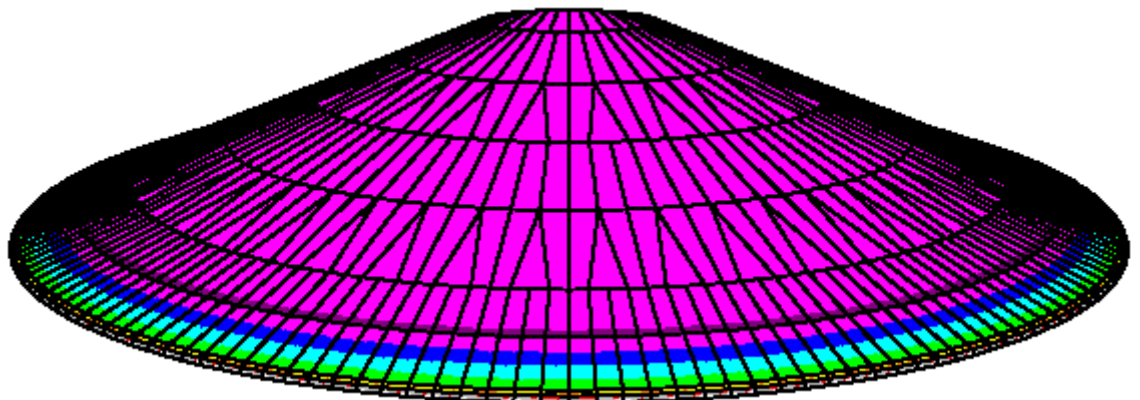


• Figura 20: Diagrama de fuerzas  $S_1$  correspondiente al modelo del cono superior





• Figura 21: Gráfica con la variación de los esfuerzos  $S_2$  obtenido para el modelo del tanque y el del cono



• Figura 22: Diagrama de fuerzas  $S_2$  correspondiente al modelo del cono superior

- Conclusión

A pesar de lo expuesto en los párrafos anteriores, donde se hizo notar que la variación de tensiones en gran parte del tanque no está bien definida, podemos observar que hay puntos o zonas donde las tensiones alcanzan valores por encima de los que podrían considerarse admisibles. Estos puntos los encontramos en la sección del cono inferior entre el cilindro y la viga, en la viga misma en su parte central principalmente, en la unión del tanque con las patas de apoyo y en las patas de apoyo. Podemos ver que en todos los casos son partes donde la geometría es complicada, uniones o donde se producen cambios de pendientes. Lo que sería recomendable hacer con respecto a este problema es proporcionar en estos lugares algún tipo de refuerzo como podría ser aumentar el espesor de la membrana.

Para terminar es necesario decir que no estaría de más comparar los resultados obtenidos con el SAP2000 con algún otro método de cálculo, como podría ser la teoría de Belluzi o algún otro programa de cálculo. Además, se notó que en la versión de dicho programa utilizada para esta práctica, SAP2000 Non Linear Versión 7.21, la interfase gráfica no resulta clara en muchas situaciones al mostrar los diagramas de tensiones y esfuerzos internos de los elementos shell con sus correspondientes valores. Este problema no se presentó al analizar los valores que nos muestra la planilla de output.

## Bibliografía.

SENTINELLI, FRANCISCO. Cátedra Estructuras Especiales UTNFRM 1969 – Ed. Hnos. Villafaña.

BELLUZI, ODOÑO. Scienza delle Costruzioni – Vol. III. 1957 . Ed. Nicola Zannichelli – Bologna. Italia.

SAP2000 Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures. Analysis Reference. Volume 1. Version 6.1. revised September 1996.

**Nota:** las figuras 2, 3, 4 y 5; y las expresiones correspondientes a los esfuerzos internos y las tensiones son propiedad de Computers and Structures, Inc.

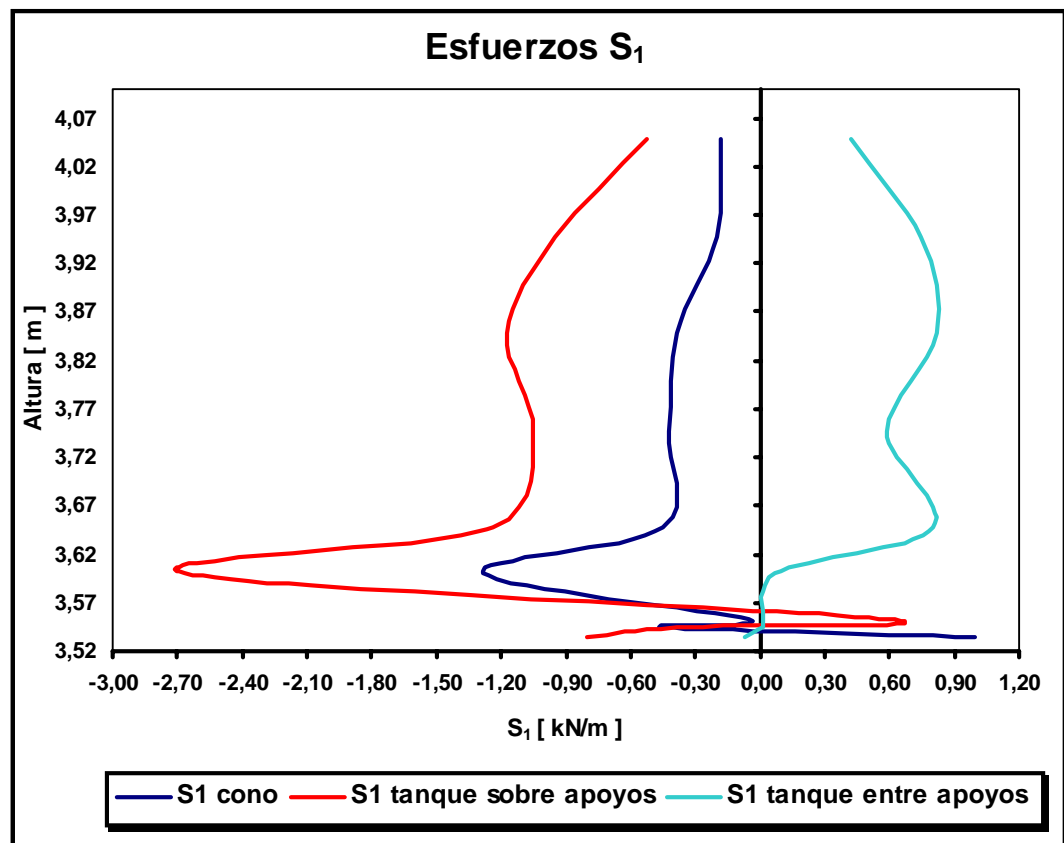
## Autores.

- González, Celina.
- Guglielmi, Ariel.
- Lucero, Daniel.
- Pina, Juan Carlos.
- Quiroga, Pablo.

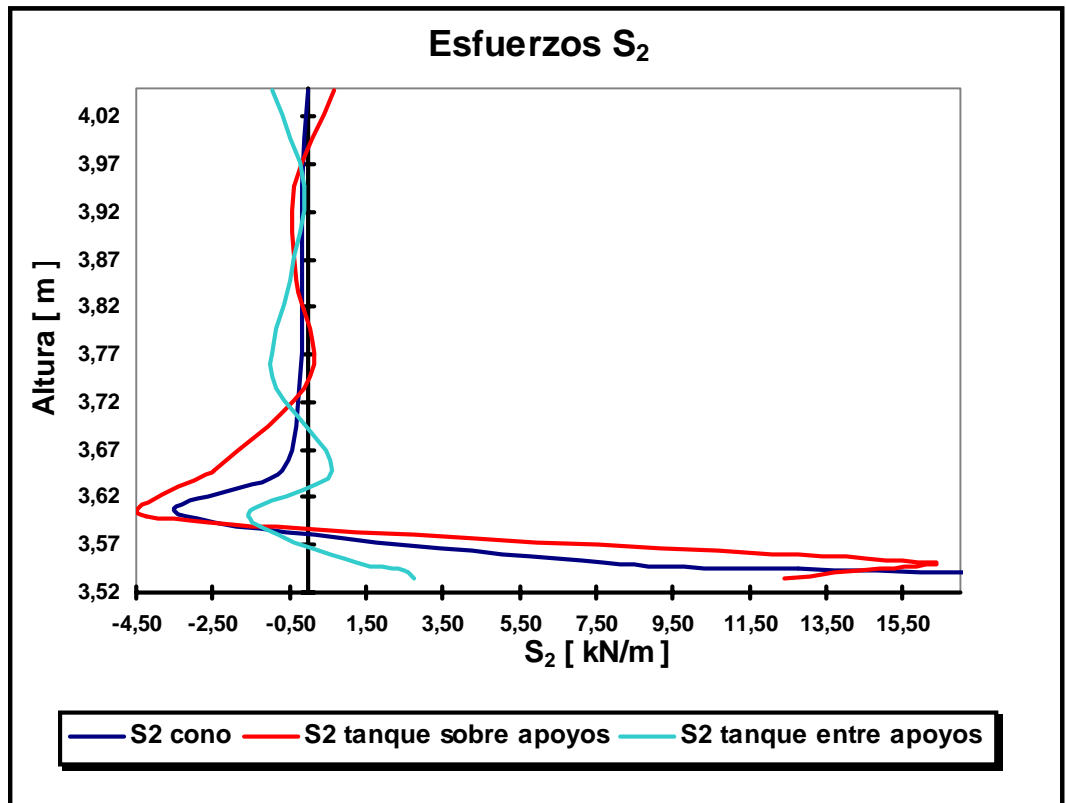
## Variación de las tensiones

- Variación en el cono superior

Para el cono superior se realizaron dos modelos de los cuales se obtuvieron los siguientes esfuerzos; para el modelo del tanque completo se analizó la variación en la zona ubicada sobre el apoyo y la que se encuentra en los mismos.



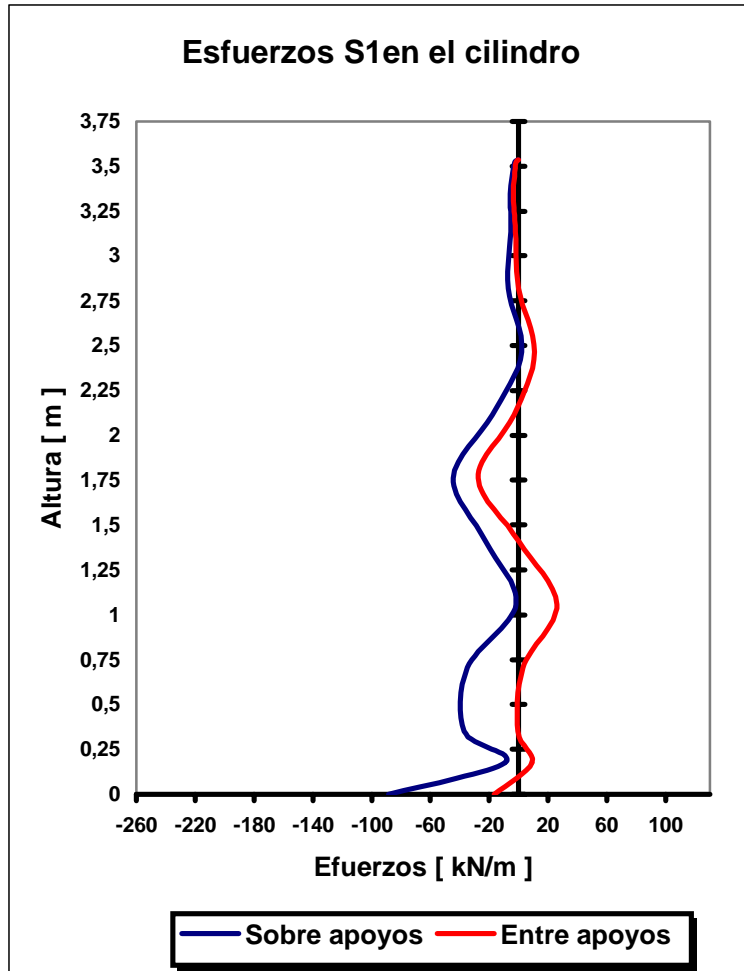
• Figura 23: Esfuerzos  $S_1$  en el cono superior



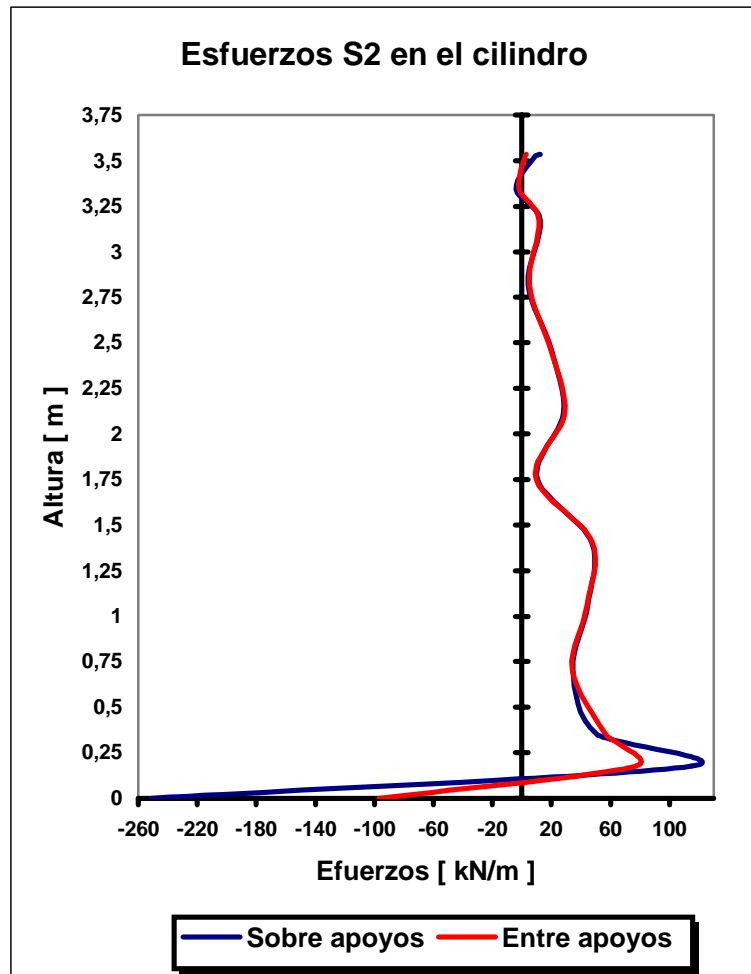
• Figura 24: Esfuerzos  $S_2$  en el cono superior

- Variación en el cilindro

En este caso también sólo hay un modelo para el cual se analizó la variación en la zona ubicada sobre el apoyo y la que se encuentra entre los mismos.



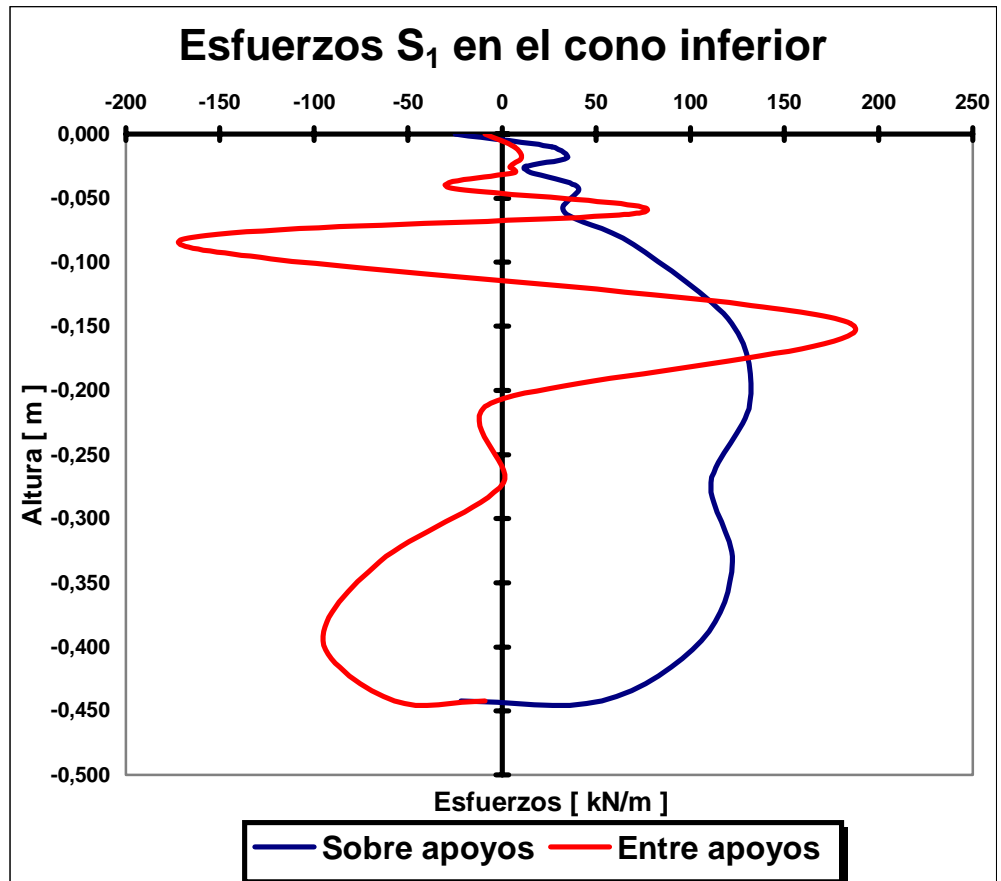
• Figura 25: Esfuerzos  $S_1$  en el cilindro



• Figura 26: Esfuerzos S<sub>2</sub> en el cilindro

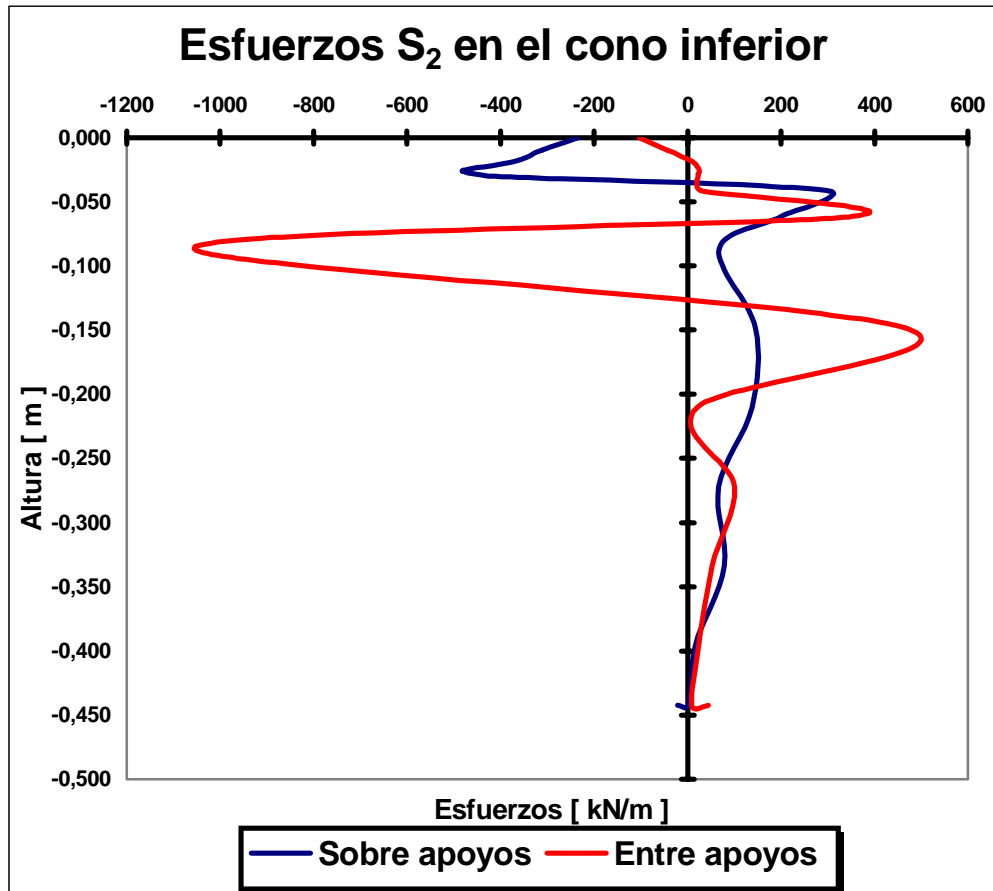
- Variación en el cono inferior

En el cilindro inferior se optó por graficar dos series de valores por cada esfuerzo, al igual que en el caso anterior. Lo importante es hacer notar que a 86 cm por debajo del empalme entre el cilindro y el cono inferior se encuentra la viga circular que rodea el cono inferior.



• Figura 27: Esfuerzos  $S_1$  en el cono inferior

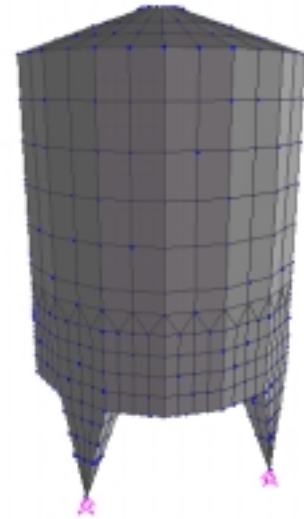




• Figura 28: Esfuerzos  $S_1$  en el cono superior

## 2.3.1 Introducción.

Los problemas que implican los sólidos tridimensionales de Simetría Axial (o sólidos de revolución) sometidos a carga axial simétrica se reducen a problemas bidimensionales, debido a la total simetría respecto al eje "z" todas las deformaciones y esfuerzos son independientes del ángulo de rotación  $\theta$ . El problema tiene que verse como un problema bidimensional en rz, definido sobre el área revolvente.



## Formulación de Simetría Axial

Se recomienda consultar Apuntes del **Ing. Daniel López (2002)- Formulación de Elementos Finitos**- Cátedra: Estructuras Laminares -U.N.C.

## 2.3.2 Modelado por Elemento Finito.

A continuación realizaremos la aplicación en un Tanque de Acero Inoxidable, donde la región bidimensional definida por la envolvente se divide en elementos plano isoparamétrico de 4 nodos. El tanque tiene las siguientes Geometría y dimensiones:

- i.  $H = 4476$  mm.
- ii.  $D = 1550$  mm.
- iii.  $h1 = 525$  mm.
- iv.  $h2 = 3522$  mm.
- v.  $h3 = 429$  mm.
- vi. **Espesor 2 mm.**

ACERO INOXIDABLE			
Propiedad	Símbolo	Unidad	Valor
Densidad	$\delta$	[ kg/m <sup>3</sup> ]	7,79
Peso específico	$\gamma$	[ kN/m <sup>2</sup> ]	77,9
Módulo de elasticidad	$e$	[ MPa ]	193000
Módulo de Poisson	$\mu$	[ adim. ]	0,25

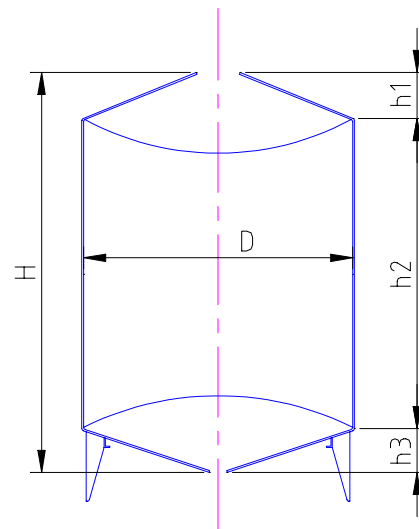


Fig. N°1-Esquema del Tanque.

Definidas la Geometría, y el material con que se materializo el mismo, se procede a la Modelacion con elementos de 4 nodos(cuadrilátero), utilizando el software Sap2000, para los estados de carga de Peso Propio y la Presión Hidrostática del Agua.

Con respecto al elemento usado haremos los siguientes comentarios:

Este software nos da la facilidad de poder trabajar con elementos triangulares, cuadriláteros de 4 nodos y cuadriláteros de 9 nodos. Recomienda la utilización del ultimo elemento citado, y para poder definir la estructura correctamente, especifica según el plano en que estemos trabajando, la dirección radial, el eje de simetría y la dirección circunferencial, por ejemplo si nosotros hemos definido nuestro elementos en el plano x-y, la dirección radial será la paralela al eje global x, el eje de simetría será el paralelo al eje y, y por ultimo la dirección circunferencial lo será con respecto al eje global z.

También indica que los elementos deben ser definidos en el eje positivo, cuando este corresponde al eje radial.

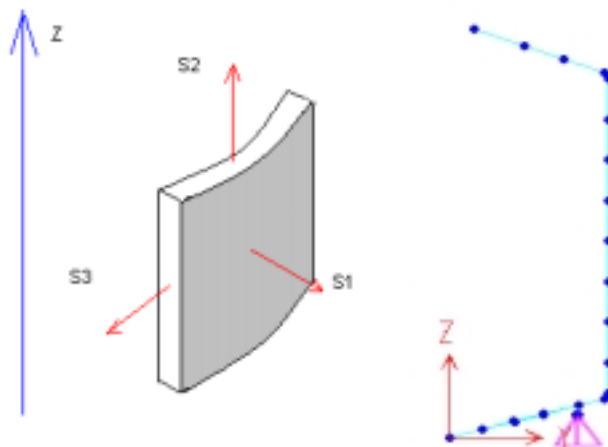
Con respecto a la definición de los elementos, los mismos deberán respetar un orden preestablecido, ya sean elementos de 3, 4 o 9 nodos, con respecto a los ejes globales del sistema.

En cuanto a los Tensiones (stresses) **S11, S22, S33, S12, S13, y S23** se corresponde con  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$  y  $\sigma_{23}$  respectivamente, en el sistema de coordenadas local del elemento.

Como anteriormente se ha comentado los modelos de elementos Asolid son representativos de la estructura axi-simetrica, cuyas tensiones y deformaciones no varían en la dirección circunferencial, por lo que las tensiones de corte ( $\sigma_{12}$  ,  $\sigma_{13}$  ) y sus correspondientes deformaciones ( $\gamma_{12}$  ,  $\gamma_{13}$  ) son iguales a cero.

### 2.3.3 Aplicación al Tanque Metálico.

La modelación se realizo con un total de 23 elementos de 4 nodos, densificando la malla en la sección de mayor gradiente tensional, como por ejemplo los encuentro de los conos superior e inferior con el cilindro.



**Fig. N°2-Eschema de Modelado del Tanque.**

Del análisis de los resultados (nodales), se establecieron los valores y variación de los mismos a lo largo del perímetro (espesor medio) del tanque, para los estados de acciones combinados de Peso Propio y Carga Hidrostática. En nuestro caso, y como indica la figura, la modelación se realizó en el plano y-z, con lo que para nuestro fin nos interesa obtener los valores de las tensiones **S3** y **S2**, es decir en la dirección circunferencial y en la dirección del eje de simetría.

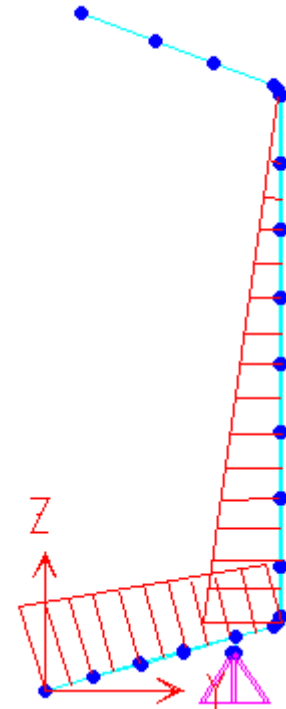
### 2.3.4 Condiciones de Borde o de Frontera.

Las condiciones de borde del Tanque se materializa mediante 4 apoyos, que difieren en 90° cada uno, en la planta circular del Tanque. Dichas "Patas" son de sección variable en toda su longitud, partiendo de la unión con el cono inferior con una sección cajón hasta una sección circular en su otro extremo de apoyo.

También se observa que el cono inferior posee un refuerzo materializado con un perfil "C" en todo su perímetro.

En nuestro caso la imposición de las condiciones de borde a nuestro modelo, difieren notablemente de las condiciones reales, ya que se ha adoptado que por el refuerzo del perfil "C" se transmita las reacciones mediante un apoyo de segunda especie.

Esto quiere decir que dicha condición se repetirá en toda la circunferencia del tanque, lo que nos da una aproximación del gradiente de tensiones generados en las secciones próximas a los apoyos reales.



**Fig. N°3-Distribución de la Presión Hidrostática.**

En la fig.N°3 se puede apreciar el Modelo de elementos de Simetría Axil, realizado en Sap2000, con sus correspondientes gradientes de presión Hidrostática en toda la altura del cilindro y el cono inferior.

### 2.3.5 Variación de las Tensiones en la Sección Media del Tanque.

A continuación se presentan 3 Gráficos en el que se aprecian la variación de las tensiones **S3** y **S2**, con respecto al perímetro del tanque(sección media), para el estado de Peso Propio + Presión Hidrostática, con la condición de borde descripta anteriormente.

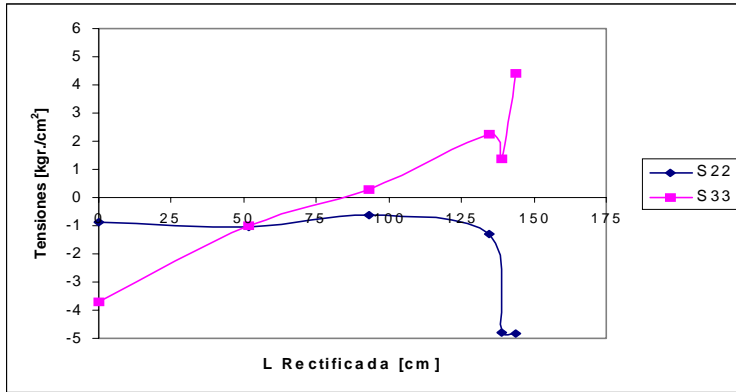


Gráfico N°1

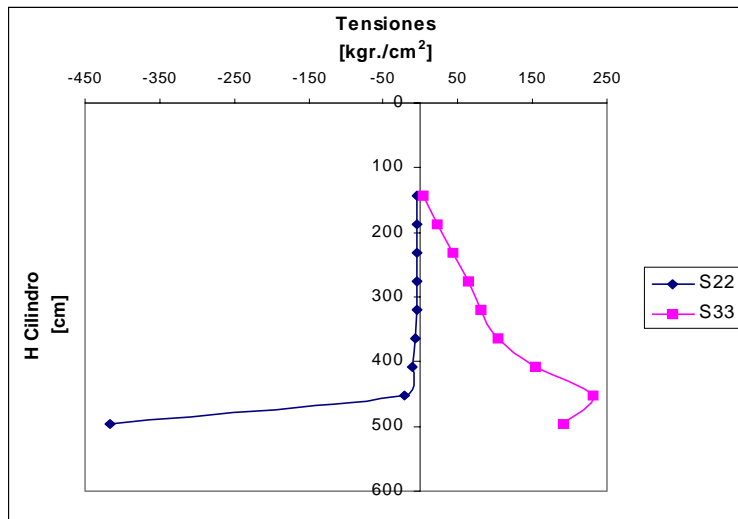


Gráfico N°2

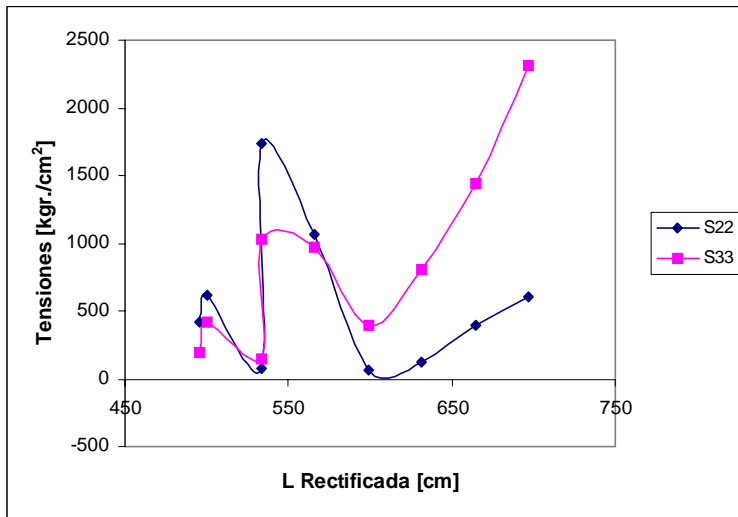


Gráfico N°3

En los **Gráfico N°1 y N°3**, se realizaron tomando la longitud rectificada de las transiciones del cono superior y el inferior con respecto al cilindro.

Para la determinación de las tensiones en los puntos de la sección media, tenemos dos posibilidades, una es definir el problema estudiado con elementos de mas de 4 nodos, de tal forma que los nodos de la altura media del elemento coincidan con los puntos de la sección media del cilindro, esto se puede lograr utilizando la opción de un elementos de 9 nodos.

La segunda posibilidad es la de utilizar elementos de 4 nodos, en la que para poder determinar las tensiones en la sección media se debe aplicar técnicas de alisado, ya que en este caso se hizo coincidir el espesor del tanque con la altura del elemento, por lo que obtenemos como datos las tensiones en los nodos de los elementos.

Una técnica de alisado más grosera, y que fue la adoptada, fue promediar los valores de las tensiones de los nodos de un mismo elemento, y realizar una segunda operación promediando los mismos con los valores obtenidos del elemento contiguo.

En el **Gráfico N°2** se puede apreciar la variación de las tensiones circunferenciales y paralelas al eje de simetría en toda la altura del cilindro.

### **2.3.5 Resultados del Análisis.**

*Cono Superior:* observando el **Gráfico N°1**, se puede apreciar que el gradiente de tensión **S22** se desarrolla en el campo de las tensiones de compresión, caracterizado por un “pico” de tensión en la zona de transición. Por lo contrario la tensión **S33**, sufre un cambio de signo en el desarrollo de la longitud del cono superior, verificándose de la misma forma que para la **S22** un “pico de tensión en la zona de transición. Recordemos que estos gráficos se confeccionaron para el estado de Peso Propio + Carga Hidrostática del agua, aunque en este caso la acción presente sea solamente la del peso propio.

*Cilindro:* del **Gráfico N°2** se observa que la tensión **S22** se desarrolla bajo el mismo signo en toda la altura del cilindro, es decir bajo esfuerzo de compresión, teniendo un fuerte gradiente tensional en las proximidades de la transición con el cono inferior, alcanzando la tensión de  $416 \text{ kg/cm}^2$  aproximadamente. Con respecto a la tensión **S33** se desarrolla bajo esfuerzos de tracción llegando a valores de  $235 \text{ kg/cm}^2$  en las cercanas de la transición con el cono inferior.

*Cono Inferior:* del **Gráfico N°3** se observan elevados gradientes tensionales de **S22** y **S33** correspondientes a la longitud de la sección media comprendida entre la transición y el apoyo. Estas tensiones se desarrollan en forma mas gradual después del apoyo llegando a valores que superan  $2300 \text{ kg/cm}^2$  para **S33** y  $600 \text{ kg/cm}^2$  para **S22**.

### **2.3.6 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS DE LAS DISTINTAS APLICACIONES.**

A continuación se presenta un cuadro comparativo con los valores obtenidos para el problema propuesto utilizando tres alternativas diferentes para su resolución; Teoría de Belluzi, Método de los Elementos Finitos Elemento Plano, y Método de los Elementos Finitos Elemento de Simetría Axial.

**CUADRO COMPARATIVO DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS DE LAS DISTINTAS APLICACIONES**

<b>Esfuerzo S<sub>1</sub> [kN/m]</b>					
<b>Ubicación del punto</b>	<b>Teoría analítica</b>	<b>Elemento Shell</b>			<b>Elemento Asolid</b>
		<b>Cono</b>	<b>Tanque sobre apoyos</b>	<b>Tanque entre apoyos</b>	
<b>Extremo superior</b>	0	-0.18	-0.52	0.42	-0.2
<b>Límite tronco de cono superior - zona de empalme</b>	-0.5	-0.44	-0.39	0.01	-0.3
<b>Mitad zona de empalme superior</b>	-0.2	1.00	-0.80	-0.07	-1.2
<b>Límite zona de empalme superior - cilindro</b>	-0.2		-2.57	-2.0686	-1.2
<b>Mitad cilindro</b>	-0.5		-44.535	-27.415	-1.1
<b>Límite cilindro - zona de empalme inferior</b>	-0.8		-88.61	-16.665	-5.2
<b>Mitad zona de empalme inferior</b>	-1.7		34.635	10.270	-104.0
<b>Límite zona de empalme inferior - tronco de cono inferior</b>	-21.2		15.245	6.980	155.3
<b>Zona de apoyo</b>	37.3		69.875	-170.810	348.8
<b>Extremo inferior</b>	39.4		53.14	-57.410	151.4
<b>Esfuerzo S<sub>2</sub> [kN/m]</b>					
<b>Ubicación del punto</b>	<b>Teoría analítica</b>	<b>Elemento Shell</b>			<b>Elemento Asolid</b>
		<b>Cono</b>	<b>Tanque sobre apoyos</b>	<b>Tanque entre apoyos</b>	
<b>Extremo superior</b>	0	-0.03	0.68	-0.97	-0.9
<b>Límite tronco de cono superior - zona de empalme</b>	7.0	12.79	14.91	2.32	0.5
<b>Mitad zona de empalme superior</b>	2.0	22.02	12.43	2.75	0.3
<b>Límite zona de empalme superior - cilindro</b>	1.8		8.445	2.01	1.1
<b>Mitad cilindro</b>	23.2		10.395	9.59	15.8
<b>Límite cilindro - zona de empalme inferior</b>	50.4		-251.415	-97.035	48.0
<b>Mitad zona de empalme inferior</b>	74.4		-370.440	10.750	104.6
<b>Límite zona de empalme inferior - tronco de cono inferior</b>	669.3		-425.635	22.350	36.8
<b>Zona de apoyo</b>	200.6		67.62	-1055.855	248.8
<b>Extremo inferior</b>	7.9		1.93	9.390	577.3

## Bibliografía.

**SAP2000 Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures. Analysis Reference.  
Volume 1. Version 6.1. revised September 1996.**

**Ing. Daniel López (2002) Formulación de Elementos Finitos- cátedra: Estructura Laminares-  
U NC.**



## 3.1. Cálculo de un Tanque de Hormigón Armado

---

Aplicación Numérica  
Método de los Elementos Finitos

# Presentación

## 3.1.1. Introducción

El presente trabajo tiene por objeto presentar los resultados obtenidos del análisis numérico (Método de los Elementos Finitos), así como también una breve explicación sobre el procedimiento desarrollado y la forma de utilizar la herramienta de cálculo empleada.

En este estudio utilizando el Programa de Cálculo SAP 2000 Nom LinearVersion 7.12. Los detalles sobre la modelación se explicarán más adelante.

## 3.1.2. Geometría

A continuación vemos un esquema general de la estructura. Nuestro análisis se limitará sólo a uno de los tanques en forma individual. Un esquema más detallado del tanque se puede observar en la figura siguiente.

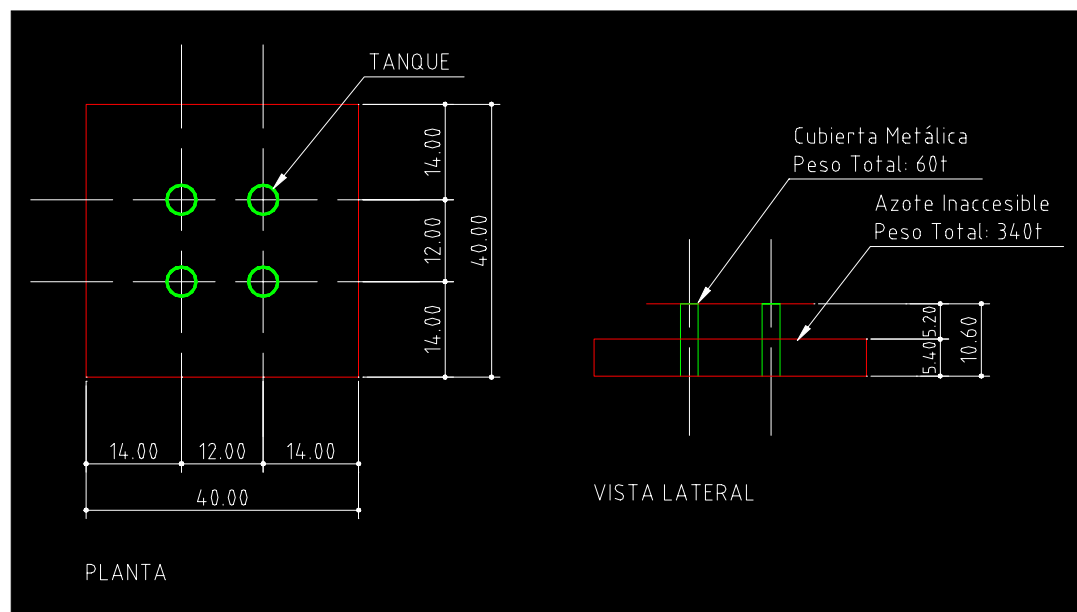


Figura 3.1.1. Esquema General de la Estructura

Descripción: El tanque tiene una altura de 10,60m. A los 8,00m existe una losa que separa el tanque de agua superior del de vino inferior. Ambas partes del tanque tienen un diámetro interior de 2,00m y un espesor del tubo de 30cm. Las losas tienen un espesor de 15cm.

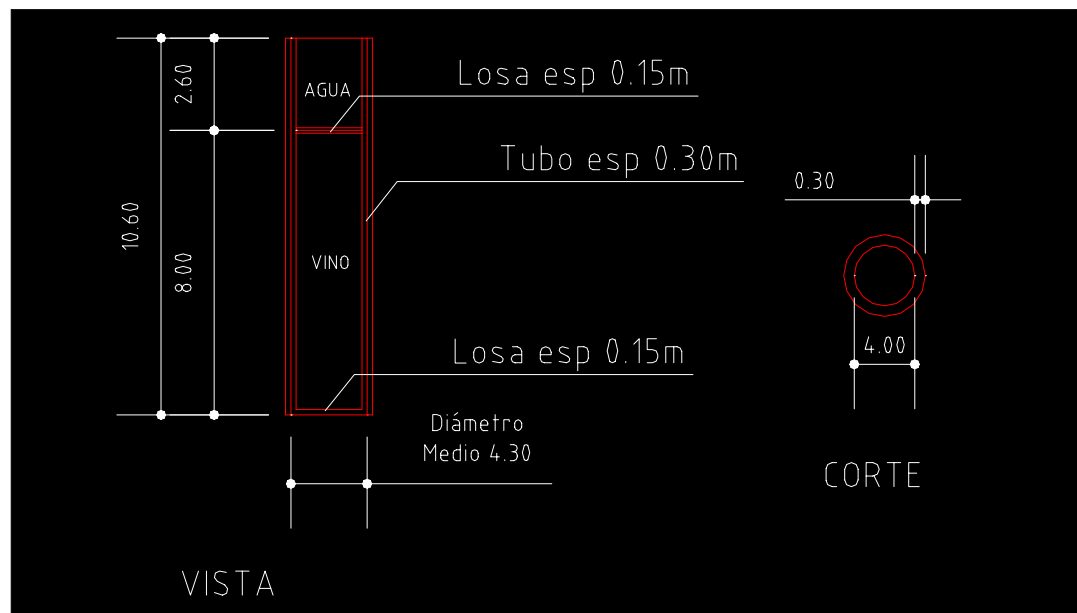


Figura 3.1.2. Esquema del Tanque de Hormigón Armado

### 3.1.3. Cargas

Las cargas que actúan sobre el tanque son las siguientes: Peso propio, peso de la cubierta metálica, peso del agua del tanque superior, peso de la azotea inaccesible y peso del vino del tanque inferior. Además también se realizó una combinación de todas las cargas. Estas cargas se aplicarán al modelo de acuerdo a la discretización realizada y se muestran en el siguiente cuadro.

#### Carga de agua

Esta carga se aplicará en los elementos Shell y corresponde a la presión hidrostática del agua sobre las paredes y al peso de la misma sobre la losa del tanque superior.

z [m]	h [m]	$\gamma \cdot h$ [kg.m]	Presión [kg/m <sup>2</sup> ]	Elemento
10,60	0,00	0		
10,40	0,20	200	100	1
10,00	0,60	600	400	2
9,60	1,00	1000	800	3
9,20	1,40	1400	1200	4
8,80	1,80	1800	1600	5
8,60	2,00	2000	1900	6
8,40	2,20	2200	2100	7
8,27	2,33	2330	2265	8
8,13	2,47	2470	2400	9
8,00	2,60	2600	2535	10

### Carga de vino

Esta carga se aplicará en los elementos Shell y corresponde a la presión hidrostática del vino sobre las paredes y al peso de la misma sobre la losa del tanque inferior.

z [m]	h [m]	g . h [kg.m]	Presión [kg/m <sup>2</sup> ]	Elemento
8,00	0,00	0		
7,87	0,13	130	65	1
7,73	0,27	270	200	2
7,60	0,40	400	335	3
7,40	0,60	600	500	4
7,20	0,80	800	700	5
6,80	1,20	1200	1000	6
6,40	1,60	1600	1400	7
6,00	2,00	2000	1800	8
5,60	2,40	2400	2200	9
5,20	2,80	2800	2600	10
4,80	3,20	3200	3000	11
4,40	3,60	3600	3400	12
4,00	4,00	4000	3800	13
3,60	4,40	4400	4200	14
3,20	4,80	4800	4600	15
2,80	5,20	5200	5000	16
2,40	5,60	5600	5400	17
2,00	6,00	6000	5800	18
1,60	6,40	6400	6200	19
1,20	6,80	6800	6600	20
0,80	7,20	7200	7000	21
0,60	7,40	7400	7300	22
0,40	7,60	7600	7500	23
0,27	7,73	7730	7665	24
0,13	7,87	7870	7800	25
0,00	8,00	8000	7935	26

### Carga de Techo

Se aplicará en los nodos superiores, y se obtuvo dividiendo la carga por tanque por el número de nodos.

$$\begin{aligned} \text{Carga total} &= 60000 \text{ kg} \\ \text{Carga/tanque} &= 15000 \text{ kg} \\ \text{Carga/tanque.nodo} &= 417 \text{ kg} \end{aligned}$$

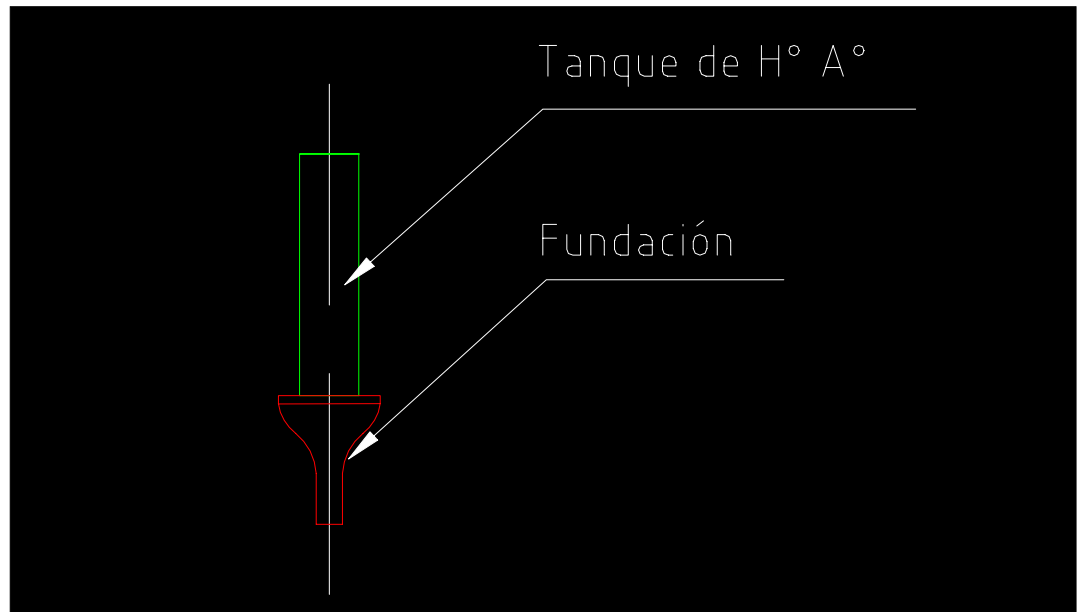
### Carga de la azotea inaccesible

Se aplicará en los nodos a la altura de los 5,40m, y se obtuvo dividiendo la carga por tanque por el número de nodos.

$$\begin{aligned} \text{Carga total} &= 1360000 \text{ kg} \\ \text{Carga/tanque} &= 340000 \text{ kg} \\ \text{Carga/tanque.nodo} &= 9444 \text{ kg} \end{aligned}$$

### 3.1.4. Vinculación

La fundación a utilizar podría llegar a ser del tipo que se muestra a continuación:

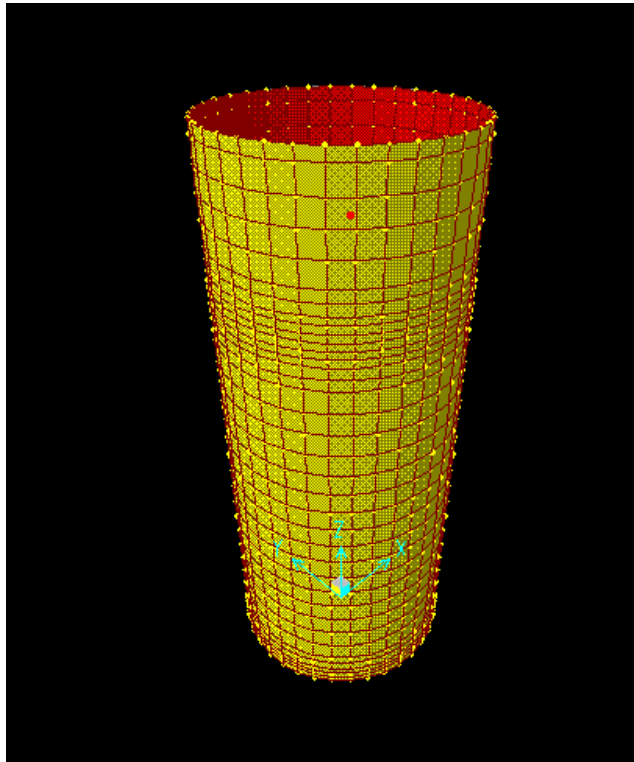


**Figura 3.1.3.** Esquema de Fundación

Debido a esto es que se adoptó en el modelo empotrar todos los nodos inferiores.

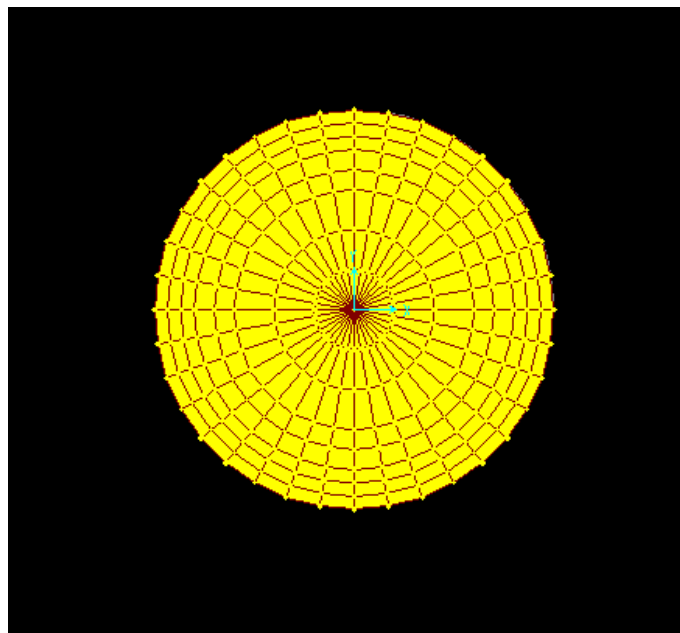
### 3.1.5. Modelo

A continuación puede verse un esquema del modelo utilizado. En el mismo se puede observar como las zonas de unión entre las losas y el tubo se discretizaron con elementos más chicos, debido a la concentración de tensiones que ahí se produce.



**Figura 3.1.4.** Discretización del Cilindro

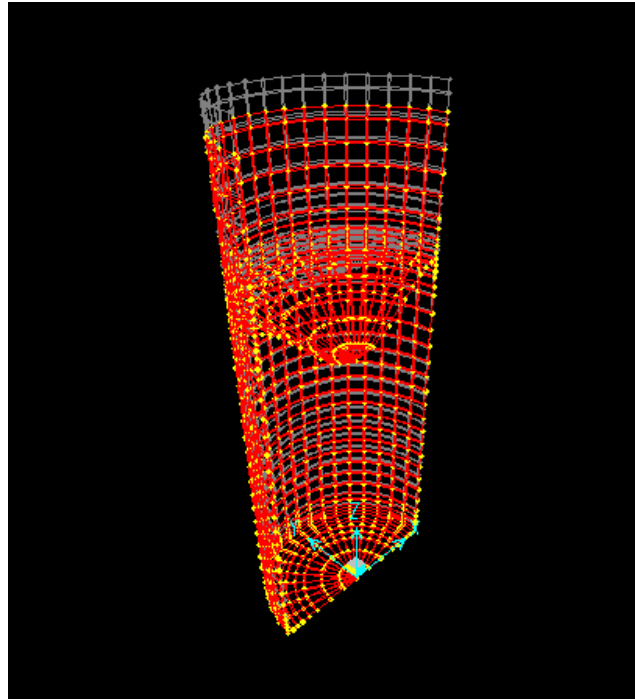
En el esquema siguiente se observa la discretización hecha en las losas, donde se aplica el mismo criterio de discretización que en el tubo.



**Figura 3.1.5.** Discretización de las Losas

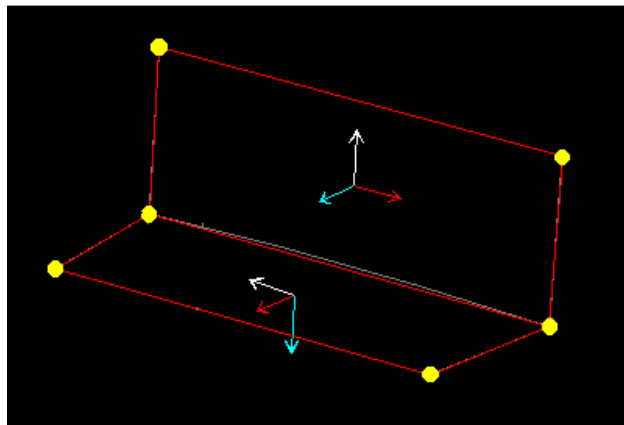
### 3.1.6. Resultados

Los resultados del análisis hecho pueden verse a continuación. Primero veremos la deformada obtenida para la combinación donde actúan todas las cargas a la vez.



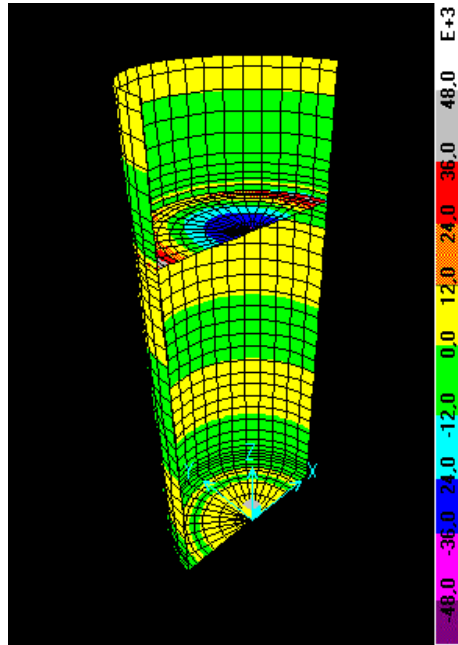
**Figura 3.1.6.** Deformada del Tanque para la combinación en que actúan todas las cargas

En la siguiente Figura podemos ver la orientación de los ejes locales que utiliza el Programa SAP 2000, donde el eje rojo corresponde al 1-1, el blanco al 2-2 y el celeste al 3-3.

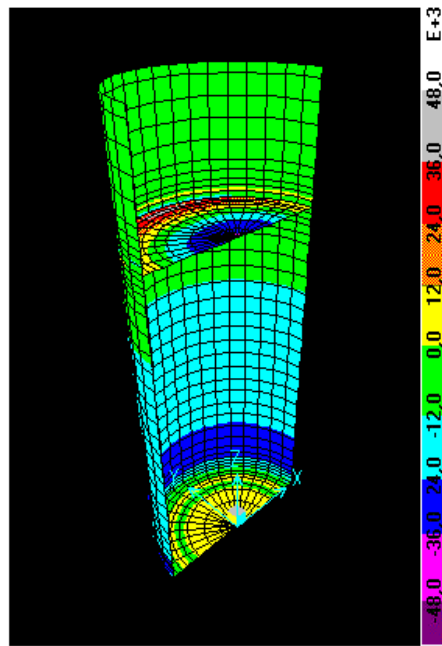


**Figura 3.1.7.** Ejes locales

La variación de tensiones a lo largo del cilindro y las losas pueden verse a continuación: Primero la variación de las tensiones en sentido tangencial y luego en sentido vertical (paralelo al eje z).



**Figura 3.1.8.** Tensiones S11 para el estado en que actúan todas las cargas



**Figura3.1.9.** Tensiones S22 para el estado en que actúan todas las cargas



A continuación veremos las variaciones de los momentos M11 y M22 a lo largo de un plano vertical. De acuerdo con la dirección de los ejes de la Figura 3.1.7. El M11 corresponde al momento a lo largo de eje 1-1 y el M22 a lo largo del 2-2.

## Momentos [kgm/m]

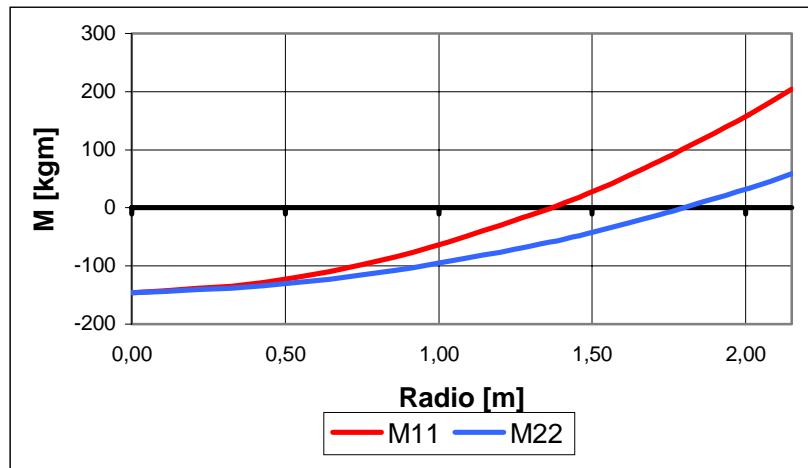
### LOSA Estado de Carga Peso Propio

	Elemento	Nodo	M11	M22
0,00		76	-145,61	-145,61
0,43	38	74	-128,61	-133,79
0,86	37	72	-84,34	-107,62
1,29	36	70	-13,96	-66,72
1,51	4638	4326	29,03	-41,39
1,72	4639	68	80,71	-11,78
1,86	4710	4362	118,51	10,07
2,01	4711	4364	159,75	33,73
2,15	4712	43	204,03	59,15

### TUBO

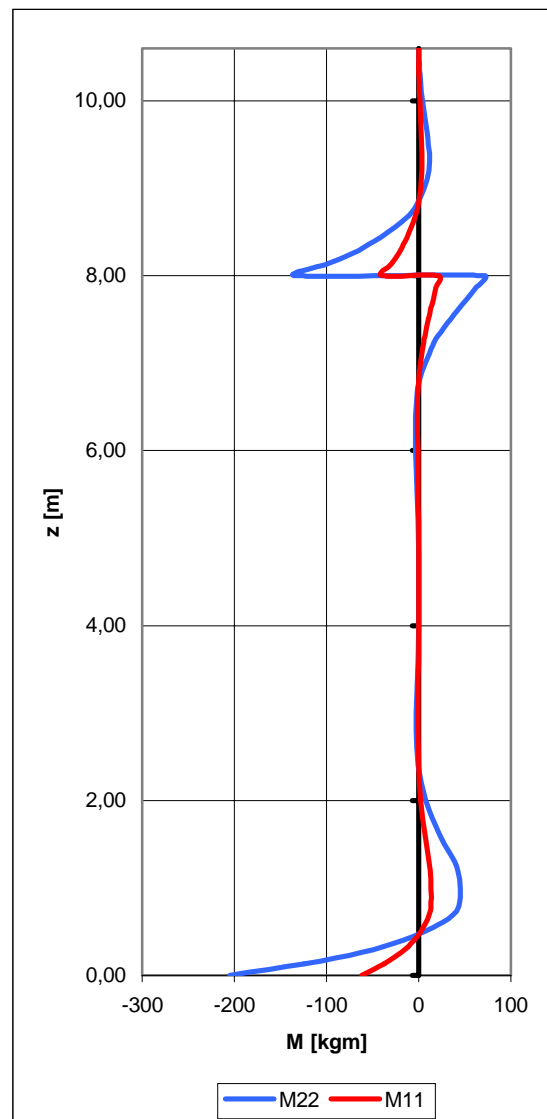
	Elemento	Nodo	M11	M22
10,60		57	0,00	0,00
10,40	28	55	0,16	0,55
10,00	27	53	1,27	4,24
9,60	26	51	2,89	9,63
9,20	25	49	3,29	10,97
8,80	24	47	-0,89	-2,97
8,60	4139	3969	-6,12	-20,41
8,40	4138	45	-14,27	-47,57
8,26	3923	3827	-21,48	-71,60
8,13	3922	3825	-30,07	-100,23
8,00	<b>3921</b>	<b>43</b>	<b>-39,80</b>	<b>-132,68</b>
8,00	<b>3920</b>	<b>43</b>	21,35	71,17
7,87	3920	3823	18,73	62,42
7,73	3919	3821	15,63	52,08
7,60	3918	41	12,45	41,49
7,40	4137	3967	8,07	26,89
7,20	4136	39	4,55	15,17
6,80	19	37	0,27	0,91
6,40	18	35	-1,09	-3,64
6,00	17	33	-1,00	-3,34
5,60	16	31	-0,52	-1,74
5,20	15	29	-0,13	-0,44
4,80	14	27	0,06	0,21
4,40	13	23	0,09	0,30
4,00	11	21	-0,02	-0,08
3,60	10	19	-0,27	-0,89
3,20	9	17	-0,59	-1,97
2,80	8	15	-0,74	-2,47
2,40	7	13	-0,11	-0,36
2,00	6	11	2,25	7,51
1,60	5	9	6,97	23,24
1,20	4	7	12,67	42,23
0,80	3	5	13,11	43,71
0,60	4135	3965	7,54	25,12
0,40	4134	2	-5,03	-16,76
0,26	3812	3751	-18,59	-61,98
0,13	3811	3749	-37,22	-124,06
0,00	3810	1	-61,48	-204,94

Diagramas de variaciones de momentos.



Equilibrio nodo 43. Unión losa con tubo

-132,68  
 204,03  
 71,17  
 SM = 0,18 Verifica



Tensiones [kg/cm<sup>2</sup>.m]

W = 3750 cm<sup>3</sup>/m

Estado de Carga

LOSA

Peso Propio

	Elemento	Nodo	T11	T22
0,00		76	3,88	3,88
0,43	38	74	3,43	3,57
0,86	37	72	2,25	2,87
1,29	36	70	0,37	1,78
1,51	4638	4326	0,77	1,10
1,72	4639	68	2,15	0,31
1,86	4710	4362	3,16	0,27
2,01	4711	4364	4,26	0,90
2,15	4712	43	5,44	1,58

TUBO

W = 15000 cm<sup>3</sup>/m

	Elemento	Nodo	T11	T22
10,60		57	0,00	0,00
10,40	28	55	0,00	0,00
10,00	27	53	0,01	0,03
9,60	26	51	0,02	0,06
9,20	25	49	0,02	0,07
8,80	24	47	0,01	0,02
8,60	4139	3969	0,04	0,14
8,40	4138	45	0,10	0,32
8,26	3923	3827	0,14	0,48
8,13	3922	3825	0,20	0,67
8,00	3921	43	0,27	0,88
8,00	3920	43	0,14	0,47
7,87	3920	3823	0,12	0,42
7,73	3919	3821	0,10	0,35
7,60	3918	41	0,08	0,28
7,40	4137	3967	0,05	0,18
7,20	4136	39	0,03	0,10
6,80	19	37	0,00	0,01
6,40	18	35	0,01	0,02
6,00	17	33	0,01	0,02
5,60	16	31	0,00	0,01
5,20	15	29	0,00	0,00
4,80	14	27	0,00	0,00
4,40	13	23	0,00	0,00
4,00	11	21	0,00	0,00
3,60	10	19	0,00	0,01
3,20	9	17	0,00	0,01
2,80	8	15	0,00	0,02
2,40	7	13	0,00	0,00
2,00	6	11	0,02	0,05
1,60	5	9	0,05	0,15
1,20	4	7	0,08	0,28
0,80	3	5	0,09	0,29
0,60	4135	3965	0,05	0,17
0,40	4134	2	0,03	0,11
0,26	3812	3751	0,12	0,41
0,13	3811	3749	0,25	0,83
0,00	3810	1	0,41	1,37

## Momentos [kgm/m]

### Estado de Carga

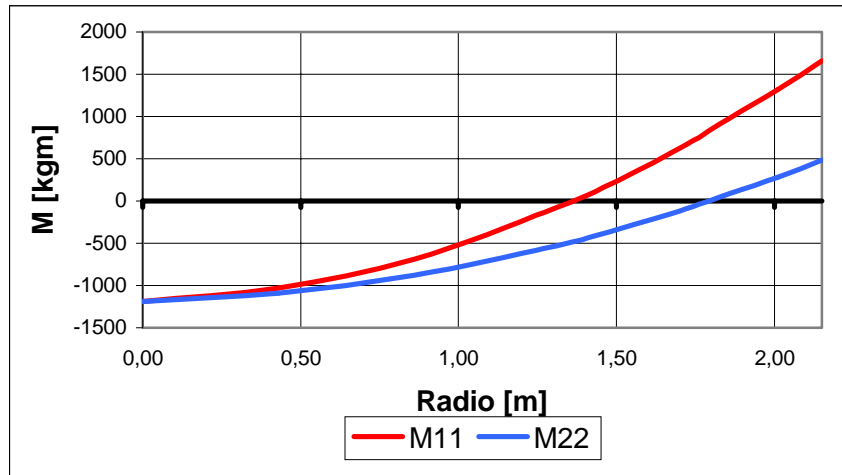
#### LOSA

#### COMB1

	Elemento	Nodo	M11	M22
0,00		76	-1190,46	-1190,46
0,43	38	74	-1026,93	-1090,72
0,86	37	72	-686,68	-878,07
1,29	36	70	-108,02	-541,83
1,51	4638	4326	245,43	-333,54
1,72	4639	68	670,42	-90,05
1,86	4710	4362	981,42	89,59
2,01	4711	4364	1320,31	284,09
2,15	<b>4712</b>	<b>43</b>	1658,36	484,65

#### TUBO

	Elemento	Nodo	M11	M22
10,60		57	-0,01	-0,03
10,40	28	55	1,22	4,07
10,00	27	53	10,03	33,45
9,60	26	51	25,23	84,08
9,20	25	49	34,67	115,56
8,80	24	47	10,72	35,73
8,60	4139	3969	-26,60	-88,68
8,40	4138	45	-89,63	-298,75
8,26	3923	3827	-148,40	-494,66
8,13	3922	3825	-221,49	-738,32
8,00	<b>3921</b>	<b>43</b>	-308,25	-1027,49
8,00	<b>3920</b>	<b>43</b>	188,87	629,58
7,87	3920	3823	149,10	497,00
7,73	3919	3821	112,20	374,01
7,60	3918	41	79,90	266,33
7,40	4137	3967	41,29	137,63
7,20	4136	39	14,21	47,36
6,80	19	37	-15,47	-51,55
6,40	18	35	-28,28	-94,27
6,00	17	33	-37,08	-123,62
5,60	16	31	-36,81	-122,70
5,20	15	29	0,33	1,09
4,80	14	27	35,45	118,16
4,40	13	23	30,06	100,20
4,00	11	21	14,34	47,79
3,60	10	19	0,86	2,85
3,20	9	17	-7,78	-25,95
2,80	8	15	-10,57	-35,24
2,40	7	13	-2,56	-8,54
2,00	6	11	25,90	86,32
1,60	5	9	81,71	272,36
1,20	4	7	148,57	495,21
0,80	3	5	153,43	511,41
0,60	4135	3965	87,70	292,34
0,40	4134	2	-60,03	-200,11
0,26	3812	3751	-219,37	-731,22
0,13	3811	3749	-437,99	-1459,96
0,00	3810	1	-722,69	-2408,98

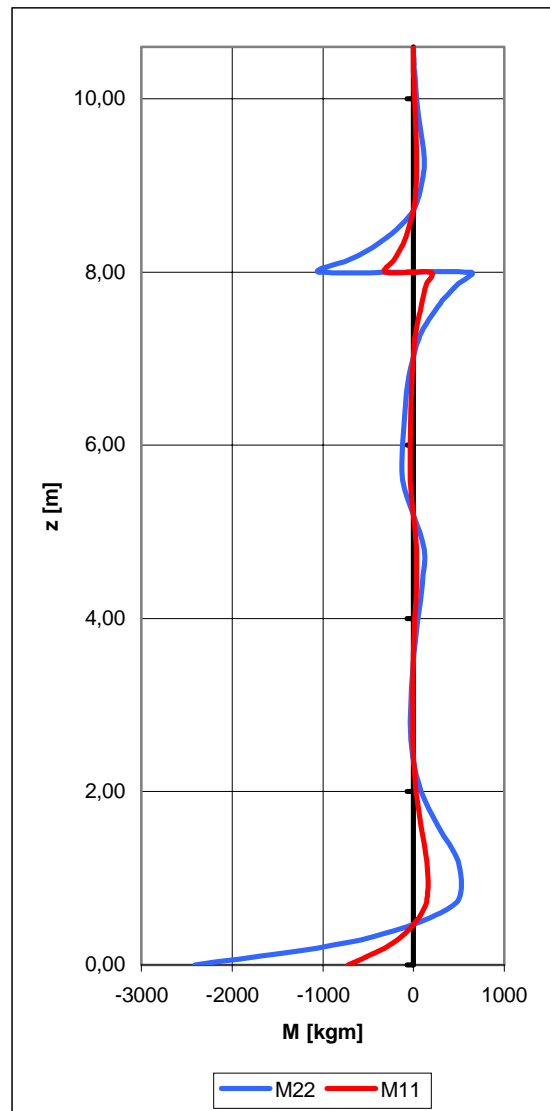


Equilibrio nodo 43. Unión losa con tubo

-1027,49  
 1658,36

629,58

SM = 1,29 Verifica



## Tensiones [kg/cm<sup>2</sup>.m]

$$W = 3750 \text{ cm}^3/\text{m}$$

### Estado de Carga

#### LOSA

#### COMB1

	Elemento	Nodo	T11	T22
0,00		76	31,75	31,75
0,43	38	74	27,38	29,09
0,86	37	72	18,31	23,42
1,29	36	70	2,88	14,45
1,51	4638	4326	6,54	8,89
1,72	4639	68	17,88	2,40
1,86	4710	4362	26,17	2,39
2,01	4711	4364	35,21	7,58
2,15	<b>4712</b>	<b>43</b>	44,22	12,92

#### TUBO

$$W = 15000 \text{ cm}^3/\text{m}$$

	Elemento	Nodo	T11	T22
10,60		57	0,00	0,00
10,40	28	55	0,01	0,03
10,00	27	53	0,07	0,22
9,60	26	51	0,17	0,56
9,20	25	49	0,23	0,77
8,80	24	47	0,07	0,24
8,60	4139	3969	0,18	0,59
8,40	4138	45	0,60	1,99
8,26	3923	3827	0,99	3,30
8,13	3922	3825	1,48	4,92
8,00	3921	43	2,06	6,85
8,00	3920	43	1,26	4,20
7,87	3920	3823	0,99	3,31
7,73	3919	3821	0,75	2,49
7,60	3918	41	0,53	1,78
7,40	4137	3967	0,28	0,92
7,20	4136	39	0,09	0,32
6,80	19	37	0,10	0,34
6,40	18	35	0,19	0,63
6,00	17	33	0,25	0,82
5,60	16	31	0,25	0,82
5,20	15	29	0,00	0,01
4,80	14	27	0,24	0,79
4,40	13	23	0,20	0,67
4,00	11	21	0,10	0,32
3,60	10	19	0,01	0,02
3,20	9	17	0,05	0,17
2,80	8	15	0,07	0,23
2,40	7	13	0,02	0,06
2,00	6	11	0,17	0,58
1,60	5	9	0,54	1,82
1,20	4	7	0,99	3,30
0,80	3	5	1,02	3,41
0,60	4135	3965	0,58	1,95
0,40	4134	2	0,40	1,33
0,26	3812	3751	1,46	4,87
0,13	3811	3749	2,92	9,73
0,00	3810	1	4,82	16,06

### 3.1.7. Comparación

El mismo análisis hecho anteriormente para el tanque de las características descritas, se hizo para un tanque de similares características pero aumentado el diámetro del mismo hasta 8m.

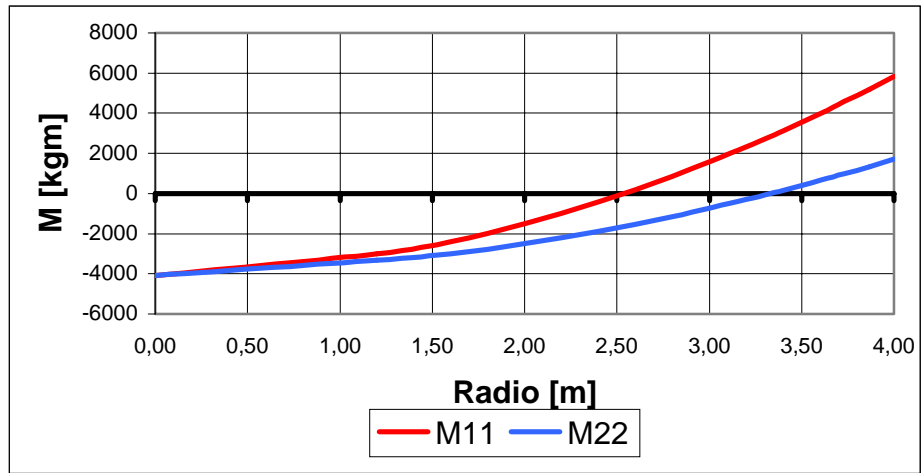
Las variaciones de momentos y tensiones son similares al tanque anterior por lo que solo veremos la comparación del momento M11 en la losa y M22 en el cilindro con sus valores respectivos, para la combinación de todas las cargas.

#### Momentos [kgm/m]

LOSA			Estado de Carga COMB1	
R	Elemento	Nodo	M11	M22
0,00		190	-4092,99	-4092,99
1,20	108	188	-3004,68	-3335,91
1,60	107	186	-2386,61	-2993,86
2,00	106	184	-1491,66	-2492,69
2,40	105	182	-407,27	-1875,70
2,80	104	178	869,22	-1144,82
3,20	103	181	2339,08	-300,86
3,40	112	198	3129,96	159,90
3,60	113	191	3985,51	650,69
3,73	109	194	4579,68	993,07
3,87	110	196	5198,58	1348,34
4,00	111	125	5839,08	1716,16

#### TUBO

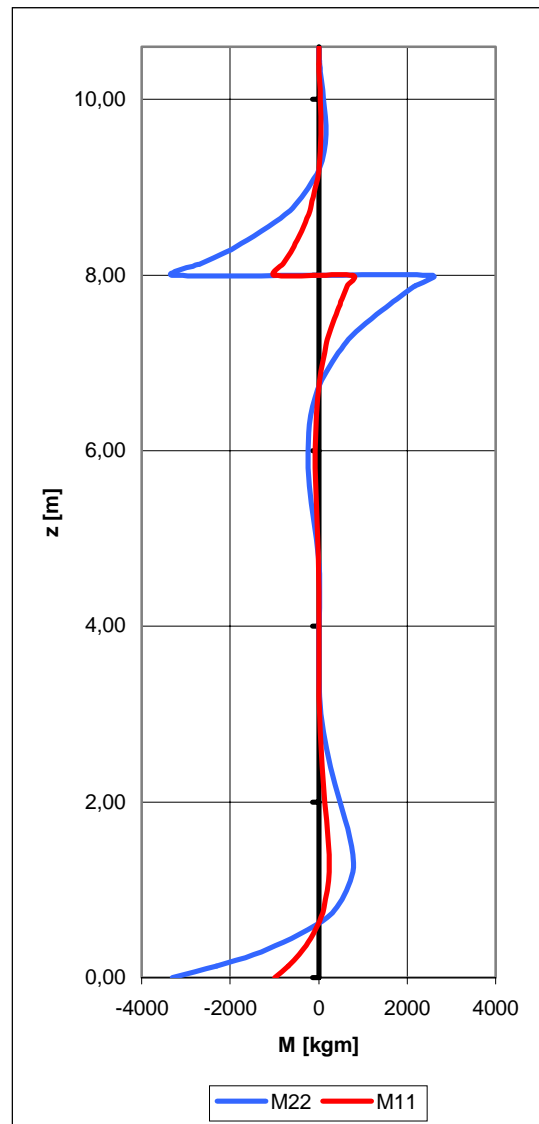
	Elemento	Nodo	M11	M22
10,60		151	0,01	0,04
10,40	86	149	5,37	17,90
10,00	85	135	32,73	109,11
9,60	74	133	48,01	160,05
9,20	73	131	1,77	5,91
8,80	72	129	-159,74	-532,48
8,60	84	147	-299,24	-997,45
8,40	83	127	-484,22	-1614,07
8,26	80	143	-633,00	-2110,01
8,13	79	141	-800,76	-2669,20
8,00	<b>78</b>	<b>125</b>	-984,59	-3281,96
8,00	<b>77</b>	<b>125</b>	767,87	2559,56
7,87	77	139	648,20	2160,67
7,73	76	137	533,10	1777,00
7,60	75	123	426,33	1421,10
7,40	82	145	285,93	953,09
7,20	81	121	171,99	573,29
6,80	67	119	19,11	63,71
6,40	66	117	-52,97	-176,56
6,00	65	115	-72,90	-243,01
5,60	64	113	-62,68	-208,93
5,20	63	111	-32,02	-106,74
4,80	62	109	-4,10	-13,66
4,40	61	107	4,36	14,53
4,00	60	105	3,04	10,12
3,60	59	103	1,44	4,78
3,20	58	101	8,51	28,36
2,80	57	99	32,38	107,94
2,40	56	97	78,45	261,51
2,00	55	89	144,40	481,35
1,60	49	87	211,37	704,58
1,20	48	85	232,35	774,50
0,80	47	83	122,17	407,24
0,60	51	91	-18,42	-61,41
0,40	50	80	-240,10	-800,33
0,26	54	95	-441,37	-1471,23
0,13	53	93	-690,91	-2303,02
0,00	52	79	-992,12	-3307,05



Equilibrio nodo 43. Unión losa con tubo

-3281,96  
5839,08

2559,56  
SM = -2,44 Verifica





## Tensiones [kg/cm<sup>2</sup>.m]

$$W = 3750 \text{ cm}^3/\text{m}$$

### Estado de Carga

#### LOSA

#### COMB1

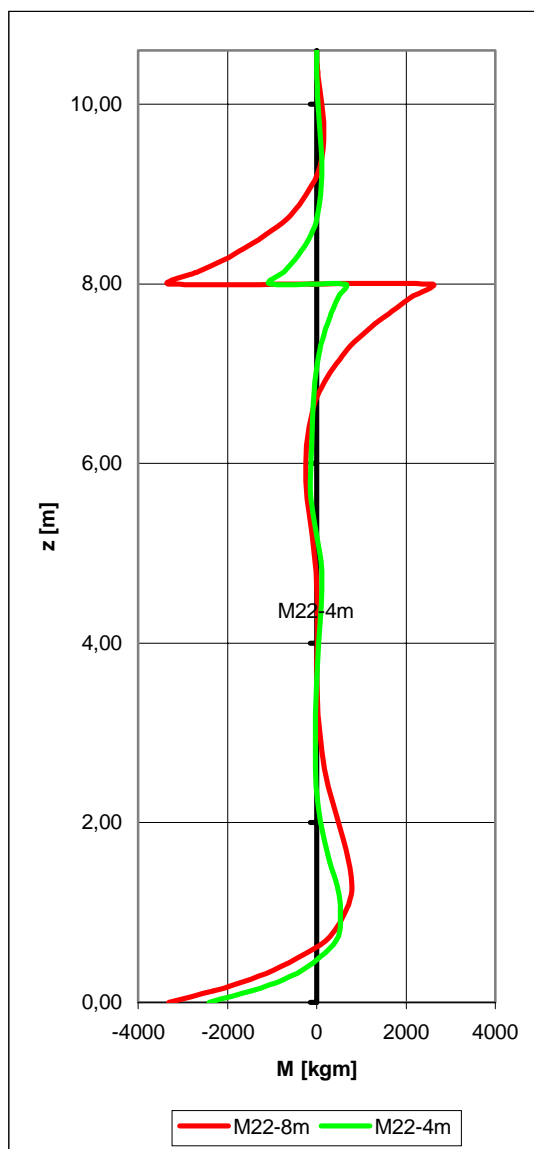
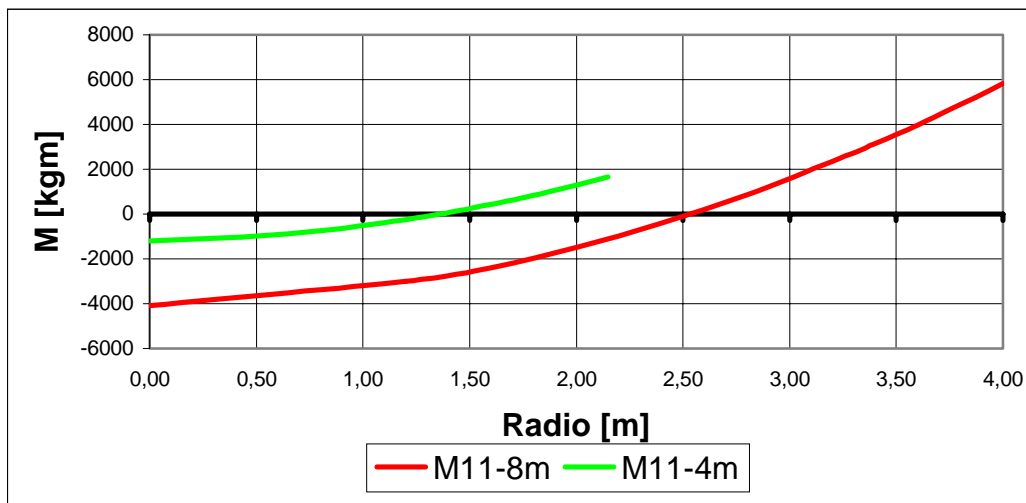
	Elemento	Nodo	T11	T22
0,00		76	109,15	109,15
0,43	38	74	80,12	88,96
0,86	37	72	63,64	79,84
1,29	36	70	39,78	66,47
1,51	4638	4326	10,86	50,02
1,72	4639	68	23,18	30,53
1,86	4710	4362	62,38	8,02
2,01	4711	4364	83,47	4,26
2,15	<b>4712</b>	<b>43</b>	106,28	17,35

#### TUBO

$$W = 15000 \text{ cm}^3/\text{m}$$

	Elemento	Nodo	T11	T22
10,60		57	0,00	0,00
10,40	28	55	0,04	0,12
10,00	27	53	0,22	0,73
9,60	26	51	0,32	1,07
9,20	25	49	0,01	0,04
8,80	24	47	1,06	3,55
8,60	4139	3969	1,99	6,65
8,40	4138	45	3,23	10,76
8,26	3923	3827	4,22	14,07
8,13	3922	3825	5,34	17,79
8,00	3921	43	6,56	21,88
8,00	3920	43	5,12	17,06
7,87	3920	3823	4,32	14,40
7,73	3919	3821	3,55	11,85
7,60	3918	41	2,84	9,47
7,40	4137	3967	1,91	6,35
7,20	4136	39	1,15	3,82
6,80	19	37	0,13	0,42
6,40	18	35	0,35	1,18
6,00	17	33	0,49	1,62
5,60	16	31	0,42	1,39
5,20	15	29	0,21	0,71
4,80	14	27	0,03	0,09
4,40	13	23	0,03	0,10
4,00	11	21	0,02	0,07
3,60	10	19	0,01	0,03
3,20	9	17	0,06	0,19
2,80	8	15	0,22	0,72
2,40	7	13	0,52	1,74
2,00	6	11	0,96	3,21
1,60	5	9	1,41	4,70
1,20	4	7	1,55	5,16
0,80	3	5	0,81	2,71
0,60	4135	3965	0,12	0,41
0,40	4134	2	1,60	5,34
0,26	3812	3751	2,94	9,81
0,13	3811	3749	4,61	15,35
0,00	3810	1	6,61	22,05

En el gráfico siguiente podemos ver los momentos M11 en la losa y M22 en el cilindro para el tanque de 4m de diámetro y el de 8m de diámetro.



### 3.1.8. Conclusiones

Como conclusión podemos decir que el único problema que obtuvimos con el modelo fue la salida de datos del Programa utilizado (SAP 2000 Nom LinearVersion 7.12). Este inconveniente fue encontrado cuando se trató de verificar el equilibrio en los nodos de unión entre la losa superior y el cilindro. El problema era que no coincidían los resultados gráficos con los numéricos. Es decir que el equilibrio no se verificaba si los valores en los nodos se obtenían de la salida gráfica, en cambio no pasaba lo mismo cuando se verificaba en el equilibrio con la salida numérica, ya que en este caso no se encontraba ningún problema.

Como podemos observar en los diagramas obtenidos los puntos más importantes a la hora del dimensionado son la unión entre la losa superior y el cilindro ya que en estos puntos se producen las mayores concentraciones de tensiones. Lo mismo pasa en la unión entre la losa inferior y el cilindro pero en menor medida.

En la comparación hecha con los tanques de 4m y 8m de diámetro podemos observar que los momentos en la unión entre la losa superior y el cilindro aumentan considerablemente, como así también la concentración de tensiones. Lo mismo sucede en la unión entre la losa inferior y el cilindro pero el aumento del momento es mucho menor. Este se debe a que la luz de la losa superior aumenta al doble y por consiguiente esto produce un gran aumento en los momentos. En cambio en la losa inferior si bien esta luz aumenta en la misma medida al encontrarse todos sus nodos empotrados no produce gran influencia en el momento.

# Verificación del cálculo de un tanque de Hormigón

---

Aplicación del Método de los Elementos  
de Simetría Axial

## Verificación del cálculo de un tanque de hormigón

Aplicación del Método de los Elementos de Simetría Axil

Elementos Asolid

### 3.2.1 Introducción

Este trabajo tiene por objeto basarnos en los mismos criterios que para el tanque metálico anteriormente expuesto, pero con la variante que es un tanque de hormigón de otras dimensiones. La herramienta utilizada para modelar la estructura y calcular las solicitaciones es el programa de cálculo SAP2000 Non Linear.

### 3.2.2 Análisis del problema real

El problema que se presenta corresponde a la determinación de las solicitaciones en una estructura que responde a las características de una membrana curva.

Las membranas son estructuras laminares delgadísimas, considerándose por ello desprovistas de rigidez a flexión y torsión. Por consiguiente, están sometidas en cada punto sólo a esfuerzos que actúan en el plano tangente; o sea, carecen de momentos flectores, torsores y de esfuerzos cortantes. En otros términos: las tensiones están uniformemente repartidas en el espesor de la membrana.

### 3.2.3 Análisis del elemento elegido para el modelo

Para el estudio del problema se eligió realizar un modelo en el programa SAP2000NL, y utilizar en el modelado del tanque el elemento tipo **Asolid** que proporciona dicho programa.

- Elemento Asolid

Este elemento fue mencionado anteriormente, (cuando se formuló para tanque metálico); lo distinto en este caso es que la modelación del tanque de hormigón es a partir de elementos de 9 nodos, que permite tener una mejor aproximación al sistema real.

- Ejes locales y numeración de nodos

El elemento asolid puede adoptar cualquiera de las formas siguientes:

- ✓ Elemento cuadrangular, definido por cuatro nodos **j1; j2; j3 y j4**.
- ✓ Elemento cuadrangular de 9 nodos,  $J9= j1,j2,j3,j4,j5,j6,\dots,j9$ .
- ✓ Los ejes locales se denominan como **1, 2 y 3**, y responden a un sistema de coordenadas dextrógiro. Los dos primeros ( 1 y 2 ) se ubican en el plano del elemento, mientras que el tercero es normal a dicho plano, circunferencial. Para nuestro caso  $Y=1; Z=2$ .

### 3.2.4 Consideraciones sobre el modelo

- Materiales y secciones utilizadas

- ◆ **Material**

Al realizar el modelo es necesario definir para los elementos adoptados, sus características mecánicas y geométricas. En el caso bajo análisis el material utilizado es Hormigón (H13); el cual cuenta con las siguientes propiedades:

Peso específico del H<sup>o</sup> = 2400 kg/m<sup>3</sup>

E del hormigón = 240000 kg/cm<sup>2</sup>

Módulo de poisson= 0.2

- \* **Dimensiones:**

Las dimensiones con las que se modeló la estructura son las siguientes:

$H_{total} = 10.6 \text{ m}$

$H_{tanque} = 2.6 \text{ m}; \text{ esp. losa tanque} = 0.15$

$H_{cilindro} = 8 \text{ mts.}; \phi_{cilindro} = 4.00\text{m}$

$\text{esp. losa cilindro} = 0.3 \text{ m}$

- \* **Condiciones de borde o frontera:**

- A los 10.6 metros, se encuentra la estado "TECHO" = 1100 kg (cargas nodales).
- Desde los 10.6 mts. A los 8 mts., existe una carga triangular de estado "AGUA".
- Desde los 8 mts. hasta la base, Estado "VINO" (Carga triangular).
- A los 5.40 mts., estado "LOSA" = 340000 kg (carga nodal)

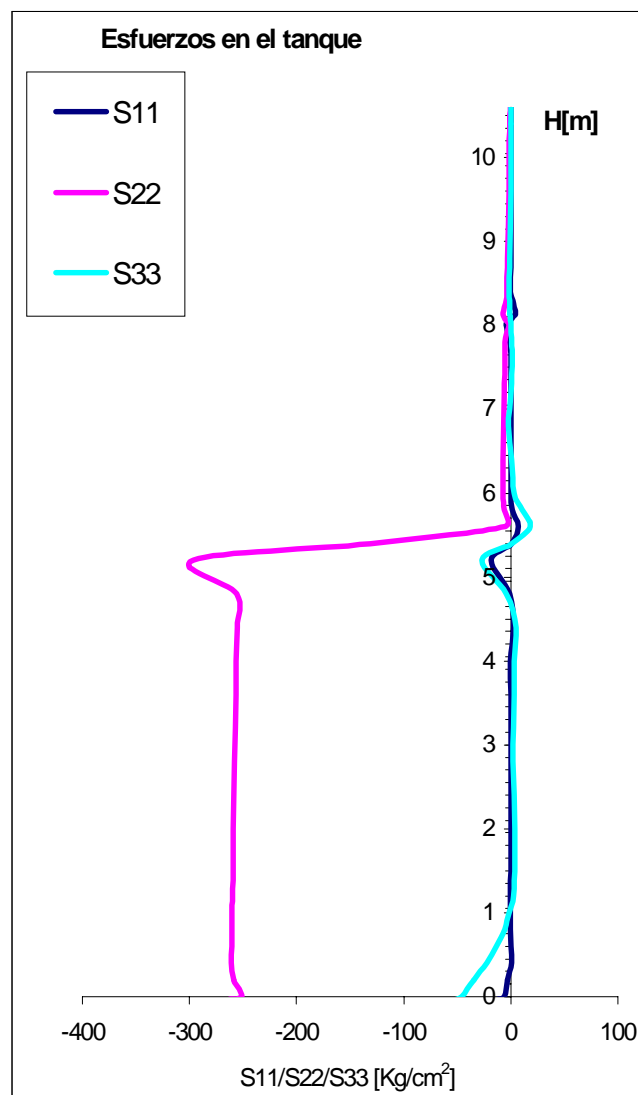
## 3.2.5 Resultados del análisis y conclusiones

El primer paso que sería necesario dar para realizar la verificación del tanque sería analizar la deformación del mismo, los esfuerzos internos y las tensiones obtenidos.

- Esfuerzos internos y tensiones

Las tensiones S11 y S22 son las que siguen. La estructura presenta dos picos de tracción en las losas a 8 y 5.4 metros de la altura total, en S11.

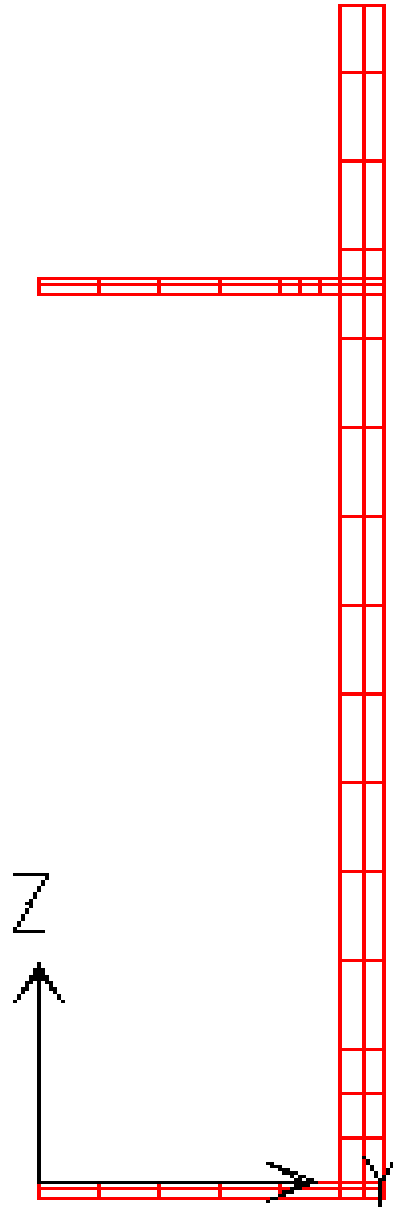
A los 8 metros se encuentra el cilindro cargado con la totalidad del agua y a los 5.40mts. existen fuerzas puntuales, que representan es estado de carga distribuída de la losa.



En S22, el pico que presenta es de tracción en la zona de la losa, y una fuerte compresión en toda la altura del cilindro con la carga de vino.

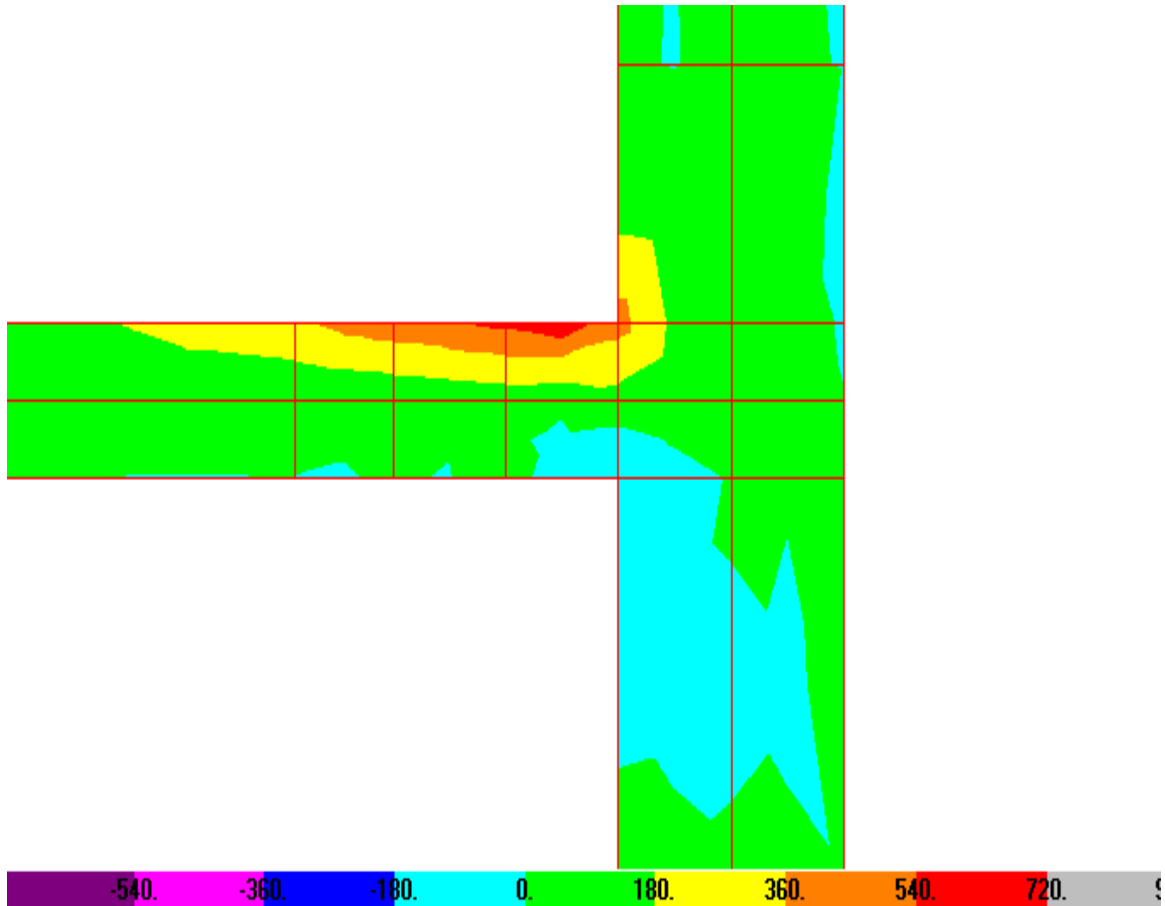
A continuación se muestra cómo se discretizó la estructura para poder llegar a obtener los resultados de las tensiones.

Se densificó aún más la zona de encuentro de la losa con el cilindro del tanque.





En el nudo se puede observar cómo se distribuyen las tensiones máximas. Pero es notable que el programa establezca como zona de máximos esfuerzos, no justo en las líneas de borde, que se denominaron (Sección 1-1, para la losa) y (Sección 2-2, para la pared del tanque), sino una distancia más allá del encuentro o intersección, como puede observarse por la zona delimitada por los colores desde el rojo al naranja.



A continuación, se calcularon los valores de los momentos correspondientes a estas secciones, anteriormente citadas.

Estos valores son los correspondientes a los  $M_{11}$  de la sección 1-1 y los  $M_{22}$  para la sección 2-2. Es de notar que el equilibrio de nodos no se establece y que existe una diferencia muy grande de 81 kgm.

Una solución sería tomar una sección más solicitada, paralela a la anterior y verificar si puede llegar a darse el equilibrio de nodos para esas secciones que no se dan dónde tendría que darse; o bien discretizar aún más esta zona y ver como varía el diagrama de tensiones máximas.

	M11	M22	M33
Sección 1	1044.54	-407.39	-176.68
Sección 2	8073.68	1125.50	835.57
Sección 3	-3.16	16.07	-1.26

-278590.1	19			-80346.29		
278496.44	251			64563.39		
557086.54				144909.68		
x=	0.075			x=	0.134	
F=	10441.9	-10448.9		F=	4314.9	-6682.3
2/3x=	0.050			2/3x=	0.089	
1/3x=	0.025			1/3x=	0.045	
	0.075				0.134	
L-x=	0.075			L-x=	0.166	
2/3L-x=	0.050			2/3L-x=	0.111	
1/3L-x=	0.025			1/3L-x=	0.055	
M11	1044.5	kg.m		M22	1125.5	kg.m
Diferencia =				81.0		

## Bibliografía.

**SENTINELLI, FRANCISCO.** Cátedra Estructuras Especiales UTNFRM 1969 – Ed. Hnos. Villafañe.

**BELLUZI, ODOÑO.** Scienza delle Costruzioni – Vol. III. 1957 . Ed. Nicola Zannichelli – Bologna.

**SAP2000 Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures. Analysis Reference.**  
Volume 1. Version 6.1. revised September 1996.

## Autores.

- Lucero, Daniel.
- González, Celina.
- Guglielmi, Ariel.
- Pina, Juan Carlos.
- Quiroga, Pablo.

# ***ESTRUCTURAS LAMINARES***

## **INFORME: “Esfuerzos en el plano”**

Se plantea el problema de resolver casos diversos en el plano. Esto es fácil, como se podrá deducir en su momento para casos sencillos, donde no es muy laborioso el cálculo analítico. Pero el problema se agrava, cuando nos encontramos con casos en donde estos métodos analíticos no son muy simples, o mejor dicho, donde la complejidad del caso hace muy posible que cometamos errores de arrastre.

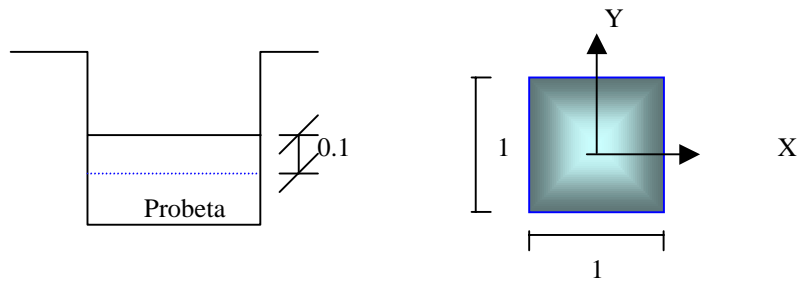
Por eso surge como medio útil, usar un programa computacional, como el SAP, que me permite poder probar distintos problemas, ya sean en el plano o en el espacio, y en forma muy ágil y rápida, combinar distintos esquemas de cargas, sin tener que demorarnos en su uso.

Pero, nuestra inquietud inmediata es poder determinar qué características tiene este programa; cómo es que resuelve los problemas de tensión y deformación plana?

Para esto lo primero que se propone a evaluar es:

- **Caso A**: Se muestra una probeta que está empotrada en dos direcciones, en este caso en el plano XY, sólo se le permite la deformación según la dirección Y;  $\delta=0.1$  (desplazamiento prescrito). Se obtendrán valores de tensiones en el plano, y luego se compararán con los obtenidos analíticamente para Tensión Plana, Deformación Plana y Simetría Axil (ASOLID).
- **Caso B**: La misma probeta, pero con otras condiciones de vinculación. Se le permite que se desplace según la dirección “Y”, y según la dirección “X” ( $\delta=0.02$ ). Se obtendrán las tensiones como para el Caso A.

### Caso A:



1º) Se representa un elemento shell como de *tipo* membrana. Esto es debido a que las condiciones de carga y simetría influyen poco, y además no tiene la capacidad de absorber flexión. Sólo presenta deformaciones en su plano.

2º) Al colocar las *restricciones* que le permitirán deformarse, después de darle los desplazamientos prescritos, es necesario ver como es posible que se desplace sólo en “Y”, ya que esa era la condición que se fija (confinada en ambos sentidos), siendo útiles vínculos de primera especie, que permiten el desplazamiento según “Y”. En la base sólo se logra con vínculos de segunda especie, que restringe los desplazamientos en “x” e “y”.

En los nodos superiores se colocan vínculos en la dirección del desplazamiento prescrito.

3º) Los *desplazamientos prescritos* ( en la dirección de y,  $\delta y = -0.10$ ) son aquellos que permiten al elemento, se deforme en la dirección impuesta. En este caso lo que se hace es que por medio de los vínculos se obtengan reacciones, y estos se traduzcan en acciones en el nodo.

4º) Este diafragma a la vez, fue discretizado en muchos más elementos ej: 10 x 10.

Como resultado se obtiene que los desplazamientos disminuyen en forma proporcional, el 10% menos en cada hilera de nodos a medida que descendemos, hasta llegar a la base, donde se anulan los desplazamientos.

La prueba también se hizo para mallas en distintas direcciones y también se pudo observar como varían los desplazamientos de los nodos en forma proporcional a medida que se desciende.

Es decir que las mallas además de hacerlas con sus lados paralelos a los ejes globales, también fue posible hacerlas con sus lados no paralelos a los ejes, para ver si se producía algún cambio en los resultados obtenidos.

### Conclusiones:

- La densificación permite que veamos que para casos simples como este, dónde sólo trabajamos en el plano y con estados de cargas simples y esfuerzos resultantes de compresión simple =  $\sigma_x; \sigma_y$ , no se observen cambios en ninguna de las mallas analizadas.
- Del análisis de las mallas en distintos sentidos, como se mencionó anteriormente, se descubre que el estado tensional se mantiene constante, es decir, el gradiente de tensiones es nulo, en cualquiera de los casos analizados.

Esto surge de la expresión discretizada del vector de tensiones en el interior del elemento  $\sigma = D \cdot \epsilon = D \cdot B \cdot a$ ; que como  $B = \text{cte}$ , las deformaciones y tensiones son también constantes en todo el elemento. Esto es consecuencia directa del campo de desplazamientos lineal escogido, cuyos gradientes son constantes. Por consiguiente, en zonas de alta concentración de tensiones será necesario utilizar una malla tupida para aproximar la solución de tensiones con suficiente precisión.

- Después de analizar el problema analíticamente y por medio del programa SAP2000, se ve como el Shell con comportamiento de membrana resuelve problemas en Tensión Plana.
- Para *Tensión Plana*, los valores obtenidos para  $\epsilon_x; \epsilon_y$ , son los que se supusieron en un principio. Luego, al contar con los datos de  $\sigma_x; \sigma_y; \epsilon_x; \epsilon_y$ , se pudo calcular el valor de  $\epsilon_z \neq 0$ , y el de  $\sigma_z = 0$ , valores obtenidos por la Ley generalizada de Hooke. Con lo que se puede concluir que verifican las condiciones de Tensión Plana, que parte con la hipótesis de que  $\epsilon_z \neq 0$  y  $\sigma_z = 0$ .

- Para el caso de *Deformación Plana*, el valor de  $\epsilon_z$  es nulo, como se supuso. Los valores de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  se mantienen, por lo que puede calcularse el valor correspondiente de  $\sigma_z$  que resultó distinto de cero, como se había supuesto para este caso.  
Se observa, además que al ser  $\epsilon_z = 0$ , produce confinamiento, por lo que aumenta  $\sigma_y$  y  $\sigma_x$ , en comparación con la Tensión Plana, que es menor, porque  $\epsilon_z \neq 0$ .
- Para el elemento *Asolid* (Nota 1), las tensiones que se obtuvieron son las mismas que las salidas del SAP, pero para el caso de Deformación Plana.  
Este tipo de elemento tiene la característica de que los desplazamientos radiales  $u_r$ , causan deformaciones circunferenciales normales  $\epsilon_\theta = u_r/r$ . ( $r$ = radio del punto en cuestión). Estos desplazamientos en la dirección circunferencial no tienen efecto sobre el elemento, por lo que de esa forma se puede justificar que  $\epsilon_\theta = 0$ , obteniendo de esta forma valores de  $\sigma_\theta \neq 0$ ; como en el caso de Deformación Plana.

$$\sigma_\theta = \sigma_{33} = \text{esfuerzo normal circunferencial}$$

Los esfuerzos de corte circunferenciales  $(\sigma_{12}, \sigma_{13}) = (\sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})$  y sus respectivas deformaciones de corte  $\gamma_{12}, \gamma_{13}$  son asumidas de ser cero.

**Nota 1:**

El *Asolid* es un elemento usado para modelar sólidos asimétricos, bajo cargas asimétricas.  
Es un elemento de 3 a 9 nodos para modelar estructuras asimétricas. Está basado en una formulación isoparamétrica.  
El elemento modela una sección representativa en dos dimensiones de un sólido tridimensional. Los ejes de simetría deben ser uno de los ejes globales y el elemento debe existir en uno de los planos globales principales (X-Y, Y-Z, Z-X).

CASO A

E= 210000 kg/cm<sup>2</sup>  
 v= 0,2

Tension Plana

D=	218750	43750	0
	43750	218750	0
	0	0	87500

δ impuesta

εx=	0
εy=	-0,1
γxy=	0

Deformacion Plana

D=	233333	58333,3	0
	58333,3	233333	0
	0	0	87500

Tension Plana    Deform. Plana    Simetria Axil

σx=	-4375	-5833	-5833
σy=	-21875	-23333	-23333
τxy=	0	0	0

Simetria Axil

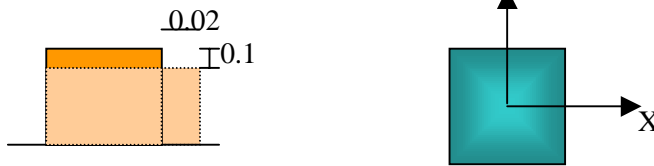
D=	233333	58333,3	0
	58333,3	233333	0
	0	0	87500

Tensión Plana	Deformación Plana	Simetría Axial
$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E = 0,000$	$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E = 0,000$	$\epsilon_r = (\sigma_r - \nu\sigma_z)/E = 0,000$
$\epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E = -0,100$	$\epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E = -0,100$	$\epsilon_z = (\sigma_z - \nu\sigma_r)/E = -0,100$
$\epsilon_z = -\nu(\sigma_y + \sigma_x)/E = 0,025$	$\epsilon_z = -\nu(\sigma_y + \sigma_x)/E = 0,028$	$\epsilon_\theta = -\nu(\sigma_r + \sigma_z)/E = 0,00$
	$\epsilon_z = [-\nu(\sigma_y + \sigma_x) + \sigma_z]/E = 0,00$	
$\sigma_x = \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot G \cdot \epsilon_x = -4375$	$\sigma_x = \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot G \cdot \epsilon_x = -5833,33$	$\sigma_r = \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot G \cdot \epsilon_r = -5833,33$
$\sigma_y = \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot G \cdot \epsilon_y = -21875$	$\sigma_y = \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot G \cdot \epsilon_y = -23333,3$	$\sigma_z = \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot G \cdot \epsilon_z = -23333,33$
$\sigma_z = \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot G \cdot \epsilon_z = 0,00$	$\sigma_z = \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot G \cdot \epsilon_z = -972,22$	$\sigma_\theta = \lambda \cdot \epsilon + 2 \cdot G \cdot \epsilon_\theta = -5833,33$
	$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -5833,33$	
$\lambda = \nu \cdot E / (1 - 2 \cdot \nu)(1 + \nu) = 58333$	$\lambda = \nu \cdot E / (1 - 2 \cdot \nu)(1 + \nu) = 58333,3$	$\lambda = \nu \cdot E / (1 - 2 \cdot \nu)(1 + \nu) = 58333,33$
$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -0,075$	$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -0,10$	$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -0,10$
$G = E / (2 \cdot (1 + \nu)) = 87500$	$G = E / (2 \cdot (1 + \nu)) = 87500$	$G = E / (2 \cdot (1 + \nu)) = 87500,00$

Los valores coinciden, sin ningún tipo de problema con los valores obtenidos para "Tensión y Deformación Plana", para un elemento "Plane", que es obtenido en el SAP.

El Asolid también coincide con los valores obtenidos para Deformación Plana.

### Caso B



Lo mismo que en el caso anterior, pero con las siguientes variantes:

1º) Es necesario cambiar las condiciones de vínculo, ya que se permiten a los nodos de la derecha, que desplacen según "x"; porque así está impuesto el desplazamiento. Al igual que los nodos de arriba, se les permite el desplazamiento según "y".

Los nodos de la base también son restringidos a desplazamiento según "x" e "y" (los de las esquinas), no así los internos que sólo se les impide el desplazamiento según "x".

2º) Los desplazamientos prescritos :

$$\delta x=0.02; \delta y= -0.10$$

#### Conclusiones

- Los desplazamientos prescritos permiten que exista  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$ , por lo que al no estar confinada la muestra, las tensiones ahora son mucho menores. Los esfuerzos según "x" se anulan, ya que este elemento se dilata según esta dirección, caso contrario del anterior, siendo  $\sigma_x=0$ .

Para  $\sigma_y$  no es cero, pero se ve disminuído por efecto de poisson, el desplazamiento en un sentido implica menor esfuerzo de compresión en el sentido perpendicular (tensión uniaxial).

Las conclusiones son las mismas que en el caso anterior, salvo que se agrega un desplazamiento en la otra dirección, que crece proporcionalmente de acuerdo al número de nodos en esa dirección.

También es un problema de Tensión plana.



CASO B

$E = 210000 \text{ kg/cm}^2$   
 $\nu = 0,2$

Tension Plana

$$D = \begin{bmatrix} 218750 & 43750 & 0 \\ 43750 & 218750 & 0 \\ 0 & 0 & 87500 \end{bmatrix}$$

Deformacion Plana

$$D = \begin{bmatrix} 233333 & 58333,3 & 0 \\ 58333,3 & 233333 & 0 \\ 0 & 0 & 87500 \end{bmatrix}$$

Simetria Axil

$$D = \begin{bmatrix} 233333 & 58333,3 & 0 \\ 58333,3 & 233333 & 0 \\ 0 & 0 & 87500 \end{bmatrix}$$

$\delta$  impuesta

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x = 0,02 \\ \epsilon_y = -0,1 \\ \gamma_{xy} = 0 \end{bmatrix}$$

Tension Plana    Deform. Plana    Simetria Axil

$$\begin{bmatrix} \sigma_x = 0 & -1167 & -1167 \\ \sigma_y = -21000 & -22167 & -22167 \\ \tau_{xy} = 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensión Plana	Deformación Plana	Simetría Axial
$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E = 0,02$	$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E = 0,02$	$\epsilon_r = (\sigma_r - \nu\sigma_z)/E = 0,02$
$\epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E = -0,10$	$\epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E = -0,10$	$\epsilon_z = (\sigma_z - \nu\sigma_r)/E = -0,10$
$\epsilon_z = -\nu(\sigma_y + \sigma_x)/E = 0,02$	$\epsilon_z = -\nu(\sigma_y + \sigma_x)/E = 0,02$	$\epsilon_\theta = -\nu(\sigma_r + \sigma_z)/E = 0,00$
	$\epsilon_z = [-\nu(\sigma_y + \sigma_x) + \sigma_z]/E = 0,00$	
$\sigma_x = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \epsilon_x = 0$	$\sigma_x = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \epsilon_x = -1166,67$	$\sigma_r = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \epsilon_r = -1166,67$
$\sigma_y = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \epsilon_y = -21000$	$\sigma_y = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \epsilon_y = -22166,7$	$\sigma_z = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \epsilon_z = -22166,67$
$\sigma_z = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \epsilon_z = 0$	$\sigma_z = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \epsilon_z = -777,78$	$\sigma_\theta = \lambda \cdot e + 2 \cdot G \cdot \epsilon_\theta = -4666,67$
	$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -4666,67$	
$\lambda = \nu \cdot E / (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (1 + \nu) = 583333$	$\lambda = \nu \cdot E / (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (1 + \nu) = 58333,3$	$\lambda = \nu \cdot E / (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (1 + \nu) = 58333,33$
$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -0,06$	$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -0,08$	$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -0,08$
$G = E / (2 \cdot (1 + \nu)) = 87500$	$G = E / (2 \cdot (1 + \nu)) = 87500$	$G = E / (2 \cdot (1 + \nu)) = 87500,00$

Estos valores se compararán con aquellos obtenidos a partir del SAP para elemento "Plane" para "Deformación Plana" y para "Tensión Plana"

En este caso el único inconveniente es que no coincide para el elemento ASOLID con los valores de Tensión Plana. Esto no es lo que se obtuvo arriba.

Los resultados se presentan en una planilla al final del informe



El otro inconveniente que surge es :

“Si este programa resuelve problemas diversos; ¿Cómo haría yo para analizar problemas que son visiblemente de deformación plana, si este programa los resuelve como tensión plana?”

Lo primero que surge es analizar los valores correspondientes para la matriz “D”, cuando trabaja en Tensión Plana y cuando lo hace en Deformación Plana.

En segundo término se pueden analizar “Ecuaciones de movimiento en función de los corrimientos”:

EPTensión Plana : (1)

$$G \left( \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \right) + G \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) + X = \rho \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}$$

$$G \left( \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} \right) + G \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\delta}{\delta y} \left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) + Y = \rho \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}$$

EP.Deformación Plana (2)

$$G \left( \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \right) + G \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) + X = \rho \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}$$

$$G \left( \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} \right) + G \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\delta}{\delta y} \left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) + Y = \rho \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}$$

El factor que afecta a estas ecuaciones es para E.P.T. :  $(1+\nu)/(1-\nu)$ ; y para

E.P.D.:  $1/(1-2\nu)$

por lo que puede obtenerse un valor de  $\nu$  modificado a partir de igualar estas ecuaciones entre sí, es decir

de:  $\frac{1+\nu}{1-\nu} = \frac{1}{1-2\nu}$ , y a partir de allí se puede obtener el valor de  $\nu^*$ .

Este valor de  $\nu$  modificado es para la expresión 2;  $\nu^* = \nu/(1+\nu)$ .

Para la expresión 1 es,  $\nu^* = 1/(1-2\nu)$ .

Como conclusión en el caso de el 1er valor de  $\nu^*$ , se utilizaría cuando tuviese un elemento que es netamente de deformación plana para que lo resuelva como tal, solamente cambiando el valor de  $\nu$  que es el parámetro que tengo de dato para resolver el problema.

Se plantea el mismo ejercicio anterior. Los valores que analíticamente se obtuvieron para el caso de la probeta con las ecuaciones de Deformación Plana; se comparan con los valores que obtiene el programa, nada más que cambiando el valor de  $\nu$  por el de  $\nu^*$ .

Entonces en “2”, debo reemplazar el valor de  $\nu=0.2$ , lo que me da como resultado  $\nu^*=0.1667$ . Con ese valor trabajo en el programa y obtengo resultados, que si bien no son idénticos a los que se obtuvieron en Tensión Plana, son muy parecidos.