UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

# GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS
# “HIDRÁULICA GENERAL”

# TRABAJO PRÁCTICO N°9:
# SINGULARIDADES EN CANALIZACIONES ABIERTAS

**MATERIAL PREPARADO POR:**

**ING. PATRICIA S. INFANTE, PROF. ADJUNTO**

**MARÍA CECILIA MASETTI, AYUD. DE SEGUNDA**

**AÑO: 2002**

**ECUACIÓN DE LA MOMENTA**

Ecuación de la Momenta para el caso general es la siguiente**:**

$$\frac{1}{X_2} - \frac{n}{X_1} = \frac{(X_1 + K) \times X'}{2} - \frac{X_2^2}{2}$$

$$n = \frac{B_2}{B_1}\,; \qquad K = \frac{a}{h_{c2}}\,;$$

$$X_1 = \frac{h_1}{h_{c2}}\,; \qquad X_2 = \frac{h_2}{h_{c2}}\,,$$

$$X' = \frac{h'}{h_{c2}}$$

en donde:

$B_2$ es el ancho de la canalización aguas abajo en (m).

$B_1$ es el ancho de la canalización aguas arriba en (m).

a es la altura del escalón en (m).

$h_1$ altura de agua aguas arriba en (m).

$h_2$ altura de agua aguas abajo en (m).

$h_{c2}$ es la altura crítica aguas abajo en (m).

h´ es la altura ficticia en (m)

Para el caso de ensanche brusco de la sección mojada, sin variación de la forma ni magnitud del lecho del cauce (RESALTO).

$n = 1 \quad ; \qquad K = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X_1 = X'$

$$\frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1} = \frac{X_1^2}{2} - \frac{X_2^2}{2}$$

Para el caso de ensanche brusco por variación de la cota de fondo. (ESCALÓN BAJADA, BARRERA DE VERTEDERO AHOGADO).

$n = 1 \quad ; \qquad B_1 = B_2 \qquad h_{c2} \qquad X' = X_1 + K$

$$\frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1} = \frac{(X_1 + K)^2}{2} - \frac{X_2^2}{2}$$

Para el caso de ensanche con variación brusca de ancho y cota de fondo.

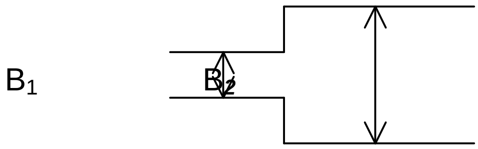
$n = B_2 / B_1 \;;\; K = a / h_{c2} \quad ; \qquad X' = X_1 + K$

$$\frac{1}{X_2} - \frac{n}{X_1} = \frac{(X_1 + K)^2}{2} - \frac{X_2^2}{2}$$

Para el caso de ensanche por variación de ancho del lecho.

$K = 0$ ; $X' = X_1$

$$\frac{1}{X_2} - \frac{n}{X_1} = \frac{X_1^2}{2} - \frac{X_2^2}{2}$$




**EJERCICIO Nº1**

En un canal de sección rectangular pasa un caudal Q conocido. Existe un escalón de bajada y se conoce el tirante de aguas abajo. Calcular la altura del escurrimiento sobre la grada, los Bernoulli $B_1$ y $B_2$ y el valor de la pérdida de carga $\Delta$ (también $\lambda$), y definir el tipo de napa.

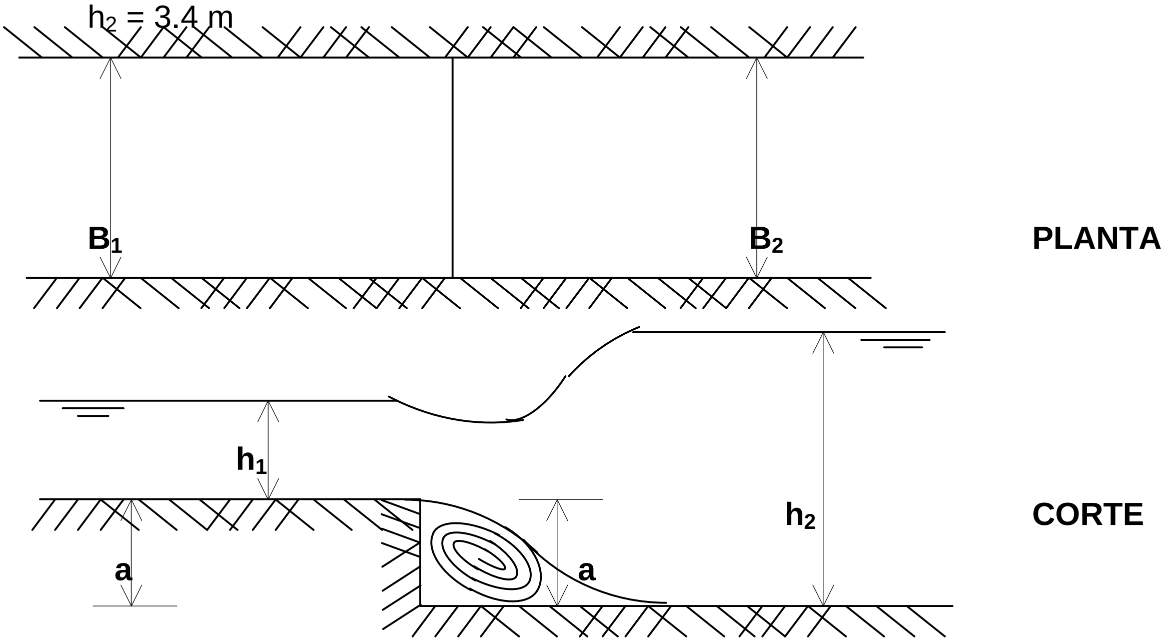
**DATOS:**

$Q = 3.65\ m^3/s$

$a = 0.30\ m$

$B_1 = B_2 = 1\ m$

$h_2 = 3.4\ m$




La ecuación de la momenta, válida para secciones rectangulares, en forma general es:

$$\frac{1}{X_2} - \frac{n}{X_1} = \frac{(X_1 + K) * X'}{2} - \frac{X_2^2}{2} ; n = \frac{B_2}{B_1} ; X_2 = \frac{h_2}{h_{c2}} ; X_1 = \frac{h_1}{h_{c2}} ; K = \frac{a}{h_{c2}} ; X' = \frac{h'}{h_{c2}}$$

Siendo:

$B_1$ : ancho del canal aguas abajo

$B_2$ : ancho del canal aguas arriba

$h_1$ : escurrimiento sobre la grada

$h_2$ : tirante de aguas arriba

$h_{c2}$ : tirante crítico aguas abajo.

a : altura del escalón

h´ : altura ficticia (= $h_1$ + a)

Como: n=1 h´ = $h_1$ + a es válida la ley hidrostática de presiones.

$$\frac{1}{X_2}-\frac{1}{X_1}=\frac{(X_1+K)^2}{2}-\frac{X_2^2}{2}$$ Recordemos

que: $h_{c2}=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{Q}{B_2}\right)^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{(3.65)^2}{9.81}}=1.11\text{m}$

De acuerdo a esto, y como $h_2$ = 1.52 m > $h_{c2}$ = 1.11 m, resulta que aguas abajo tenemos un RÍO.

La incógnita en la ecuación planteada es $X_1$, pues nuestra primera incógnita es $h_1$. Entonces:

$$\frac{2X_1-2X_2}{X_2*X_1}=X_1+2*X_1*K+K^2-X_2^2$$

$$(X_2)X_1^3+(2*X_2*K)X_1^2+(K^2*X_2-X_2^3-2)X_1+(2*X_2)=0$$

Que es una ecuación de tercer grado del tipo: $\alpha*X_1^3+\beta*X_1^2+\gamma*X_1+\delta=0$

Con los coeficientes calculados como:

$\alpha=(X_2)$

$\beta=(2*X_2*K)$

$\gamma=(K^2*X_2-X_2^3-2)$

$\delta=(2*X_2)$ En nuestro caso: $X_2=\frac{h_2}{h_c}=3.07$ $K=\frac{a}{h_c}=0.27$

Resultando: α = 3.07 β = 1.67 γ = -30.72 δ = 6.14

$$3.07X_1^3+1.67X_1^2-30.72X_1+6.14=0$$

Remplazando queda:

Las raíces de esta ecuación son las siguientes:

$X_{11}$=2.79 $X_{12}$=0.20 $X_{13}$=-3.53

Se descarta la raíz negativa, y se calculan los dos valores de $h_1$ que corresponden a las dos raíces encontradas:

$h_{11} = X_{11} \times h_{c2} = 2.79 \times 1.11\text{m} = 3.1\text{m}$

$h_{12} = X_{12} \times h_{c2} = 0.20 \times 1.11\text{m} = 0.23\text{m}$

Se procede a calcular las energías desarrolladas con las dos alturas encontradas:

$$Be_{11} = h_{11} + \frac{U_{11}^2}{2g} + a \Rightarrow U_{11} = \frac{Q}{h_{11} \times B_1} = \frac{3.65\text{m}^3/\text{s}}{3.1\text{m} \times 1\text{m}} = 1.18\text{m}/\text{seg.} \Rightarrow Be_{11} = 3.1\text{m} + \frac{(1.18\text{m}/\text{s})^2}{2g} + 0.30\text{m}$$

$Be_{11} = 3.47\text{m}$

$$Be_{12} = h_{12} + \frac{U_{12}^2}{2g} + a \Rightarrow U_{12} = \frac{Q}{h_{12} \times B_1} = \frac{3.65\text{m}^3/\text{s}}{0.23\text{m} \times 1\text{m}} = 15.87\text{m}/\text{seg.} \Rightarrow Be_{12} = 0.23\text{m} + \frac{(15.87\text{m}/\text{s})^2}{2g} + 0.3\text{m}$$

$Be_{12} = 13.37\text{m}$

$$Be_2 = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \Rightarrow U_2 = \frac{Q}{h_2 \times B_2} = \frac{3.65\text{m}^3/\text{s}}{3.4\text{m} \times 1\text{m}} = 1.076\text{m}/\text{seg.} \Rightarrow Be_2 = 3.4\text{m} + \frac{(1.08\text{m}/\text{s})^2}{2g} = 3.46\text{m}$$

De acuerdo al sentido de circulación del agua el $Be_1$ debe ser mayor que el $Be_2$. Para las dos raíces se cumple la condición mencionada.

Pero en este caso es necesario analizar las condiciones aguas arriba y aguas abajo del escalón:

- ☺ Aguas abajo hay una altura de agua de 3.4m.
- ☺ Aguas arriba puede producirse dos alturas: 3.1m ó 0.23m. En el primer caso considerando plano de referencia el más bajo, el agua tendría una cota piezométrica inicial de (3.1m +0.3m)=3.4m. Mientras que para el segundo valor la cota piezométrica inicial sería de (0.23m+0.3m)=0.53m. Existe mucha diferencia entre las cotas piezométricas inicial y final para este último caso, de modo que no es posible que el agua suba semejante cantidad de metros cuando escurre a gravedad.

Por lo tanto, la raíz más adecuada es la $h_{11}$. Y la pérdida de energía correspondiente se calcula como sigue:

$\Delta = Be_1 - Be_2 = (3.47 - 3.46)\ \text{m} = 0.01\ \text{m}$

Entonces:

$$\lambda_2 = \frac{\Delta}{\frac{U_2^2}{2g}} = \frac{2 * 9.81 * 0.01}{\left(\frac{3.65}{3.4 * 1}\right)^2} = 0.17 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\Delta}{\frac{U_1^2}{2g}} = \frac{2 * 9.81 * 0.01}{\left(\frac{3.65}{0.23 * 1}\right)^2} = 0.00078$$

**La altura hidráulica aguas arriba es $h_1$=3.1m; la pérdida de carga Δ =0.01m.**

Para un ajuste mayor de las raíces a adoptar, es necesario tener como dato la pendiente de fondo del canal aguas arriba en este caso, para poder adoptar la altura de agua normal que le corresponde a dicha pendiente de fondo.

**EJERCICIO Nº2**

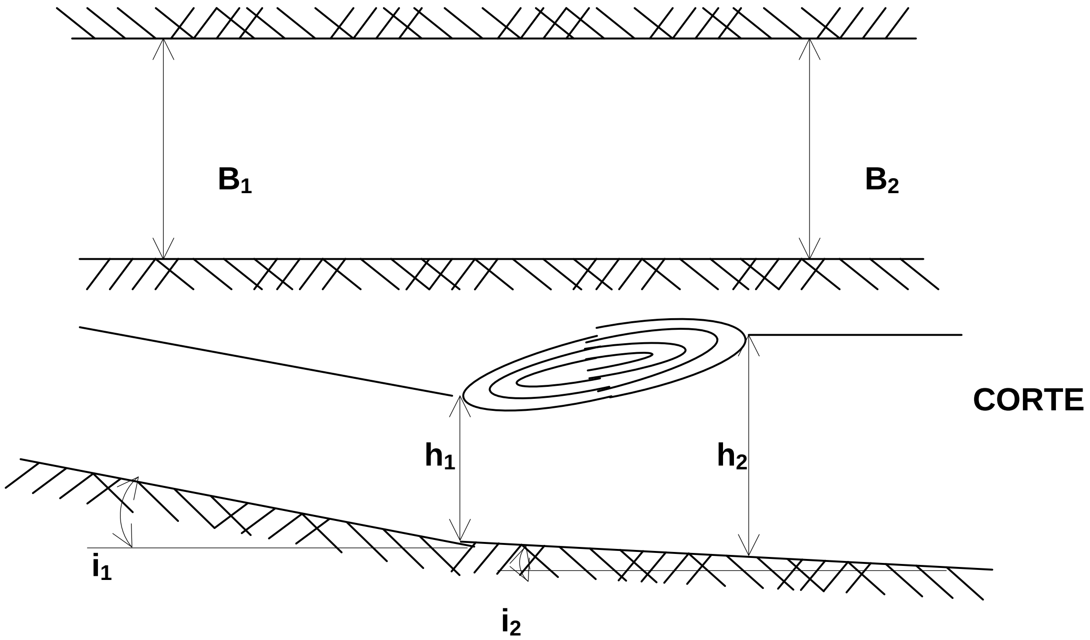
En un canal de sección rectangular de 4.3 m de ancho, escurre un caudal de 6.6 $m^3/s$. Se produce un cambio de pendiente que origina un resalto. ¿Qué altura conjugada tiene éste último, si el torrente del mismo adopta una $h_1$ = 0.56 m ?

**DATOS:**

$Q = 6.6\ m^3/s$

$h_1 = 0.56\ m$

$B_1 = B_2 = 4.3\ m$




De la ecuación de la momenta:

$$\frac{1}{X_2}-\frac{n}{X_1}=\frac{(X_1+K)*X'}{2}-\frac{X_2^2}{2} \qquad B_1 = B_2 \Rightarrow \quad n=\frac{B_2}{B_1}=1 \qquad X'=\frac{h'}{h_{c2}}=\frac{h_1+a}{h_{c2}}=\frac{h_1}{h_{c2}}=X_1$$

$$K=\frac{a}{h_{c2}}=0 \Rightarrow \frac{1}{X_2}-\frac{1}{X_1}=\frac{X_1^2}{2}-\frac{X_2^2}{2} \qquad \frac{2X_1-2X_2}{X_2 * X_1}=X_1^2-X_2^2$$

$$2X_1-2X_2 = X_1^3\times X_2 - X_2^3\times X_1 \qquad X_2^3 X_1 - \left[X_1^3+2\right]X_2 + 2\times X_1 = 0$$

Ecuación del tipo: $\alpha * X_2^3 + \beta * X_2^2 + \gamma * X_2 + \delta = 0$

$$\alpha = (X_1) \qquad \gamma = -\left[X_1^3+2\right]$$

$\beta = 0 \qquad \delta = (2 \times X_1)$

$$X_1 = \frac{h_1}{h_{c2}} \qquad h_1 = 0.56 \text{ m} \quad h_{c2} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{Q}{B_2}\right)^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{6.6}{4.3}\right)^2}{9.81}} = 0.62\text{m} \qquad X_1 = \frac{0.56}{0.62} = 0.90$$

Entonces:

$\alpha = 0.9 \qquad \gamma = -\left[(0.90)^3 + 2\right] = -2.73$

$\beta = 0 \qquad \delta = (2 \times 0.9) = 1.8$

La ecuación queda: $0.90X_2^3 - 2.73X_2 + 1.80 = 0$

Ecuación que tiene solución para: $X_{21} = 0.90$ $X_{22} = 1.11$ $X_{23} = -2.00$

Se descarta la solución de signo negativo, quedando las dos positivas:

$$X_{21} = \frac{h_{21}}{h_{c2}} \Rightarrow h_{21} = X_{21} * h_{c2} = 0.90 \times 0.62\text{m} = 0.56\text{m}$$

$$X_{22} = \frac{h_{22}}{h_{c2}} \Rightarrow h_{22} = X_{22} * h_{c2} = 1.11 \times 0.62\text{m} = 0.69\text{m}$$

El primer valor corresponde a la altura de torrente que es el dato del presente problema, mientras que el segundo valor corresponde a la altura conjugada buscada. $h_2 = 0.69$ m.

Para determinar la longitud del resalto, podemos aplicar una de las dos siguientes ecuaciones empíricas:

$$L = \frac{l}{h_{c2}} = 1.5\left(\frac{X_2}{X_1} - 0.80\right) \therefore 2 \langle \frac{X_2}{X_1} \langle 16 \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{1.11}{0.90} = 1.23 \langle 2$$

Por lo cual sólo cabe aplicar la segunda:

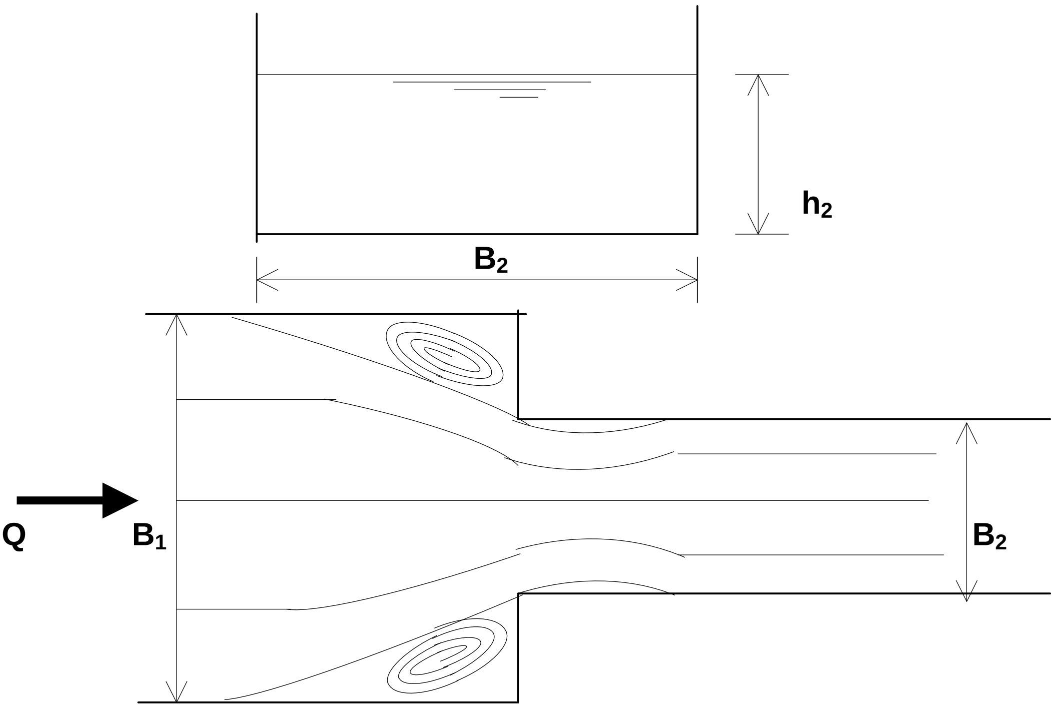
$l = 5*(h_2-h_1) = 5*(0.69 - 0.56)\text{m} = 0.65$ m $\qquad l \cong 0.65$ m

| **La altura conjugada es $h_2$ =0.69m y la longitud del resalto es l=0.65m** |
|---|

**EJERCICIO Nº3**

En un canal de 6 m de ancho y rectangular se produce un estrechamiento a 3.74 m sin escalón de fondo. Aguas abajo hay una $h_2 = 1.06$ m y el caudal es 3 $m^3/s$. Calcular $h_1$ y la pérdida de carga $\Delta$ y $\lambda$.

| | |
|---|---|
| $B_1 = 6$ m | $h_1$=? |
| $B_2 = 3.74$ m | $\Delta$=? |
| $h_2 = 1.06$ m | $\lambda$=? |
| $Q = 3$ $m^3/s$ | |




La ecuación de la momenta es:

$$\frac{1}{X_2} - \frac{n}{X_1} = \frac{(X_1 + K) * X'}{2} - \frac{X_2^2}{2} \qquad a = 0 \;\Rightarrow\; K = \frac{a}{h_{c2}} = 0 \Rightarrow h' = h_1 + a \Rightarrow X' = X_1$$

$$q = \frac{Q}{B_2} = \frac{3}{3.74} \frac{m^3}{s \times m} = 0.80 \frac{m^3}{s} \frac{1}{m} \Rightarrow h_{c2} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{Q}{B_2}\right)^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(0.80)^2}{9.81}} m = 0.40m$$

$$X_2 = \frac{h_2}{h_{c2}} = \frac{1.06m}{0.40m} = 2.65 \qquad n = \frac{B_2}{B_1} = \frac{3.74m}{6m} = 0.62$$

La ecuación de la momenta se reduce a: $\frac{1}{X_2} - \frac{n}{X_1} = \frac{X_1^2}{2} - \frac{X_2^2}{2}$

$$\frac{2(X_1 - nX_2)}{X_2 * X_1} = X_1^2 - X_2^2 \qquad 2X_1 - 2nX_2 = X_1^3 * X_2 - X_2^3 * X_1 \qquad X_1^3 X_2 - X_1 (X_2^3 + 2) + 2nX_2 = 0$$

Ecuación del tipo: $\alpha * X_1^3 + \beta * X_1^2 + \gamma * X_1 + \delta = 0$

Con $\alpha = (X_2)$; $\beta = 0$; $\gamma = -[X_2^3 + 2]$; $\delta = (2nX_2)$

Para nuestro caso se tendrá: $\alpha$ = 2.65; $\beta$ = 0; $\gamma$ = -20.61; $\delta$ = 3.29

$$2.65 * X_1^3 - 20.61 * X_1 + 3.29 = 0$$

Ecuación que tiene solución para: $X_{11}$ = 0.16 $X_{22}$ = 2.678 $X_{13}$ = -2.865

Se descarta la solución negativa, y se calculan las energías con las otras dos soluciones para su posterior comparación.

$$h_{11} = X_{11} \times h_{c2} = 0.16 \times 0.4\text{m} = 0.064\text{m}$$

$$h_{12} = X_{12} \times h_{c2} = 2.678 \times 0.4\text{m} = 1.07\text{m}$$

$$Be_{11} = h_{11} + \frac{U_{11}^2}{2g} \Rightarrow U_{11} = \frac{Q}{h_{11} \times B_1} = \frac{3\text{m}^3/\text{s}}{0.064\text{m} \times 6\text{m}} = 7.81\text{m/seg.} \Rightarrow Be_{11} = 0.064\text{m} + \frac{(7.81\text{m/s})^2}{2g}$$

$$Be_{11} = 3.17\text{m}$$

$$Be_{12} = h_{12} + \frac{U_{12}^2}{2g} \Rightarrow U_{12} = \frac{Q}{h_{12} \times B_1} = \frac{3\text{m}^3/\text{s}}{1.07\text{m} \times 6\text{m}} = 0.47\text{m/seg.} \Rightarrow Be_{12} = 1.07\text{m} + \frac{(0.47\text{m/s})^2}{2g}$$

$$Be_{12} = 1.08\text{m}$$

$$Be_2 = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \Rightarrow U_2 = \frac{Q}{h_2 \times B_2} = \frac{3\text{m}^3/\text{s}}{1.06\text{m} \times 3.74\text{m}} = 0.76\text{m/seg.} \Rightarrow Be_2 = 1.06\text{m} + \frac{(0.76\text{m/s})^2}{2g} = 1.09\text{m}$$

De acuerdo al sentido de circulación del agua el $Be_1$ debe ser mayor que el $Be_2$, lo que se cumple para la primera raíz, pero no para la segunda.

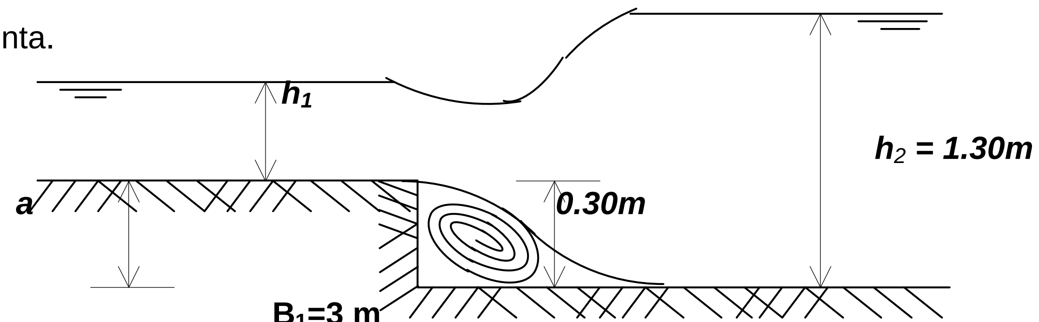
Resulta entonces que: $\Delta = Be_1 - Be_2 = (3.17 - 1.09)\ \text{m} = 2.08\ \text{m}$

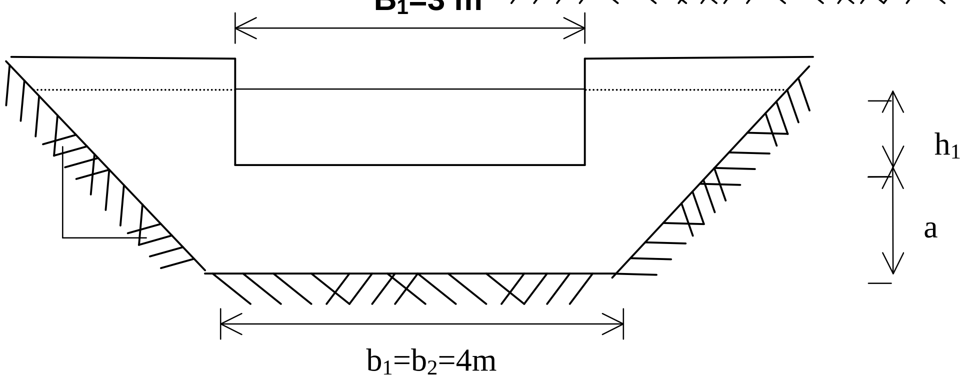
Entonces: $$\lambda_2 = \frac{\Delta}{\frac{U_2^2}{2g}} = \frac{2 \times 9.81 \times 2.08\text{m} \times \text{m}}{(0.76\text{m/s})^2 \times \text{s}^2} = 72.55 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\Delta}{\frac{U_1^2}{2g}} = \frac{2 \times 9.81 \times 2.08\text{m} \times \text{m}}{(7.81\text{m/s})^2 \times \text{s}^2} = 0.67$$

**La altura $h_1$ =0.064m y la $\Delta$=2.08m**

**EJERCICIO Nº4**

Un canal rectangular de 3 m de base cae 0.30m formando un escalón de bajada, y desde el escalón hacia aguas abajo la sección pasa a ser trapecial de 4m de base y taludes de 1:1. El caudal es de 4 $m^3$/s. Determinar la altura de agua en la sección rectangular ($h_1$), si la altura de agua que sigue al ensanche en el canal trapecial ($h_2$) es de 1.30 m. Aplicar la función momenta.



La función momenta es la siguiente: $\frac{Q^2}{g \times \omega_1} + \eta_1 \times \Omega_1 = \frac{Q^2}{g \times \omega_2} + \eta_2 \times \Omega_2$

En donde:

$\omega_1$ es la sección de aguas vivas aguas arriba.

$\omega_2$ es la sección de aguas vivas aguas abajo.

$\Omega_1$ es la sección total aguas arriba.

$\Omega_2$ es la sección total aguas abajo.

$\eta_1$ x $\Omega_1$ es el momento estático de la sección total A.Arriba respecto de la superficie libre.

$\eta_2$ x $\Omega_2$ es el momento estático de la sección total A.Abajo respecto de la superficie libre.

Se considera como sección de aguas vivas $\omega_1$ la sección rectangular inmediatamente aguas abajo del escalón de bajada, que es la que produce transporte de partículas líquidas, de ancho $B_1$ y altura $h_1$.

Se considera sección total aguas arriba $\Omega_1$ a la sección inmediatamente aguas abajo del escalón en la cual es válida la ley de los empujes hidrostáticos, cuya forma es trapecial con un ancho inferior de 4m, una altura de ($h_1$+a) y un ancho superior B = $b_1$ +2 ($h_1$+a) z.

Se considera sección de aguas vivas aguas abajo $\omega_2$, a la sección trapecial de ancho inferior $b_2$, altura $h_2$ y ancho superior $B_2$, y coincide con la sección total $\Omega_2$.

$$\omega_1 = B_1 \times h_1 = 3m \times h_1$$

$$\Omega_1 = (b_1 + h_1 + a) \times (h_1 + a) = (4.3m + h_1) \times (h_1 + 0.3m)$$

$$\omega_2 = \Omega_2 = \frac{B_2 + b_2}{2} \times h_2 = \left( \frac{b_2 + b_2 + 2h_2}{2} \right) h_2 = (b_2 + h_2) h_2 = \omega_2 = (4m + 1.3m) 1.3m = 6.89m^2$$

$$\eta_2 = \frac{h_2}{3} \left( \frac{B_2 + 2b_2}{B_2 + b_2} \right) = \frac{h_2}{3} \left( \frac{b_2 + 2h_2 + 2b_2}{b_2 + 2h_2 + b_2} \right) = \frac{(3b_2 + 2h_2)}{(b_2 + h_2)} \frac{h_2}{6} = \frac{(3 \times 4m + 2 \times 1.3m)}{(4m + 1.3m)} \frac{1.3m}{6} = 0.597m$$

$$\eta_1 = \frac{(h_1 + a)}{6} \times \frac{(3 \times b_2 + 2(h_1 + a))}{(b_2 + h_1 + a)} = \frac{(h_1 + 0.3m)}{6} \times \frac{(12.6m + 2h_1)}{(h_1 + 4.3m)}$$

Se pueden remplazar los valores conocidos y los calculados en la Función Momenta:

$$\frac{Q^2}{g\times\omega_1}+\eta_1\times\Omega_1=\frac{\left(4m^3/s\right)^2}{9.81\frac{m}{s^2}\times 3m\times h_1}+\frac{(h_1+0.3m)}{6}\times\frac{(12.6m+2h_1)}{(h_1+4.3m)}\times(4.3m+h_1)\times(h_1+0.3m)$$

$$\frac{Q^2}{g\times\omega_1}+\eta_1\times\Omega_1=\frac{0.544}{h_1}+(h_1+0.3m)^2\times\frac{(12.6m+2h_1)}{6}$$

$$\frac{Q^2}{g\times\omega_2}+\eta_2\times\Omega_2=\frac{\left(4m^3/s\right)^2}{9.81\frac{m}{s^2}\times 6.89m^2}+0.597m\times 6.89m^2=0.237m^3+4.11m^3=4.347m^3$$

$$\frac{0.544}{h_1}m^4+(h_1+0.3m)^2\times\frac{(12.6m+2h_1)}{6}=4.347m^3$$

Es necesario encontrar un valor de $h_1$ que verifique la ecuación anterior, lo que puede realizarse por iteraciones sucesivas, obteniéndose la tabla siguiente:

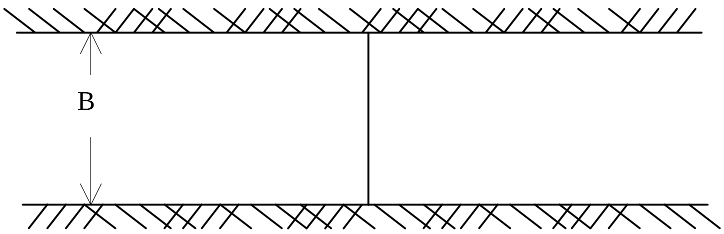
| **$h_1$ (m)** | **1ºTérmino** | **2ºTérmino** | **Suma** |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 2.72 | 0.54 | 3.26 |
| 0.4 | 1.36 | 1.09 | 2.45 |
| 0.6 | 0.91 | 1.86 | 2.77 |
| 0.8 | 0.68 | 2.86 | 3.54 |
| 0.9 | 0.60 | 3.46 | 4.06 |
| 0.95 | 0.57 | 3.78 | 4.35 |
| 0.949 | 0.57 | 3.77 | 4.34 |
| **0.9495** | 0.57 | 3.77 | **4.35** |

**La altura de agua $h_1$ = 0.95m**

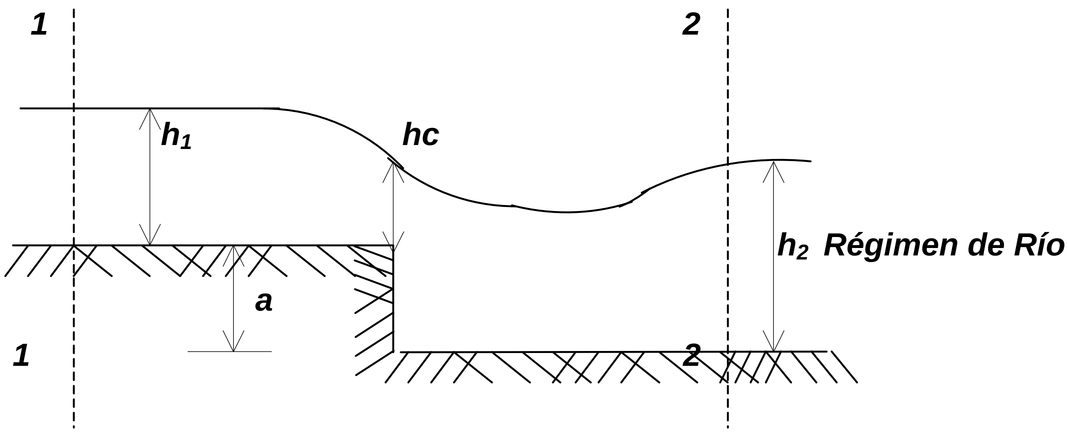
**EJERCICIO Nº5.**

En una canalización de sección rectangular de ancho constante B= 5m pasa un caudal Q= 12 $m^3$/seg.. Existe un escalón de bajada, a=0.40m, se conoce el tirante de agua aguas abajo $h_2$ =1.8m. Calcular la altura de escurrimiento $h_1$, la pérdida de carga $\Delta$ y $\lambda$ .

$$\boxed{\frac{1}{X_2}-\frac{n}{X_1}=\frac{(X_1+K)}{2}X'-\frac{X_2{}^2}{2}}$$



La ecuación de la momenta es:




$X_1 = \frac{h_1}{h_c}$ ; $X_2 = \frac{h_2}{h_c}$ ; $X' = \frac{h'}{h_c}$; $K = \frac{a}{h_c}$ ; $n = \frac{B_2}{B_1}$ h´ = $h_1$ + a

Para nuestro caso:

$$\boxed{\frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1} = \frac{(X_1 + K)^2}{2} - \frac{X_2^{\,2}}{2}}$$

$$h_{c2} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{Q}{B}\right)^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{12}{5}\right)^2}{g}} = 0.84m \quad X_2 = \frac{h_2}{h_{c2}} = \frac{1.80m}{0.84m} = 2.14 \quad K = \frac{a}{h_{c2}} = \frac{0.4m}{0.84m} = 0.48$$

$$\frac{2(X_1 - X_2)}{X_2 * X_1} = X_1^{\,2} + 2KX_1 + K^2 - X_2^{\,2};$$

$$2X_1 - 2X_2 = X_2 * X_1^{\,3} + 2K * X_2 * X_1^{\,2} + X_2 * X_1 * K^2 - X_2^{\,3} * X_1$$

$$\underbrace{X_2}_{\alpha} * X_1^{\,3} + X_1^{\,2}\underbrace{(2K * X_2)}_{\beta} + X_1\underbrace{\left(X_2 * K^2 - 2 - X_2^{\,3}\right)}_{\gamma} + \underbrace{2X_2}_{\delta} = 0$$

$\alpha$ = 2.14 $\beta$ = 2*(0.48*2.14 ) = 2.05

$\delta$ = 4.28 $\gamma$ = (2.14*0.48$^2$) - 2 - (2.14)$^3$=-11.31

2.14 $X_1^3$ + 2.05 $X_1^2$ – 11.31 $X_1$ + 4.28 = 0

$X_{11}$ = 0.426 $X_{12}$ = 1.583; $X_{13}$ = -2.967

Se descarta la solución negativa, y se calculan las energías con las otras dos soluciones para su posterior comparación.

$$h_{11} = X_{11} \times h_{c2} = 0.426 \times 0.84m = 0.36m$$
$$h_{12} = X_{12} \times h_{c2} = 1.583 \times 0.84m = 1.33m$$

$$Be_{11} = h_{11} + \frac{U_{11}^2}{2g} + a \Rightarrow U_{11} = \frac{Q}{h_{11} \times B_1} = \frac{12m^3/s}{0.36m \times 5m} = 6.67m/seg. \Rightarrow Be_{11} = 0.36m + \frac{(6.67m/s)^2}{2g} + 0.4m$$

$$Be_{11} = 3.03m$$

$$Be_{12} = h_{12} + \frac{U_{12}^2}{2g} + a \Rightarrow U_{12} = \frac{Q}{h_{12} \times B_1} = \frac{12m^3/s}{1.33m \times 5m} = 1.81m/seg. \Rightarrow Be_{12} = 1.33m + \frac{(1.81m/s)^2}{2g} + 0.4m$$

$$Be_{12} = 1.89m$$

$$Be_2 = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \Rightarrow U_2 = \frac{Q}{h_2 \times B_2} = \frac{12m^3/s}{1.8m \times 5m} = 1.33m/seg. \Rightarrow Be_2 = 1.8m + \frac{(1.33m/s)^2}{2g} = 1.89m$$

De acuerdo al sentido de circulación del agua el $Be_1$ debe ser mayor que el $Be_2$, lo que se cumple para la primera raíz, pero no para la segunda.

Resulta entonces que: $\Delta = Be_1 - Be_2 = (3.03 - 1.89)\ m = 1.14\ m$

Entonces: $$\lambda_2 = \frac{\Delta}{\frac{U_2^2}{2g}} = \frac{2 \times 9.81 \times 1.14m \times m}{(1.33m/s)^2 \times s^2} = 12.64 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\Delta}{\frac{U_1^2}{2g}} = \frac{2 \times 9.81 \times 1.14m \times m}{(6.67m/s)^2 \times s^2} = 0.50$$

| |
|---|
| **La altura aguas arriba $h_1$=0.36m y la pérdida de energía $\Delta$=1.14m.** |

**EJERCICIO Nº6.**

Un canal rectangular de 3m de ancho cae 0.30m, formando un escalón de bajada, y desde la caída la sección transversal pasa a tener 4 m de ancho. El caudal es de 4 $m^3$/seg. Determinar la altura de agua en la sección aguas arriba, si la altura de agua en la sección aguas abajo es de 1.3m.

$$\frac{1}{X_2} - \frac{n}{X_1} = \frac{(X_1 + K)^2}{2} - \frac{X_2^2}{2} \Rightarrow n = B_2/B_1 = 4m/3m = 1.33 \Rightarrow h_{C2} = \sqrt[3]{\left(\frac{Q}{b_2}\right)^2 \times \frac{1}{g}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4m^3/s}{4m}\right)^2 \times \frac{1}{g}} = 0{,}467m$$

$$K = \frac{a}{h_{C2}} = \frac{0.30m}{0{,}467m} = 0.642 \Rightarrow X_2 = \frac{h_2}{h_{C2}} = \frac{1.3m}{0{,}467m} = 2{,}784 \Rightarrow X_1 = \frac{h_1}{h_{C2}}$$

$$\frac{1}{2{,}784} - \frac{1.33}{X_1} = \frac{(X_1 + 0.642)^2}{2} - \frac{(2{,}784)^2}{2}$$

$$0.5\times X_1^3+0{,}642\times X_1^2-4{,}028\times X_1+1{,}33=0$$

$$X_{11}=2{,}035\Rightarrow h_{11}=h_{C2}\times X_{11}=0{,}467m\times 2{,}035=0{,}95m\Rightarrow U_{11}=Q/h_{11}\times b_1=4/0{,}95\times 3=1{,}40m/s$$

$$X_{12}=0{,}355\Rightarrow h_{12}=h_{C2}\times X_{12}=0{,}467m\times 0{,}355=0{,}166m\Rightarrow U_{12}=Q/h_{12}\times b_1=4/0{,}166\times 3=8{,}03m/s$$

$$X_{13}=-3{,}685$$

$$B_{11}=h_{11}+\frac{U_{11}^2}{2g}+a=0{,}95m+\frac{1{,}40^2}{2g}m+0{,}30m=1{,}35m$$

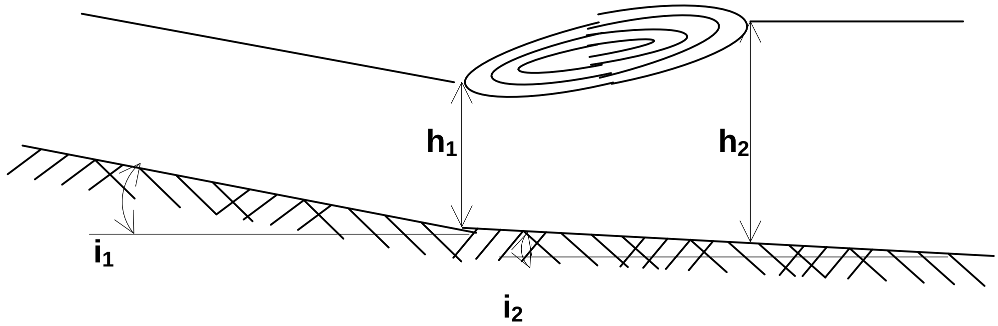
$$B_{12}=h_{12}+\frac{U_{12}^2}{2g}+a=0{,}166m+\frac{8{,}03^2}{2g}m+0{,}30m=3{,}75m$$

$$B_2=h_2+\frac{U_2^2}{2g}=1{,}3m+\frac{(4/4\times 1{,}3)^2}{2g}m=1{,}33m$$

De acuerdo a los valores de Bernoulli $B_1$ calculados, ambos cumplen la condición de ser mayores que el $B_2$, de modo que se necesita saber la pendiente de fondo del tramo aguas arriba para determinar cuál de las dos alturas encontradas es la que corresponde.

**EJERCICIO Nº7.**

En un canal rectangular que conduce un caudal de 1.36 $m^3$/seg. con un ancho B=1.5m, una altura de río de 0.9m; se produce un resalto por cambio de la pendiente de fondo. Usando la ecuación de la momenta, calcular la altura conjugada del resalto, determinar la pérdida de energía en el mismo y su número de Froude (Fr).




$$X_2=\frac{h_2}{h_{c2}} \qquad h_2 = 0.90m \qquad h_{c2}=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{Q}{B_2}\right)^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1.36}{1.5}\right)^2}{9.81}}=0.44m$$

$$X_2=\frac{0.90m}{0.44m}=2.05$$

De la ecuación de la momenta para un resalto es: $\frac{1}{X_2}-\frac{1}{X_1}=\frac{X_1^2}{2}-\frac{X_2^2}{2}$

$$\frac{2X_1 - 2X_2}{X_2 * X_1} = X_1^2 - X_2^2 \qquad 2X_1 - 2X_2 = X_1^3 \times X_2 - X_2^3 \times X_1 \qquad X_1^3 X_2 - \left[X_2^3 + 2\right] X_1 + 2X_2 = 0$$

Ecuación del tipo: $\alpha * X_2^3 + \beta * X_2^2 + \gamma * X_2 + \delta = 0$

$$\alpha = (X_2) \qquad \gamma = -\left[X_2^3 + 2\right]$$

$$\beta = 0 \qquad \delta = (2X_2)$$

Entonces:

$$\alpha = 2.05 \qquad \gamma = -\left[(2.05)^3 + 2\right] = -10.62$$

$$\beta = 0 \qquad \delta = (2 \times 2.05) = 4.1$$

La ecuación queda: $2.05X_1^3 - 10.62X_1 + 4.1 = 0$

Ecuación que tiene solución para: $X_{11} = 0.398$ $X_{12} = 2.051$ $X_{13} = -2.449$

Se descarta la solución de signo negativo, quedando las dos positivas:

$$X_{11} = \frac{h_{11}}{h_{c2}} \Rightarrow h_{11} = X_{11} * h_{c2} = 0.398 \times 0.44\text{m} = 0.18\text{m}$$

$$X_{12} = \frac{h_{12}}{h_{c2}} \Rightarrow h_{12} = X_{12} * h_{c2} = 2.051 \times 0.44\text{m} = 0.9\text{m}$$

El segundo valor corresponde a la altura de río que es el dato del presente problema, mientras que el primer valor corresponde a la altura conjugada de torrente buscada. $h_1 = 0.18$ m

Para el cálculo de la pérdida de energía en el resalto es necesario calcular los Bernoulli de río y de torrente:

$$Be_1 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} \Rightarrow U_1 = \frac{Q}{h_1 \times B} = \frac{1.36\text{m}^3/\text{s}}{0.18\text{m} \times 1.5\text{m}} = 5.04\text{m/seg.} \Rightarrow Be_1 = 0.18\text{m} + \frac{(5.04\text{m/s})^2}{2g}\text{m} = 1.47\text{m}$$

$$Be_2 = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \Rightarrow U_2 = \frac{Q}{h_2 \times B} = \frac{1.36\text{m}^3/\text{s}}{0.90\text{m} \times 1.5\text{m}} = 1.01\text{m/seg.} \Rightarrow Be_2 = 0.9\text{m} + \frac{(1.01\text{m/s})^2}{2g}\text{m} = 0.95\text{m}$$

$$\Delta B = B_1 - B_2 = (1.47 - 0.95)\text{m} = 0.52\text{m}$$

$$Fr = \frac{U_1}{\sqrt{g \times h_1}} = \frac{5.04\text{m/s}}{\sqrt{g \times 0.18\text{m}}} = 3.79$$

**La altura conjugada es $h_1$=0.18m, la pérdida de energía es ΔB=0.52m y el Fr=3.79.**

**EJERCICIOS PROPUESTOS.**

**EJERCICIO Nº8.**

En un canal rectangular de hormigón de ancho constante igual a 9m por el que circula un caudal de 10 $m^3$/s, presenta un cambio de pendiente. La pendiente de aguas arriba es de 0.01 y la de aguas abajo es de 0.0003. Determinar si el resalto se produce aguas arriba del cambio de pendiente o es ahogado.

**Rta:** Para n=0.014; $h_c$=0.50m; $hn_1$=0.34m (torrente); $hn_2$=1.02m (río); $hn_1=h_1=h_{torrente}$=0.34m; $h_2=h_{río}$=0.70m; $h_2$=0.70m< $hn_2$=1.02m⇒el resalto es ahogado.

**EJERCICIO Nº9.**

En un canal rectangular de ancho de 5 m y con un caudal de 11$m^3$/seg., la altura de escurrimiento es de 0.67m. Dicho canal presenta un escalón de bajada de 0.5m de altura. Calcular la altura aguas abajo del escalón y la pérdida de energía que corresponde al mismo.

**Rta**: $h_2$=1.47m; $\Delta B$=0.13m.

**EJERCICIO Nº10.**

Por un canal de hormigón de sección rectangular cuyo ancho es de 6 m, circulan 5 $m^3$/s. Presenta un estrechamiento brusco a un ancho de 4 m. La altura aguas arriba del mismo es de 0.88m. Calcular la altura aguas abajo del estrechamiento y su pérdida de energía.

**Rta.:** $h_2$=0.78m; $\Delta B$=0.016m.

**EJERCICIO Nº11.**

En un canal de hormigón de ancho constante igual a 8 m por el que circula un caudal de 6 $m^3$/seg., se coloca un escalón de bajada de 0.2m de altura, la altura aguas abajo es de 0.92m. Calcular la altura de aguas arriba.

**Rta.:** $h_{11}$=0.13 m y $h_{12}$=0.70m. Las energías de ambas alturas verifican que $B_1>B_2$, de modo que es necesario saber la pendiente de fondo aguas arriba para determinar cuál de las dos alturas es la que corresponde.