CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL DE ALGUNOS PROBLEMAS SENCILLOS

Como se dijo la programación lineal es una técnica ampliamente utilizada para la búsqueda de la solución óptima a problemas de innumerables disciplinas en muchos campos de la actividad humana.

En este capítulo se presentan algunas aplicaciones sencillas. En el siguiente estudiaremos otras aplicaciones que exigen un poco más de análisis y de conocimiento del área respectiva.

A. APLICACIONES EN PRODUCCIÓN

1. Mezcla de Producción:

Es un tipo de modelos que aparecen por ejemplo en aquellas situaciones en las cuales una empresa dispone para un periodo dado de cantidades limitadas de recursos (materia prima, maquinaria, dinero, habilidades humanas, etc.), que utiliza para la producción de diferentes artículos, cada uno de los cuales utiliza los recursos en cierta combinación. Es decir, se conocen los valores aij, que indican el número de unidades del recurso i necesarias para producir una unidad del artículo j. También se conocen los valores Cj que son las utilidades unitarias (o costos unitarios) del producto j.

El problema consiste entonces en determinar la cantidad Xj a producir de cada uno de los artículos que compiten por el uso de los recursos, de tal forma que se obtenga un máximo de producción o un máximo de beneficio, o un mínimo de costo u otro objetivo especial, en un periodo determinado de producción

Ilustremos este tipo de problemas con dos ejemplos sencillos:

Ejemplo N° 1 -- Mezcla Óptima de Productos--

Una pequeña empresa fabrica artículos de dos tipos a partir de tres materias primas, llamadas A, B, C. El artículo tipo 1 produce utilidad de $400 por unidad, y para su fabricación se requieren una libra de A, una libra de B y tres gramos de C. El artículo tipo 2 produce utilidad de $300 por unidad, para cuya fabricación se necesitan una libra de A, 2 libras de B y 2 gramos de C.

La empresa dispone de 150 libras de A, 240 libras de B y 420 gramos de C, para el siguiente periodo de producción (puede ser una hora, un día u otro lapso).

La compañía desea conocer cuantas unidades de cada tipo de artículo debe producir en el periodo con el fin de maximizar la utilidad total por venta de los artículos. Se supone que todos los artículos producidos se venden y que la utilidad unitaria permanece constante, sin importar la cantidad vendida.

Construcción del Modelo:

Siguiendo la metodología propuesta en este capitulo, una vez comprendida la situación que se describe, vamos a organizar los datos en una tabla; con lo cual será más fácil su utilización para construir el modelo.

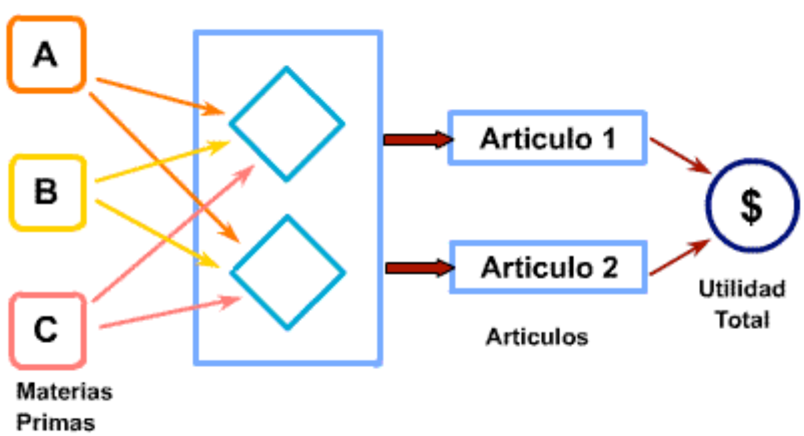
Datos:

TIPO DE ARTICULO	CONSUMO DE LA MATERIA PRIMA			UTILIDAD ($/UNIDAD)
	A	B	C	
P1	1	1	3	400
P2	1	2	2	300
Cantidad Disponible	150	240	420	

Diagrama del Problema:

Un bosquejo de la situación puede ser el que se muestra en la siguiente gráfica, en la cual se observa que los elementos claves del problema son las tres materias primas y los dos tipos de artículos, mientras que el objetivo es maximizar la utilidad. De esta manera aparece claro que el objetivo se medirá en pesos / periodo.

De igual forma salta a la vista que las actividades alternativas son, como lo dice el enunciado, producir artículos tipo 1 y producir artículos tipo 2. Téngase en cuenta que las actividades no son excluyentes sino que pueden darse simultáneamente a determinados niveles; desde llevarse a cabo una sola de ellas, hasta ejecutarse ambas en cierta combinación. Todo ello depende de la relación entre su contribución al objetivo y su consumo de las materias primas.



Definición de Variables:

Debemos usar unas variables para cuantificar el nivel o grado al cual llevaremos a cabo cada actividad.

Por ello definimos las variables así:

X1 : cantidad de artículos tipo 1 a fabricar en el período.

X2 : cantidad de artículos tipo 2 a fabricar en el período.

Una vez definidas las variables de decisión y comprendido el objetivo del problema, el modelo se plantea así:

Función del objetivo

Utilidad total = 400**X1**+ 300**X2** $/periodo

Limitantes o restricciones en el logro del objetivo

La cantidad utilizada de cada materia prima debe ser menor o igual que la cantidad disponible.

De A	$1X1 + 1X2 \leq 150$	Libras de A/Periodo
De B	$1X1 + 2X2 \leq 240$	Libras de B/Periodo
De C	$3X1 + 2X2 \leq 420$	gramos de C/Periodo

Los valores de todas las variables deben ser mayores o iguales a cero
(Condición de no negatividad de las variables)

X1 ≥ 0, **X2** ≥ 0

Modelo Completo:

Así, el modelo tendrá la siguiente forma final:

Maximizar Utilidad Total = 400X1+ 300X2

$$1X1 + 1X2 \leq 150$$
$$1X1 + 2X2 \leq 240$$

Sujeta a: $3X1 + 2X2 \leq 420$

Con **X1, X2** ≥ 0

solución: *X1= 120; X2 = 30; Utilidad = 57 000*

Consistencia de las Unidades en las Funciones:

Mas con el propósito de ilustrar la manera de verificar la compatibilidad de unidades, que con el de constatar la veracidad del modelo, pues este es muy elemental, vamos a realizar un análisis de las unidades en cada una de las funciones.

En la función objetivo:

400 ($ / unidad de P1) * X1 (unidades de P1 / período)
+ 300 ($ / unidad de P2) * X2 (unidades de P2 / período) = ($ / período)

Se verifica que son las mismas unidades de la función objetivo.

En las restricciones analicemos únicamente para el consumo de la materia prima A, pues para las otras es similar:

1(libra de A/unidad de P1) * X1 (unidades de P1/periodo)
+ 1(libra de A/unidad de P2) * X2 (unidades de P2/periodo) = (libras de A/periodo)

Que coinciden con las unidades del miembro derecho de la primera desigualdad = (150 lb. de A/periodo)

Adviértase que la **condición de no negatividad** de las variables, tiene sentido lógico en este modelo, ya que no se puede fabricar una cantidad negativa de alguno de los tipos del artículo.

Variación en el intervalo permitido de los valores de las variables:

Luego evaluaremos problemas en los cuales se puede presentar el caso de que una o mas variables puedan tomar valores entre menos infinito y más infinito o incluso que algunas variables deban tomar valores negativos o cero. En estos casos debemos efectuar los ajustes necesarios en el modelo para que todas las variables estén condicionadas a ser no negativas, ya que esta es una condición del algoritmo utilizado para la solución de los modelos de P.L.
Por este motivo a la condición de no negatividad de las variables se le llama en muchos casos **condición técnica** (de no negatividad).

Variables:Valores mínimos y máximos / Funciones:Proporcionalidad

Debemos interpretar también, la parte del enunciado referente a que la empresa supone que vende todos los artículos producidos y que la utilidad permanece constante. La primera parte nos indica que no hay límites en cuanto al número de artículos de cada tipo a producir, excepto los inherentes a la disponibilidad de los recursos productivos.

La segunda parte nos permite considerar la proporcionalidad entre la cantidad de artículos y la utilidad total por ventas de cada tipo de artículo.

En algunas situaciones de mercado ocurre que hay límites en las ventas máximas o mínimas de un determinado tipo de artículo, lo cual debe reflejarse en el modelo como una restricción en el valor de la variable correspondiente a la actividad.

Por ejemplo si conocemos que la demanda máxima del artículo 1 es de 30 unidades, debemos incluir en problema la condición de que no se produzcan más de 30 unidades de este articulo, ya que la producción adicional no tendría comprador, generando entonces un inventario en lugar de contribuir a la utilidad total. Igualmente si tenemos una demanda comprometida de 15 unidades del artículo 2, la cual deseamos satisfacer, debemos agregar al modelo una restricción expresando que el número de unidades del articulo 2 debe ser al menos 15.

Con la dos consideraciones anteriores, el modelo debe tener estas otras dos restricciones

X1 $\leq$ 30

X2 $\geq$ 15

Por otro lado en algunas condiciones de mercado el precio unitario de venta de los artículos se "quiebra", o sea se disminuye en alguna cantidad cuando el número de artículos excede cierto valor. Por ejemplo si X3 es la cantidad comprada de un articulo cuyo precio unitario es de $10 cuando 0 $\leq$ X3 $\leq$ 100; pero que rebaja a $7 cuando 101 $\leq$ X3 $\leq$ 250 y rebaja de nuevo a $ 6 cuando X3 $\geq$ 251; en este caso no se cumple la condición de proporcionalidad en la función del objetivo ya que no tenemos un coeficiente único para multiplicar por la cantidad comprada para obtener el costo de compra de las X3 unidades. El coeficiente depende del intervalo en el cual se encuentre el valor de X3. En algunos casos podemos efectuar promedios de los valores de los parámetros pertinentes y en otros se puede plantear el modelo de la forma de programación lineal separable, como lo aprenderemos en un ejemplo posterior.

Ejemplo N° 2-- Mezcla Óptima de Productos --

Una compañía produce artículos de tres tipos, realizando las operaciones C, F, T. La máquina de la operación C cuesta $1500/hora de funcionamiento, la de la operación F cuesta $2400/hora y la de la operación T cuesta $1200/hora.

El costo del material para una unidad del artículo 1 es $50, para una unidad del artículo 2 es de $80 y para una unidad del artículo 3 es de $140.

Los precios de venta para los artículos son respectivamente de $402, $420 y $600, la unidad.

Datos:

Los tiempos de proceso requeridos por una unidad de cada tipo de artículo, se dan en la siguiente tabla:

Minutos de operación por unidad

TIPO DE ARTÍCULO	C	F	T
A1	2,5	2,5	2,0
A2	2,0	1,0	2,5
A3	2,0	2,5	3,0

La compañía necesita conocer cuantas unidades de cada tipo de artículo debe fabricar en una hora, para obtener la máxima utilidad.

Datos Organizados:

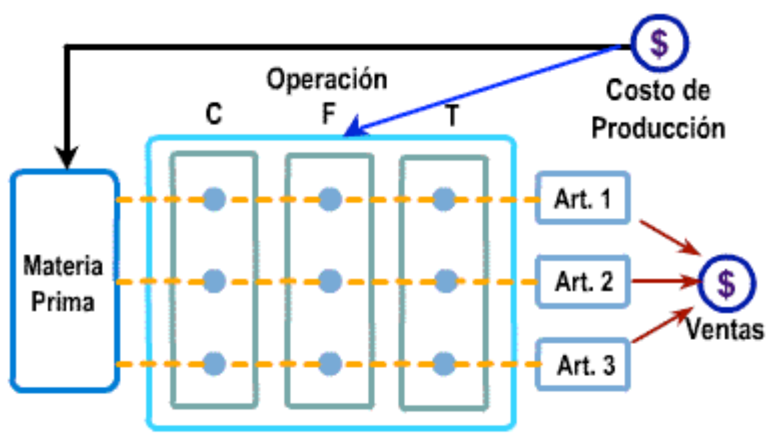
Inicialmente podemos elaborar unas tablas con los datos del problema, así:

Máquina	**C**	**F**	**T**
Costo de Funcionamiento ($/minuto)	25	40	20

Artículo	**1**	**2**	**3**
Costo del Material ($/unidad)	50	80	140
Precio de Venta ($/unidad)	402	420	600

Esquema del Proceso:

El esquema del proceso puede ser el siguiente:



Los elementos son la materia prima, las tres operaciones de proceso y los tres artículos.
Determinar los elementos del problema es de gran ayuda para la elaboración de la función objetivo y las funciones de las tres restricciones.

Calculo de las Utilidades Unitarias:

El objetivo será maximizar la utilidad resultante de la producción en una hora. Esta utilidad será la diferencia entre el ingreso por ventas y los gastos por materia prima y operaciones en las máquinas.

Calculemos las utilidades netas, así:

	ARTICULO		
	1	**2**	**3**
Ventas	402	420	600
-Costos	232.5	232.5	350

Material	50	80	140
Operación C	2,5*25	2,5*25	2,0*25
Operación F	2,0*40	1,0*40	2,5*40
Operación T	2,0*20	2,5*20	3,0*20
= Utilidad	169.5	187.5	250.0

Definición de las Variables de Decisión:

Las variables a utilizar se definen como:

Xi : cantidad de artículos del tipo i a fabricar en una hora (i=1,2,3).
Obsérvese que ahora se han definido las variables con una notación más genérica y resumida.

Después de haber comprendido el proceso y definido las variables de decisión, podemos construir el modelo así:

Maximizar: Utilidad = 169.5X1 + 187.5X2 + 250X3

Sujeto a:

$2.5X1 + 2.5X2 + 2X3 \leq 60$ *Minutos de C / hora*

$2X1 + 1X2 + 2.5X3 \leq 60$ *Minutos de F/ hora*

$2X1 + 2.5X2 + 3X3 \leq 60$ *Minutos de T/ hora*

Con $X1, X2, X3 \geq 0$

Las restricciones se refieren a que una máquina no puede utilizarse durante una hora por un tiempo total mayor que la hora. Es decir, el tiempo que una máquina dedique a la producción del artículo 1, más el que dedique al artículo 2 más el dedicado al artículo 3, no puede exceder a una hora de capacidad, pues ese es el período de tiempo que se tomó como referencia.

Solución: X1 = 17.1429; X2 = 0; X3 = 8.5714; Utilidad = 5057.143

2. Programación de la Producción:

Esta es una de las áreas de la Programación Lineal más rica en aplicaciones. Un problema de programación de la producción puede verse como un problema de mezcla de producción para varios periodos hacia el futuro. Se quieren determinar los niveles de producción que permitirán a la compañía obtener el mínimo costo (o la máxima ganancia), cumpliendo con los requerimientos de las limitaciones en mano de obra, maquinaria, materiales, espacio de almacenamiento, requisito de demandas, etc.

Los problemas de Programación de Producción tienen naturaleza recurrente, es decir que se presentan un periodo tras otro, sólo que con algunas variaciones en ciertos datos, como por ejemplo en las demandas, o en las disponibilidades de algunos recursos. Por este motivo los modelos de P.L. se usan extensivamente en este campo, pues una vez que un modelo fue resuelto para un periodo determinado, basta con repetir su solución para los datos del nuevo periodo, para obtener recomendaciones acerca del programa óptimo de producción.

Ilustremos este tipo de aplicaciones mediante el siguiente ejemplo sencillo:

Ejemplo N°3 -- Programación de la Producción--

Un fabricante debe cumplir los siguientes compromisos, en el primer trimestre:

MES	Enero	Febrero	Marzo
Unidades	10.000	30.000	20.000

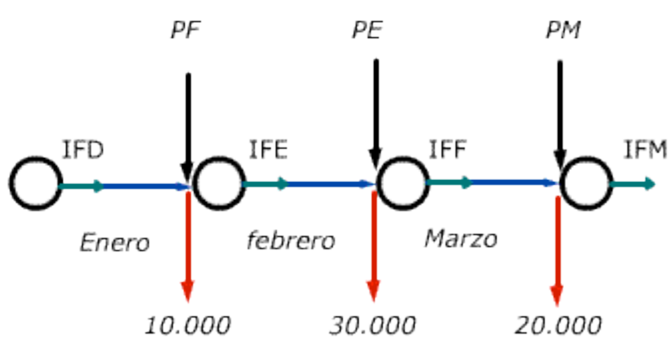
La capacidad mensual de producción de su planta es de 20.000 unidades. El costo unitario de producción varia cada mes, así: Enero $10, Febrero $9 y Marzo $12. La compañía estima en $3 el costo de almacenamiento de cada unidad que posea en la bodega él último día del mes. La capacidad de la bodega de que dispone es de 40.000 unidades.

La empresa tiene en el inventario 5000 unidades y desea tener 2000 al final. El problema a resolver consiste en determinar el programa de producción mensual que minimiza los costos totales en el trimestre.

Se supone que la producción se realiza durante todo el mes y el despacho se efectúa él último día de mes.

Construcción del Modelo:

La gráfica que describe el problema puede ser:



Deseamos determinar el programa de producción para obtener el mínimo costo en el trimestre. Para ello definimos las variables así:

P_i : Cantidad de artículos producidos en el mes *i*, (i=E,F,M).
IF_i : Unidades en el inventario final del mes *i*,(i=D,E,F,M) .

Minimizar: Costos =

10PE +9PF+12PM Costo de Producción
+3(IFE +IFF+IFM) Costo de almacenamiento.

Sujeto a:

1. Capacidades de producción por mes:

Enero	PE $\leq$ 20.000
Febrero	PF $\leq$ 20.000
Marzo	PM $\leq$ 20.000

Inventario Inicial (Final de Diciembre)	IFD=5000
Inventario Final (Marzo)	IFM=2000

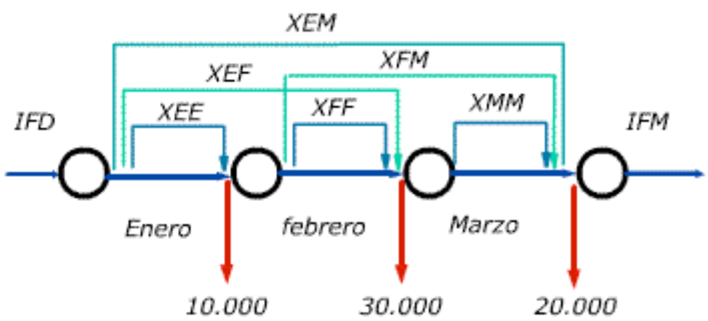
2. Despachos comprometidos cada mes

Enero	IFD + PE =10.000 + IFE
Febrero	IFE + PF = 30.000 + IFF
Marzo	IFF + PM = 20.000 + IFM

3. Capacidad de la bodega

Enero	IFD + PE $\leq$ 40.000
Febrero	IFE + PF $\leq$ 40.000
Marzo	IFF + PM $\leq$ 40.000

Los problemas de este tipo también pueden modelarse de otra manera como lo sugiere el siguiente grafico.



Sean Xij : Cantidad de artículos producidos en el mes i con destino a las ventas del mes j (i=E, F, M y j=E, F, M).
De esta forma el inventario final de cada mes está integrado por las cantidades producidas ese mes con destino a los meses siguientes.

La función objetivo y las restricciones serán:

Minimizar:Costo =10(XEE+XEF+XEM)+9(XFF+XFM)+12XMM+3(XEF+XFM) +6XEM

Nótese como los valores (XEF+XEM) y (XFM+XEM) equivalen a los inventarios finales de los meses de Enero y Febrero.

Sujeta a:

Capacidades de producción por mes:

Enero	XEE + XEF + XEM $\leq$ 20.000
Febrero	XFF + XFM $\leq$ 20.000
Marzo	XMM $\leq$ 20.000

Inventario final de diciembre y de marzo

Diciembre	IFD = 5.000
Marzo	IFM = 2.000

Despachos comprometidos cada mes:

Enero	IFD + XEE = 10.000
Febrero	XEF + XFF = 30.000
Marzo	XEM + XFM + XMM =20.000 + IFM

En algunos textos de programacion de la producción este tipo de problemas se resuelven en forma relativamente sencilla disponiendo los datos en una tabla, en la cual se anotan los costos de cada acción alternativa y se procede a obtener una solución aprovechando la estructura característica del proceso.