**1. Ecuación de flujo para fluido poco compresible**

Para un flujo de un fluido poco compresible, se asume que la compresibilidad del fluido es pequeña y permanece constante dentro del rango de interés de la presión.
B puede ser aproximado como

$$B = B^o / \left[1 + c(p - p^o)\right] \quad (1)$$

c = compresibilidad del fluido

$p^o$ = presión de referencia

$B^o$ = B a la presión de referencia

Volviendo a la ecuación de flujo en medios porosos y sustituyendo a B en el lado derecho de la misma por la ecuación (1) y considerando medio poroso incompresible

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\Delta x - \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Delta y - \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c \frac{k_z A_z}{\mu B}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\Delta z + q_{sc} = \frac{V_b}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right) \quad (2)$$

$$\frac{V_b}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right) = \frac{V_b \phi}{\alpha_c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[1 + c(p - p^o)\right] / B^o\right\} = \frac{V_b \phi c}{\alpha_c B^o}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (3)$$

Por lo tanto la ecuación de flujo para fluidos poco compresibles queda:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Delta y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c \frac{k_z A_z}{\mu B}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\Delta z + q_{sc} = \frac{V_b \phi c}{\alpha_c B^o}\frac{\partial p}{\partial t} \quad (4)$$

Ignorando términos gravitatorios

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c \frac{k_z A_z}{\mu B}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z + q_{sc} = \frac{V_b \phi c}{\alpha_c B^o}\frac{\partial p}{\partial t} \quad (5)$$

Sustituyendo B en el lado izquierdo de la ecuación y considerando la viscosidad del fluido constante

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x \left[1 + c(p - p^o)\right]\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y \left[1 + c(p - p^o)\right]\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y +$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z \left[1 + c(p - p^o)\right]\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z + B^o \mu q_{sc} = \frac{V_b \mu \phi c}{\alpha_c}\frac{\partial p}{\partial t} \quad (6)$$

Expandiendo las derivadas en el lado izquierdo de (6)

$$
\begin{aligned}
&\left[1+c(p-p^{o})\right]\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\beta_c k_x A_x c\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\Delta x+\\
&\left[1+c(p-p^{o})\right]\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+\beta_c k_y A_y c\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\Delta y+\\
&\left[1+c(p-p^{o})\right]\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z+\beta_c k_z A_z c\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\Delta z+\\
&B^{o}\mu q_{sc}=\frac{V_b\mu\phi c}{\alpha_c}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

En muchos casos se asume que

$$\left[1+c(p-p^{o})\right]\approx 1$$

para fluidos poco compresibles ya que c es muy pequeña. (para petróleos $10^{-5}$-$10^{-6}$ 1/psi) Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y\frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z\\
&>> c\left[\beta_c k_x A_x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\Delta x+\beta_c k_y A_y\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\Delta y+\beta_c k_z A_z\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\Delta z\right] \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Si $\Delta x=\Delta y=\Delta z$, $k_x=k_y=k_z$ y $A_x=A_y=A_z$ entonces

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}>>c\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right] \qquad (9)$$

c es pequeña para fluidos poco compresibles y los gradientes de presión también son relativamente pequeños (por lo tanto sus cuadrados son más pequeños aún). Obviamente esto es cierto para gradientes < 1 psi/ft condición que no se cumple en las cercanías del pozo (wellbores).
Considerando la ecuación (7) asumiendo

$$\left[1+c(p-p^{o})\right]\approx 1$$

y despreciando los términos cuadráticos se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_c k_x A_x \frac{\partial p}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_c k_y A_y \frac{\partial p}{\partial y}\right)\Delta y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_c k_z A_z \frac{\partial p}{\partial z}\right)\Delta z +$$
$$B^o \mu q_{sc} = \frac{V_b \mu \phi c}{\alpha_c}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (10)$$

Para un medio homogéneo e isótropo la ecuación puede simplificarse

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{B^o \mu q_{sc}}{\beta_c k V_b} = \frac{\mu \phi c}{\beta_c \alpha_c k}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (11)$$

Y si no existen fuentes o sumideros externos

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\mu \phi c}{\beta_c \alpha_c k}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (12)$$

*La ecuación de flujo para fluidos poco compresibles a diferencia de la ecuación para fluidos incompresibles describen un problema dependiente del tiempo de modo que la solución de la ecuación (12) determina una presión que es función de las variables independientes **x,y,z** y **t**.*