

## 1. SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

### 1.1 Introducción

La solución de sistemas lineales de ecuaciones es uno de los principales puntos dentro de la simulación de reservorios.

Las técnicas matemáticas conducen a un set de ecuaciones algebraicas que pueden ser lineales o no lineales.

El carácter lineal o no lineal del sistema de ecuaciones está determinado por la naturaleza del problema (EDP lineales o no lineales y la naturaleza de la aproximación en diferencias finitas con tratamiento implícito o explícito de los coeficientes).

Aún cuando se obtenga un sistema de ecuaciones no lineales con la aproximación en diferencias finitas, las ecuaciones pueden transformarse a lineales mediante el uso de técnicas de linealización.

### 1.2 Ecuaciones diferenciales en forma matricial

Aproximar las ecuaciones diferenciales continuas que describen el movimiento de un fluido en un medio poroso por diferencias finitas resulta en un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= d_1 & a \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= d_2 & b \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= d_3 & c \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= d_n & d \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ );  $n \times n$  coeficientes  $a_{ij}$  y  $n$  miembros en la derecha  $d_i$ .

Se describirá cómo puede escribirse la aproximación en diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial (EDP) en forma matricial.

#### 1.2.1 Ecuaciones en diferencias para problemas de flujo 1D.

##### Flujo Incompresible.

Consideremos la ecuación para flujo incompresible aplicada a un reservorio horizontal 1D

$$\begin{aligned} (\nabla \Phi = \nabla p) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_c A_x k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta x + \mu q_{sc} = 0 \quad e \end{aligned}$$

Supongamos que queremos implementar una aproximación en diferencias finitas a la ecuación (e) sobre el sistema discreto de la figura 1.

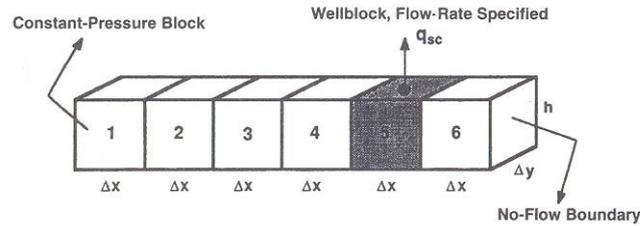


Figura 1

Para simplificar suponemos distribución de espesor, permeabilidad y ancho de grilla uniforme. Por lo tanto la ecuación (e) puede escribirse:

$$\beta_c A_x k_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta x + \mu q_{sc} = 0 \quad e.1$$

o

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\mu q_{sc}}{\beta_c k_x V_b} = 0 \quad e.2$$

$$V_b = A_x \Delta x$$

Nuevamente para simplificar la discusión, asumimos que el sistema consiste de seis grillas uniformemente espaciadas, centradas en el bloque.

En la celda 5 existe un pozo que produce a un caudal de  $q_{sc}$ . En el extremo izquierdo del sistema, la presión en la celda 1 se mantiene constante y en el extremo derecho está sellado, esto es, existe condición de no flujo.

La aproximación en diferencias centrales de la ecuación (e.1) escrita para la celda  $i$  es

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta x^2} + \left( \frac{\mu q_{sc}}{\beta_c k_x V_b} \right)_i = 0 \quad e.3$$

la cual puede ser escrita para las distintas celdas cuando la presión es desconocida.

Como la presión en la celda 1 se conoce se excluye del conjunto de incógnitas. Además, la celda 5 tiene dos incógnitas la presión de la celda y la  $p_{wf}$  del pozo. Escribiendo la aproximación en diferencias finitas de la ecuación (e.3) para las celdas  $i=2$  hasta 6 se genera el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 -2p_2 + p_3 &= -p_1 \\
 \text{para } i &= 2 \\
 p_2 - 2p_3 + p_4 &= 0 \\
 \text{para } i &= 3 \\
 p_3 - 2p_4 + p_5 &= 0 \\
 \text{para } i &= 4 \\
 p_4 - 2p_5 + p_6 &= -\frac{\mu q_{sc} (\Delta x)^2}{\beta_c k_x V_b} \quad (e.4) \\
 \text{para } i &= 5 \\
 p_5 - p_6 &= 0 \\
 \text{para } i &= 6
 \end{aligned}$$

Note que la ecuación para la celda 6 incluye la condición de no flujo y que la ecuación para la celda 5 incluye la condición de borde interno (especificación de caudal), que es impuesta al sistema.

El sistema lineal de ecuaciones puede ser escrito en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu q_{sc} (\Delta x)^2}{\beta_c k_x V_b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad e.5$$

La ecuación (e.5) muestra que cuando las ecuaciones en diferencias finitas se escriben a lo largo de una línea, los coeficientes de la matriz siempre componen una estructura tridiagonal formada por una diagonal principal, una diagonal superior y una diagonal inferior.

Resolver el sistema de ecuaciones lineales representado por la ecuación (e.5) implica encontrar las presiones de las celdas 2 a 6. Luego de encontrar las presiones de las celdas, usando alguno de los modelos de pozo, se puede calcular la presión de fluencia ( $p_{wf}$ ) para el pozo ubicado en la celda 5.

## 6.2.2 Ecuaciones en diferencias para problemas de flujo 2D.

### Flujo Incompresible

El desarrollo de la ecuación en diferencias finitas para flujo 2D, en un reservorio horizontal es similar al descrito en la sección anterior. Consideremos la ecuación 2D para flujo incompresible

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_c A_x k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta_c A_y k_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) \Delta y + \mu q_{sc} = 0 \quad (f)$$

Supongamos que queremos resolver la distribución de presiones con la ecuación (f) en el reservorio de la figura 2 con límites con presión constante.

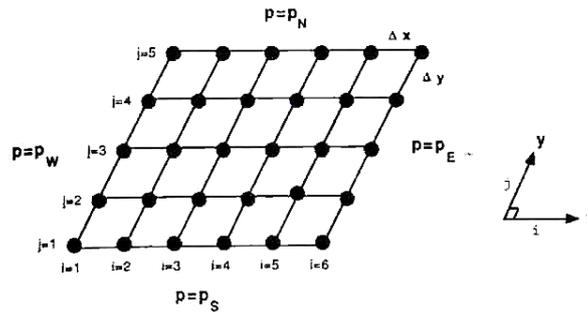


Figura 2

Por simplicidad adoptamos  $\Delta x = \Delta y$  y decimos que el reservorio es homogéneo e isótropo.

La ecuación (f) puede ser simplificada a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\mu q_{sc}}{\beta_c V_b k} = 0 \quad (g)$$

donde  $k = k_x = k_y$  y  $V_b = A_x \Delta x = A_y \Delta y$ . Como no hay pozos el último término puede eliminarse

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (h)$$

La ecuación (h) es conocida como la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares 2D.

La aproximación en diferencias finitas es

$$\frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (h.1)$$

o

$$p_{i,j-1} + p_{i,j+1} - 4p_{i,j} + p_{i-1,j} + p_{i+1,j} = 0 \quad (h.2)$$

ya que  $\Delta x = \Delta y$

Ahora, las ecuaciones en diferencias finitas pueden ser escritas para cada nodo de la grilla ( $i=2$  hasta 5 y  $j=2$  hasta 4) para los doce nodos interiores en la figura 6.3.

La ecuación (h.2) representa 12 ecuaciones lineales con 12 incógnitas. La expresión matricial sería

$$-4p_{2,2} + p_{3,2} + p_{2,3} = -p_S - p_W$$

para nodo (2,2)

$$p_{2,2} - 4p_{3,2} + p_{4,2} + p_{3,3} = -p_S$$

para nodo (3,2)

$$p_{3,2} - 4p_{4,2} + p_{5,2} + p_{4,3} = -p_S$$

para nodo (4,2)

$$p_{4,2} - 4p_{5,2} + p_{5,3} = -p_S - p_E$$

para nodo (5,2)

$$p_{2,2} - 4p_{2,3} + p_{3,3} + p_{2,4} = -p_W$$

para nodo (2,3)

$$p_{3,2} + p_{2,3} - 4p_{3,3} + p_{4,3} + p_{3,4} = 0$$

para nodo (3,3)

$$p_{4,2} + p_{3,3} - 4p_{4,3} + p_{5,3} + p_{4,4} = 0$$

para nodo (4,3)

$$p_{5,2} + p_{4,3} - 4p_{5,3} + p_{5,4} = -p_E$$

para nodo (5,3)

$$p_{2,3} - 4p_{2,4} + p_{3,4} = -p_W - p_N$$

para nodo (2,4)

$$p_{3,3} + p_{2,4} - 4p_{3,4} + p_{4,4} = -p_N$$

para nodo (3,4)

$$p_{4,3} + p_{3,4} - 4p_{4,4} + p_{5,4} = -p_N$$

para nodo (4,4)

$$p_{5,3} + p_{4,4} - 4p_{5,4} = -p_E - p_N$$

para nodo (5,4)

El sistema de ecuaciones tiene una matriz de coeficientes de estructura pentadiagonal.

$$\begin{bmatrix}
 -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 p_{2,2} \\
 p_{3,2} \\
 p_{4,2} \\
 p_{5,2} \\
 p_{2,3} \\
 p_{3,3} \\
 p_{4,3} \\
 p_{5,3} \\
 p_{2,4} \\
 p_{3,4} \\
 p_{4,4} \\
 p_{5,5}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -p_S - p_W \\
 -p_S \\
 -p_S \\
 -p_S - p_E \\
 -p_W \\
 0 \\
 0 \\
 -p_E \\
 -p_W - p_N \\
 -p_N \\
 -p_N \\
 -p_E - p_N
 \end{bmatrix}$$

-Basic Applied Reservoir Simulation. Ertekin, Abou Kassem, King. SPE TEXTBOOK SERIES VOL 7(2001)

-Petroleum Reservoir Simulation. Aziz y Settari Applied Science Publishers (1979)

-"Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation" . Peaceman Elsevier (1977)