**Correas F., Grioni M., Hidalgo M., Tripp N., Bragoni D.**
**G**rupo de **I**nvestigación **H**idráulica **C**omputacional y **A**plicada
*Instituto de Hidráulica, Facultad de Ingeniería*
*Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina*

# TALLER DE MODELACIÓN HIDRÁULICA CON CFD

## "LEYES BÁSICAS DE CONSERVACIÓN Y FLUJO DE FLUIDOS, APLICACIÓN A MECÁNICA DE FLUIDOS E INTRODUCCIÓN A LA RESOLUCIÓN DE TURBULENCIA"

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

# LEYES FUNDAMENTALES DE FLUJO Y CONSERVACIÓN

Correas, F.

# LEYES FUNDAMENTALES DE FLUJO Y CONSERVACIÓN

- Introducción
- Ecuaciones gobernantes de flujo y transferencia de calor
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales y diferenciales de la ecuación de transporte
- Aplicaciones

# Introducción

# Introducción

Referencias:

Versteeg & Malalasekera “An Introduction to Computacional Fluid Dynamics. The Finite Volumen Method” Longman Group Ltd., 1995

# LEYES …

Introducción | Ecuaciones | Navier-Stokes

## Leyes …

- **Introducción**
- Ecuaciones de flujo y calor
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

GIHCA

Correas, F.

# LEYES …

Introducción | Ecuaciones | Navier-Stokes

**Leyes …**

- **Introducción**
- Ecuaciones de flujo y calor
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

**RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES!!**

# LEYES …

Introducción | Ecuaciones | Navier-Stokes

Leyes …

- **Introducción**
- Ecuaciones de flujo y calor
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

**Método de los Volúmenes Finitos**

Especialmente importante para problemas fluidos (se adapta al desarrollo teórico)

Discretización de un espacio fluido, malla.

Volumen de Control

Resolución por integración en los volúmenes, conociendo la variación

Qué ecuaciones quiero resolver?? Qué condiciones debo cumplir?

# Bibliografía Recomendada


- Versteeg & Malalasekera "An Introduction to Computacional Fluid Dynamics. The Finite Volumen Method" Longman Group Ltd., 1995
- J. C. Tannehill, D. A. Anderson, and R. H. Pletcher, *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Washington, DC: Taylor & Francis, 1997.
- S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*. Washington : New York: Hemisphere Pub. Corp. ; McGraw-Hill, 1980.
- F. M. White, Fluid Mechanics, 4th ed. New York McGraw-Hill, 1998.
- F. M. White, *Viscous fluid flow*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
- Ansys® Documentation (Theory, User's  and Modeling Guide)

# Ecuaciones de flujo y transporte

# Leyes de conservación de la Física

## Conservación de la Masa

- La masa no cambia o el cambio es igual a la introducida o extraída

## Conservación de la Cantidad de Movimiento

- La tasa de cambio de la cantidad de movimiento es igual a la suma de las fuerzas en una partícula de fluido (segunda ley de Newton)

## Conservación de la Energía

- La tasa de cambio de energía es igual a la suma de la tasa de calor agregado y a la tasa de trabajo hecho en la partícula de fluido (primera ley de la termodinámica).

# Leyes de conservación de la Física

## Hipótesis

- Se considera al fluido como continuo
- Para nuestro análisis (escala macroscópica) la estructura molecular y el movimiento molecular pueden ignorarse.
- El comportamiento se describe por las propiedades macroscópicas (velocidad, presión, densidad y temperatura) y sus derivadas espaciales y temporales.
- Una partícula de fluido o punto en el fluido es el menor elemento cuyas propiedades no son influenciadas por moléculas individuales.

# Leyes de conservación de la Física

## Hipótesis

- Se considera al fluido como continuo
- Para nuestro análisis (escala macroscópica) la estructura molecular y el movimiento molecular pueden ignorarse.
- El comportamiento se describe por las propiedades macroscópicas (velocidad, presión, densidad y temperatura) y sus derivadas espaciales y temporales.
- Una partícula de fluido o punto en el fluido es el menor elemento cuyas propiedades no son influenciadas por moléculas individuales.

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

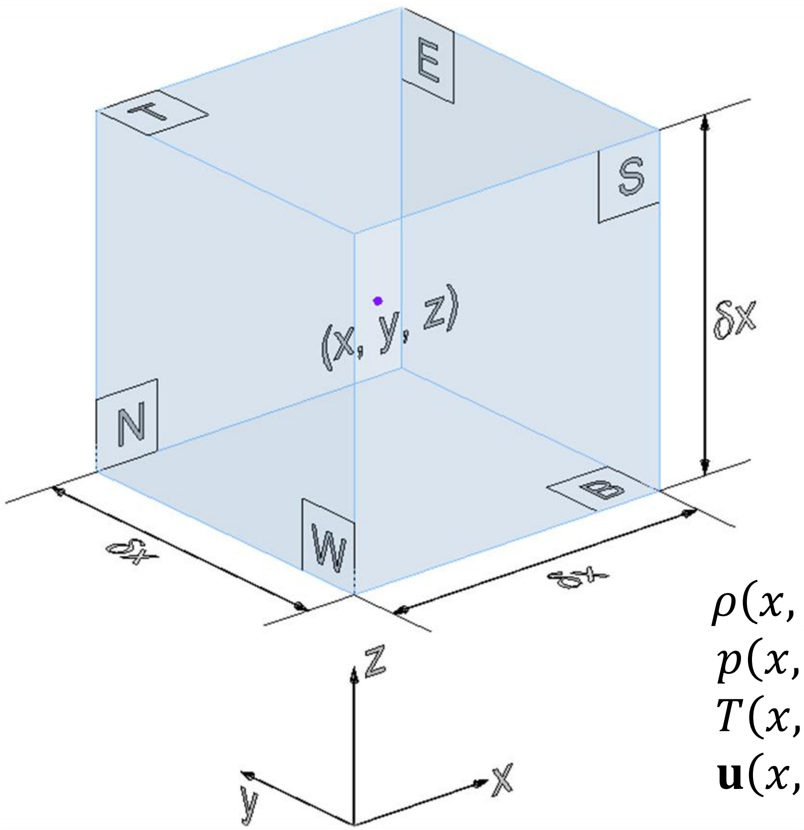
$$\mathrm{F} = (\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{P}) \cdots \mathrm{div}\, F = \nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\, F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{div}\, grad\, F = \nabla \cdot \nabla F = \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones




Seis Caras (N, S, E, W, T, B)
Dirección, centro.
Los cambios (de masa, ímpetu, o energía) debido al flujo a través de bordes y fuentes o sumideros, conducen a las ecuaciones.

$$\rho(x,y,z,t)$$
$$p(x,y,z,t)$$
$$T(x,y,z,t)$$
$$\mathbf{u}(x,y,z,t)$$

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

## Conservación de la masa

Tasa de incremento de Masa en el elemento fluido

=

Tasa neta de flujo de masa hacia el elemento fluido

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

## Conservación de la masa

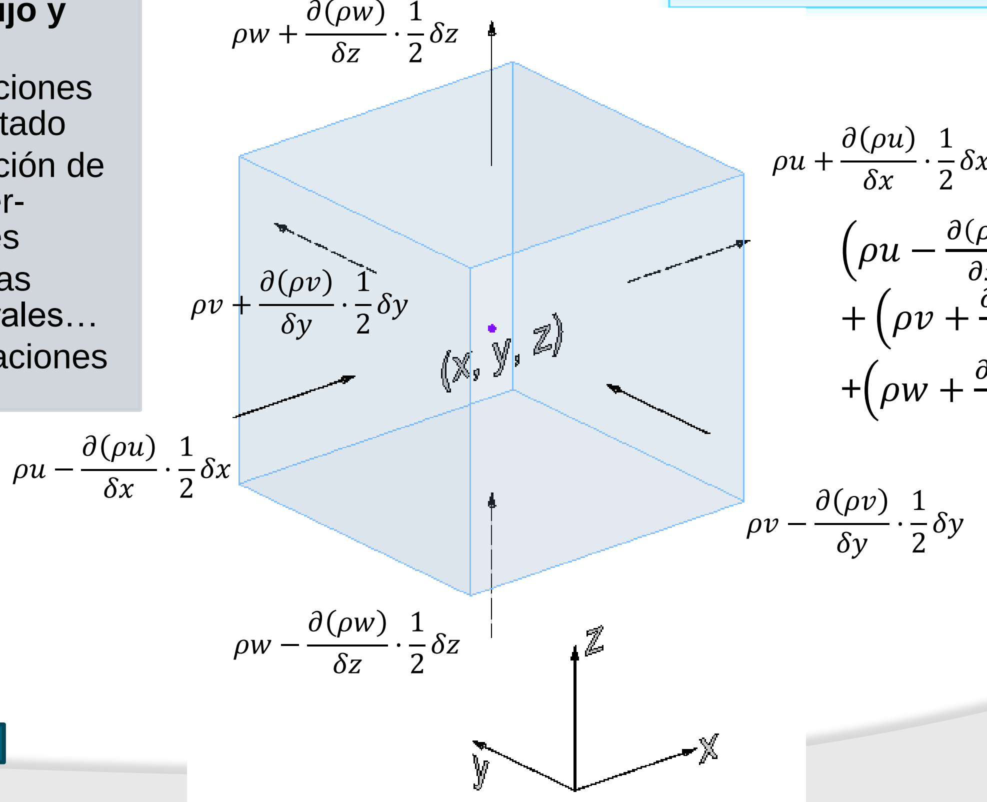
Tasa de incremento de Masa en el elemento fluido = Tasa neta de flujo de masa hacia el elemento fluido

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

**Conservación de la masa:**
Tasa de flujo másico a través de una cara:
Densidad · área · componente normal de v




$$\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\delta y\delta z - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\delta y\delta z +$$
$$+\left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z +$$
$$+\left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y$$

Leyes …



## Conservación de la masa

Tasa de incremento de Masa en el elemento fluido = Tasa neta de flujo de masa hacia el elemento fluido

## Conservación de la masa

Tasa de incremento de Masa en el elemento fluido = Tasa neta de flujo de masa hacia el elemento fluido

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta x\delta y\delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\delta x\delta y\delta z + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

## Conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

[1] Ec. transitoria tridimensional de conservación de la masa o ecuación de continuidad par un punto en un fluido compresible.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0$$

Tasa de cambio en función del tiempo de la densidad

Flujo neto de masa que sale del elemento a través de los bordes (término convectivo)

**Conservación de la masa**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$div\ \mathbf{u} = 0$$

**[2] Ec. para un fluido incompresible.**

## Conservación de la masa

$$div\ \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

**[2] Ec. para un fluido incompresible.**

## Conservación de la cantidad de movimiento y la energía

Cambios de las propiedades de una partícula de fluido. Cada propiedad de tal partícula es una función de la posición $\phi(x,y,z)$. La derivada total o sustancial de la propiedad respecto al tiempo, $\frac{D\phi}{Dt}$

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}+w\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot grad\,\phi$$

**Conservación de la cantidad de movimiento y la energía**

La tasa de cambio de una propiedad por unidad de volumen está dada por el producto de $\frac{D\phi}{Dt}$ y la densidad :

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

**Conservación de la cantidad de movimiento y la energía**

La tasa de cambio de una propiedad por unidad de volumen está dada por el producto de $\frac{D\phi}{Dt}$ y la densidad :

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} - \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot grad\ \phi \right)$$

La ecuación de la conservación de la masa contiene la masa por unidad de volumen como cantidad conservada. Ec 1.

**Conservación de la cantidad de movimiento y la energía**

La tasa de cambio de una propiedad por unidad de volumen está dada por el producto de $\frac{D\phi}{Dt}$ y la densidad :

$$\rho\frac{D\phi}{Dt}-\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot grad\ \phi\right)$$

La ecuación de la conservación de la masa contiene la masa por unidad de volumen como cantidad conservada. Ec 1.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\ (\rho\mathbf{u})$$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+div\ (\rho\phi\mathbf{u})$$

## Conservación de la cantidad de movimiento y la energía

Relacionemos ahora la tasa de cambio de $\phi$ con $\frac{D\phi}{Dt}$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\mathbf{u}) = \rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot grad\ \phi\right] + \phi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})\right] = \rho\frac{D\phi}{Dt}$$

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

## Conservación de la cantidad de movimiento y la energía

Relacionemos ahora la tasa de cambio de $\phi$ con $\frac{D\phi}{Dt}$

= 0

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\mathbf{u}) = \rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot grad\ \phi\right] + \phi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})\right] = \rho\frac{D\phi}{Dt}$$

Por conservación de la masa Ec 1.

## Conservación de la cantidad de movimiento y la energía

Relacionemos ahora la tasa de cambio de $\phi$ con $\frac{D\phi}{Dt}$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\mathbf{u}) = \rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot grad\ \phi\right] + \phi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})\right] = \rho\frac{D\phi}{Dt}$$

= 0

Por conservación de la masa Ec 1.

Tasa de incremento de $\phi$ en el elmento fluido + Tasa neta de flujo de $\phi$ que sale del elemento fluido = Tasa de incremento de $\phi$ para una partícula de fluido

## Conservación de la cantidad de movimiento y la energía

Por componentes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **cantidad de movimiento en x** | $\boldsymbol{u}$ | $\boldsymbol{\rho\frac{Du}{Dt}}$ | $\boldsymbol{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div\,(\rho u \mathbf{u})}$ |
| **cantidad de movimiento en y** | $v$ | $\boldsymbol{\rho}\frac{\boldsymbol{D}v}{\boldsymbol{Dt}}$ | $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div\,(\rho v \mathbf{u})$ |
| **cantidad de movimiento en z** | $w$ | $\boldsymbol{\rho}\frac{\boldsymbol{D}w}{\boldsymbol{Dt}}$ | $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + div\,(\rho w \mathbf{u})$ |
| **Energía** | $E$ | $\boldsymbol{\rho\frac{DE}{Dt}}$ | $\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + div\,(\rho E \mathbf{u})$ |

## Conservación de la cantidad de movimiento y la energía

Por componentes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **cantidad de movimiento en x** | $u$ | $\rho \frac{Du}{Dt}$ | $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div\,(\rho u \mathbf{u})$ |
| **cantidad de movimiento en y** | $v$ | $\rho \frac{Dv}{Dt}$ | $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div\,(\rho v \mathbf{u})$ |
| **cantidad de movimiento en z** | $w$ | $\rho \frac{Dw}{Dt}$ | $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + div\,(\rho w \mathbf{u})$ |
| **Energía** | $E$ | $\rho \frac{DE}{Dt}$ | $\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + div\,(\rho E \mathbf{u})$ |

Newton = Tasa de incremento de cantidad de movimiento de una partícula de fluido = Suma de fuerzas en una partícula de fluido.

## Ec. de la cantidad de movimiento 3D

Tasa de incremento de cantidad de movimiento de una partícula de fluido = Suma de fuerzas en una partícula de fluido.

$$\rho\frac{Du}{Dt} \qquad \rho\frac{Dv}{Dt} \qquad \rho\frac{Dw}{Dt}$$

| | |
|---|---|
| • **Fuerzas de superficie** | – Fuerzas de presión<br>– Fuerzas viscosas |
| • **Fuerzas de volumen** | – Fuerzas de gravedad<br>– Fuerzas centrípetas<br>– Fuerzas de Coriolis<br>– Fuerzas electromagnéticas |

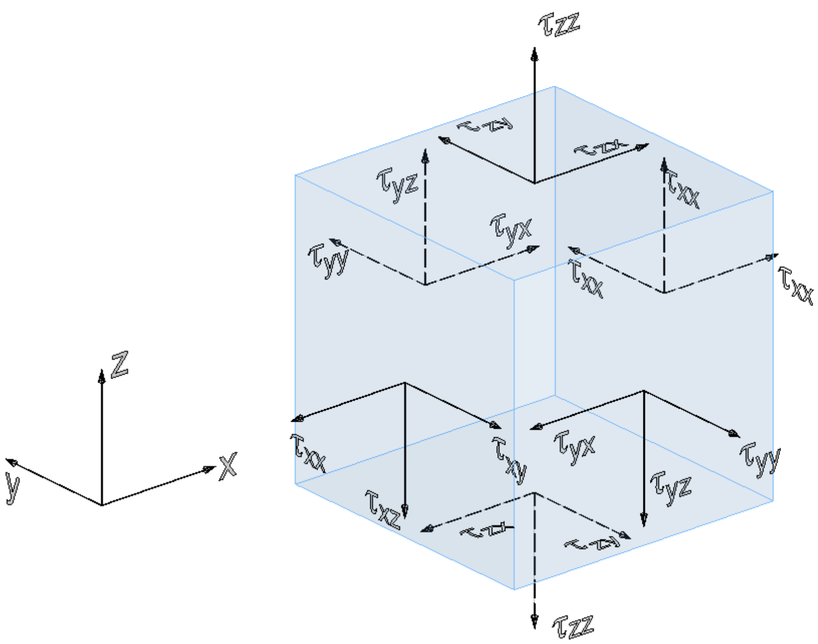
Fuentes

Definimos el estado tensional en términos de la presión y tensión viscosa

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

## Ec. de la cantidad de movimiento 3D




$$p = presión$$
$$\tau_{ij} = tensión\ viscosa$$
$$j = dirección\ en\ que\ actúa;$$
$$i = superficie\ normal\ a\ la\ dirección\ i$$

## Ec. de la cantidad de movimiento 3D

$$p = presión$$
$$\tau_{ij} = tensión\ viscosa$$
$$j = dirección\ en\ que\ actúa;$$
$$i = superficie\ normal\ a\ la\ dirección\ i$$

Consideremos todas las fuerzas en la dirección x

Ecuaciones

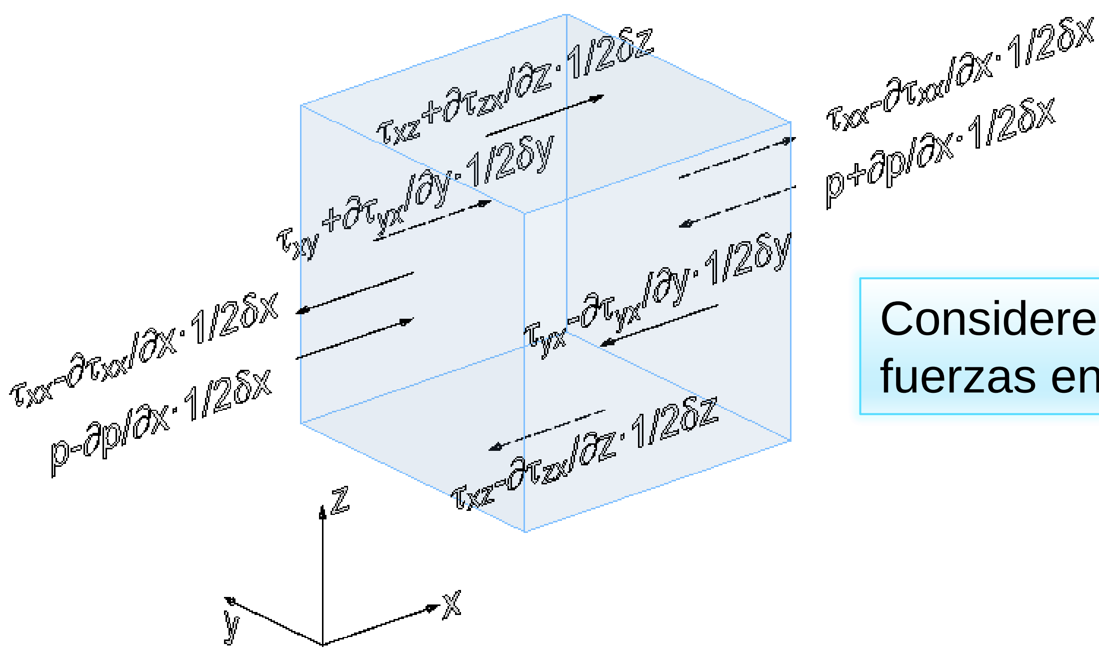
Correas, F.

Introducción | **Ecuaciones** | Navier-Stokes

**Leyes …**

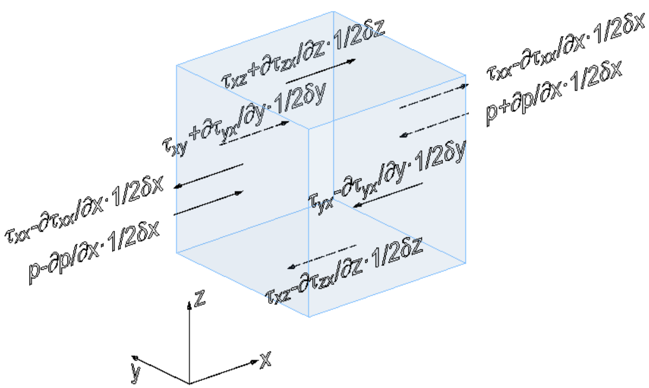
- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

## Ec. de la cantidad de movimiento 3D




Consideremos todas las fuerzas en la dirección x

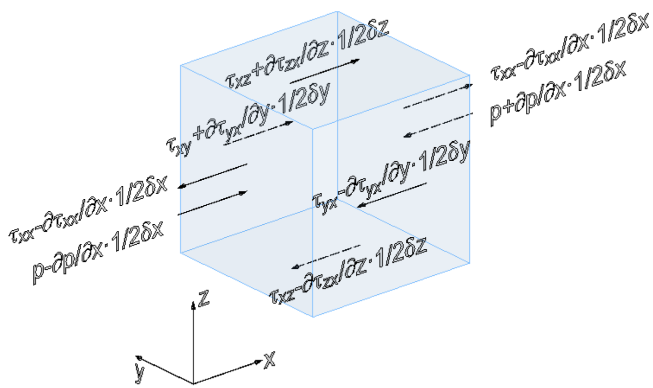
## Ec. de la cantidad de movimiento 3D




$$p = presión$$
$$\tau_{ij} = tensión\ viscosa$$
$$j = dirección\ en\ que\ actúa;$$
$$i = superficie\ normal\ a\ la\ dirección\ i$$

Fuerzas de superficie = Tensiones de superficie x Área

# Ec. de la cantidad de movimiento 3D




$$p = presión$$
$$\tau_{ij} = tensión\ viscosa$$
$$j = dirección\ en\ que\ actúa;$$
$$i = superficie\ normal\ a\ la\ dirección\ i$$

Fuerzas de superficie = Tensiones de superficie x Área

Caras (E, W) = $$\left[\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)-\left(\tau_{xx}-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z+\left[-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)+\left(\tau_{xx}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z=\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\delta x\right)\delta x\delta y\delta z$$

(N, S) = $$-\left(\tau_{yx}-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z=\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$$

(T,B) = $$-\left(\tau_{zx}-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y=\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

Sumamos los componentes y dividimos por el volumen

## Ec. de la cantidad de movimiento 3D

$$\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

## Ec. de la cantidad de movimiento 3D

$$\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Sumando la contribución del efecto de las fuerzas de volumen. La componente x de la ecuación de la cantidad de movimiento. **Ecuaciones [3]**

## Ec. de la cantidad de movimiento 3D

$$\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Sumando la contribución del efecto de las fuerzas de volumen. La componente x de la ecuación de la cantidad de movimiento. **Ecuaciones [3]**

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+S_{Mx}$$

Signos: presión tensión de compresión = signo negativo

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial(-p+\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+S_{My}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial(-p+\tau_{zz})}{\partial z}+S_{Mz}$$

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

## Ec. de la energía específica en 3D

$$\rho \frac{DE}{Dt}$$

Tasa de incremento de energía de una partícula de fluido = Tasa neta de calor adicionado a la partícula de fluido + Tasa neta de trabajo hecho en la partícula de fluido

Leyes …

- Introducción
- **Ecuaciones de flujo y calor**
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- Formas integrales…
- Aplicaciones

## Ec. de la energía específica en 3D

$$\rho \frac{DE}{Dt}$$

Tasa de incremento de energía de una partícula de fluido = Tasa neta de calor adicionado a la partícula de fluido + Tasa neta de trabajo hecho en la partícula de fluido

Trabajo hecho por la fuerzas de superficie dirección x:

$$\left[\left(pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(\tau_{xx}u - \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) + \left(\tau_{xx}u - \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z$$
$$+\left[-\left(\tau_{yx}u - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right) + \left(\tau_{yx}u + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\right]\delta x\delta z$$
$$+\left[-\left(\tau_{zx}u - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right) + \left(\tau_{zx}u + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\right]\delta x\delta y$$

GIHCA









## Ec. de la energía específica en 3D

$$\rho \frac{DE}{Dt}$$

Tasa de incremento de energía de una partícula de fluido = Tasa neta de calor adicionado a la partícula de fluido + Tasa neta de trabajo hecho en la partícula de fluido

Trabajo hecho por la fuerzas de superficie dirección x:

$$\left[\frac{\partial[u(-p+\tau_{xx})]}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}\right]\delta x\delta y\delta z$$

## Ec. de la energía específica en 3D

$$-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}-\frac{\partial(wp)}{\partial z}=-div(p\mathbf{u})$$

$$[-div(p\mathbf{u})]+\left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right]$$

Tasa total de trabajo realizado por unidad de volumen. Debido a tensiones de superficie

## Flujo de Calor

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}-\frac{\partial q_z}{\partial z}=-div\,\mathbf{q}$$

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x}\qquad q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y}\qquad q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}$$

Ley de Fourier para la conducción de calor relación entre el flujo y el gradiente local de Tº

## Ec. de la energía específica en 3D

$$-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}-\frac{\partial(wp)}{\partial z}=-div(p\mathbf{u})$$

$$[-div(p\mathbf{u})]+\left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right]$$

Tasa total de trabajo realizado por unidad de volumen. Debido a tensiones de superficie

$$-div\,\mathbf{q}=div(k\ grad\ T)$$

Tasa de calor adicionado a la partícula debido a la conducción del calor (k= conductividad térmica)

## Ec. de la energía

Energía = energía interna + energía cinética + energía potencial gravitatoria

$$\rho\frac{DE}{Dt} = -div(p\mathbf{u}) + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right] + div(k\ grad\ T) + S_E$$

$$E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

Se incluye la energía potencial como un término fuente

$$\rho\frac{Di}{Dt} = -p\ div\ \mathbf{u} + div(k\ grad\ T) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + S_i$$

## Ec. de la energía interna

Definimos un nuevo término fuente $S_i = S_E - u \cdot S_M$

## Ecuación de la energía interna

Fluido Incompresible tendremos:

$$i = cT$$

$$c = calor\ especifico$$

$$div\ \mathbf{u} = 0$$

Ec. de la Temperatura o del calor

También suele reordenarse:

$$h = i + \frac{p}{\rho} \quad h_0 = i + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

$$h = E + \frac{p}{\rho}$$

$$h = entalpía\ específica$$

$$h_0 = entalpía\ esp.\ total$$

Ec. de la entalpía

# Ecuaciones de estado

Leyes …

# Ecuaciones de estado

**Ecuacio-nes**

- Conservación de la Masa
- Cantidad de Movimiento x
- Cantidad de Movimiento en y
- Cantidad de Movimiento en z
- Energía

**Variables Termodi-námicas**

- Densidad
- Presión
- Energía interna
- Temperatura

# Hipótesis

- La velocidad del fluido es lo suficientemente pequeña, de manera que, el fluido está termodinámicamente de equilibrio de punto a punto.
- Las excepciones son algunos flujos con fuertes ondas, aunque, incluso en estas condiciones son suficientemente aproximadas las condiciones de equilibrio.
- En equilibrio termodinámico el estado de una sustancia puede describirse por dos variables de estado:

$$p = p(\rho, T) \qquad y \qquad i = i(\rho, T)$$

$$p = pRT \qquad y \qquad i = C_v T$$

Gas perfecto
(Cv Cap. Cal)

# Ecuación de Navier-Stokes

Tensiones viscosas $\tau_{ij}$

Función de la velocidad de deformación lineal

Medio isotrópico (Fluidos Newtonianos)

Función de la deformación volumétrica

No las conocemos
Necesitamos determinarlas

Correas, F.





Función de la velocidad de deformación lineal

Medio isotrópico
Seis componentes independientes

Función de la velocidad de deformación lineal

Medio isotrópico
Seis componentes independientes

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Función de la velocidad de deformación lineal

Medio isotrópico
Seis componentes independientes

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \; e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \; e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Fluido Newtoniano:
La tensión viscosa es proporcional a la velocidad de deformación volumétrica

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = div\,\mathbf{u}$$

## Forma Tridimensional de la Ley de Newton

Involucra dos constantes:

$\mu = def\ lineal$

$\lambda = def\ volumétrica$

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda div\ \mathbf{u} \quad \tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda div\ \mathbf{u} \quad \tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda div\ \mathbf{u}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$\lambda(pequeño)$

Para gases se suele aproximar:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

Para líquidos (incompresibles):

$$div\ \mathbf{u} = 0$$

## Ecuación de Navier-Stokes [4]

Sustituyendo las tensiones de corte en las componentes de la ecuación de la cantidad movimiento Ec. [3]

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\, div\, \mathbf{u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + S_{Mx}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\, div\, \mathbf{u}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + S_{My}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\, div\, \mathbf{u}\right) + S_{Mz}$$

## Ecuación de Navier-Stokes [4]

Sustituyendo las tensiones de corte en las componentes de la ecuación de la cantidad movimiento Ec. [3]

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\, div\,\mathbf{u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + S_{Mx}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\, div\,\mathbf{u}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + S_{My}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\, div\,\mathbf{u}\right) + S_{Mz}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\, div\,\mathbf{u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \rho\frac{Du}{Dt}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\, div\,\mathbf{u})$$
$$= div(\mu\, grad\, u) + S_{Mx}$$

Ecuación de Navier-Stokes [4]

Forma útil para los volúmenes finitos

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + div(\mu \; grad \; u) + S_{Mx}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + div(\mu \; grad \; v) + S_{My}$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + div(\mu \; grad \; w) + S_{Mz}$$

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \; div \; \mathbf{u} + div(k \; grad \; T) + \Phi + S_i$$

Reordenando

Ecuación de Navier-Stokes [4]

Forma útil para los volúmenes finitos

Función de disipación (Fte. de E)

$$\Phi = \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} + \lambda(div\,\mathbf{u})^2$$

$$\rho\frac{Di}{Dt} = -p\;div\,\mathbf{u} + div(k\;grad\;T) + \Phi + S_i$$

Reordenando

# Formas integrales de la ecuación de transporte

Leyes …

- Introducción
- Ecuaciones de flujo y calor
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- **Formas integrales…**
- Aplicaciones

Introducimos una variable general $\phi$ (forma conservativa)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\mathbf{u}) = div(\Gamma\, \mathrm{grad}\, \phi) + S_{\phi}$$

Ecuación de Transporte Ec. [5]

Introducimos una variable general $\phi$ (forma conservativa)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\mathbf{u}) = div(\Gamma \operatorname{grad} \phi) + S_{\phi}$$

Ecuación de Transporte Ec. [5]

Tasa de incremento de $\phi$ en el elmento fluido + Tasa neta de flujo de $\phi$ que sale del elemento fluido = Tasa de incremento de $\phi$ debido a la difusión + Tasa de incremento de $\phi$ debido a fuentes

Introducimos una variable general $\phi$ (forma conservativa)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\mathbf{u}) = div(\Gamma \,\mathrm{grad}\, \phi) + S_\phi$$

Ecuación de Transporte Ec. [5]

Tasa de incremento de $\phi$ en el elmento fluido + Tasa neta de flujo de $\phi$ que sale del elemento fluido = Tasa de incremento de $\phi$ debido a la difusión + Tasa de incremento de $\phi$ debido a fuentes

Cambio + Convección = Difusión + Fuente o sumidero

Introducimos una variable general $\phi$ (forma conservativa)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\mathbf{u}) = div(\Gamma\,\mathrm{grad}\,\phi) + S_\phi$$

Ecuación de Transporte Ec. [5]

Inicio de procedimientos computacionales (MVF, MEF, MDF)

Reemplazamos $\phi$ $por$ $(u, v, w, e, i, T, h_0)$

Seleccionamos $\Gamma$ $(\mathrm{ceof.\,difusión})$

Para MVF, el paso clave es la Integración de [5] en el volumen de control CV tridimensional:

## Forma Integral

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} div(\rho\phi\mathbf{u})dV = \int_{CV} div(\Gamma grad\phi)dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

Forma Integral

Teorema de Gauss (Stokes)

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} div(\rho\phi\mathbf{u})dV = \int_{CV} div(\Gamma grad\phi)dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

Relaciona el flujo en un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen delimitado por dicha superficie.

Leyes …

- Introducción
- Ecuaciones de flujo y calor
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- **Formas integrales…**
- Aplicaciones

Forma Integral

Teorema de Gauss (Stokes)

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} div(\rho\phi\mathbf{u})dV = \int_{CV} div(\Gamma grad\phi)dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

Relaciona el flujo en un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen delimitado por dicha superficie.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \rho\phi dV\right) + \int_{A} \mathbf{n}\cdot(\rho\phi\mathbf{u})dA = \int_{A} \mathbf{n}\cdot(\Gamma\,\mathrm{grad}\phi)dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \rho\phi dV\right) + \int_{A} \mathbf{n}\cdot(\rho\phi\mathbf{u})dA = \int_{A} \mathbf{n}\cdot(\Gamma\,\mathrm{grad}\phi)dA + \int_{CV} S_{\phi}dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \rho\phi dV\right) + \int_{A} \mathbf{n}\cdot(\rho\phi\mathbf{u})dA = \int_{A} \mathbf{n}\cdot(\Gamma\,\mathrm{grad}\phi)dA + \int_{CV} S_{\phi}dV$$

$$\int_{A} \mathbf{n}\cdot(\rho\phi\mathbf{u})dA = \int_{A} \mathbf{n}\cdot(\Gamma\,\mathrm{grad}\phi)dA + \int_{CV} S_{\phi}dV$$

Estacionaria

Leyes …

- Introducción
- Ecuaciones de flujo y calor
- Ecuaciones de estado
- Ecuación de Navier-Stokes
- **Formas integrales…**
- Aplicaciones

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \rho\phi dV\right) + \int_{A} \mathbf{n}\cdot(\rho\phi\mathbf{u})dA = \int_{A} \mathbf{n}\cdot(\Gamma\,\mathrm{grad}\phi)dA + \int_{CV} S_{\phi} dV$$

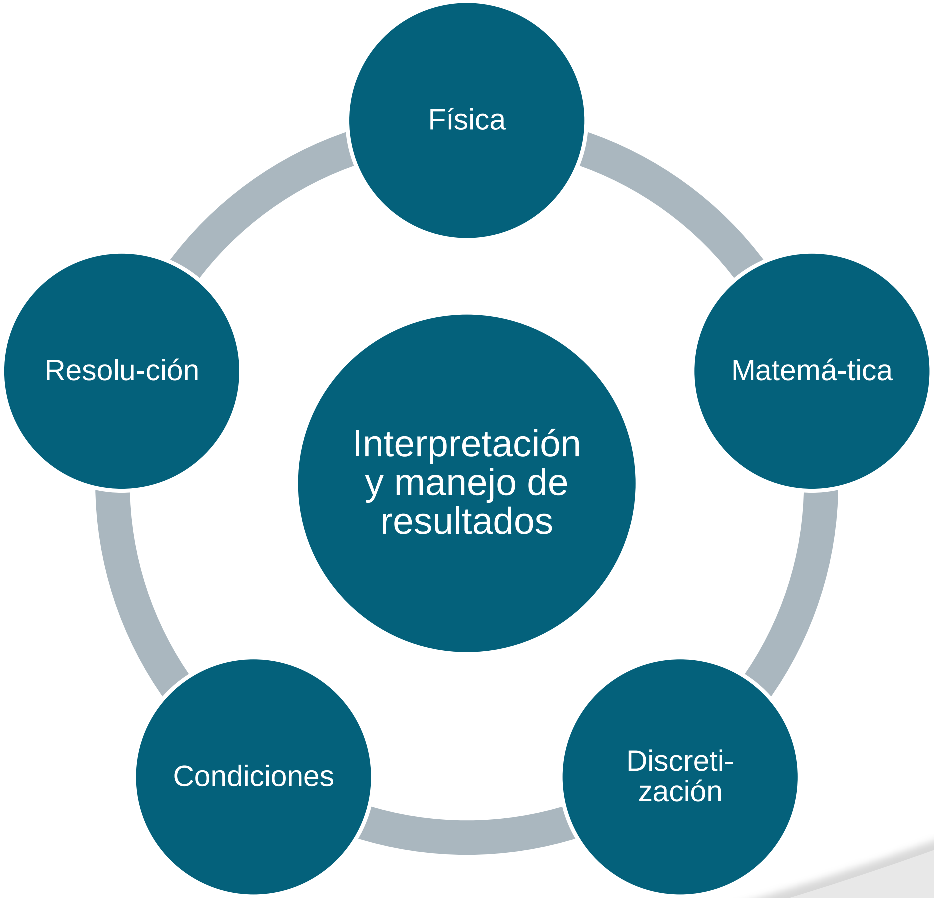
$$\int_{\Delta t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \rho\phi dV\right)dt + \int_{\Delta t}\int_{A} \mathbf{n}\cdot(\rho\phi\mathbf{u})dA\,dt = \int_{\Delta t}\int_{A} \mathbf{n}\cdot(\Gamma\,\mathrm{grad}\phi)dA\,dt + \int_{\Delta t}\int_{CV} S_{\phi} dV\,dt$$

Transitoria (Gral.)

# Aplicaciones

# Como resuelvo problemas??

# Como resuelvo problemas??



# Tipos de problemas: tipos de ecuaciones y tipos de resoluciones



Problemas de Equilibrio → Estáticos

Distr. de Tº
Distr. de Tensiones
Flujos

General-mente

Elípticos

Ec. de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Flujo irrotacional (incompresible)
Conducción del calor
Flujo potencial

Condición

Condición inicial en todo el dominio
Problemas del valor inicial

# Tipos de problemas: tipos de ecuaciones y tipos de resoluciones



Problemas que avanzan en el tiempo → Transitorios

Transf de Tº
Flujos inestables

Parabólica
Hiperbólica

Mucha disipación (flujo viscoso o conducción de calor inestables)

Vibración poca disipación (Ec. de la Onda)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Condición

Condición inicial en todo el dominio y de borde en todo t
Problemas del valor inicial y de borde

| Tipo de Problema | Tipo de Ecuación | Ecuación prototipo | Condiciones | Dominio | Convergencia de Solución |
|---|---|---|---|---|---|
| **Equilibrio** | Elíptica | $div\ grad\ \phi = 0$ | Condiciones de borde | Dominio cerrado | Siempre suave |
| **Con desplazamiento y disipación** | Parabólica | $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha\ div\ grad\ \phi$ | Condiciones iniciales y de borde | Dominio abierto | Siempre suave |
| **Con desplazamiento y sin disipación** | Hiperbólica | $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 div\ grad\ \phi$ | Condiciones iniciales y de borde | Dominio abierto | Puede ser discontinua |

# Extra: Turbulencia

Introducción

Casos

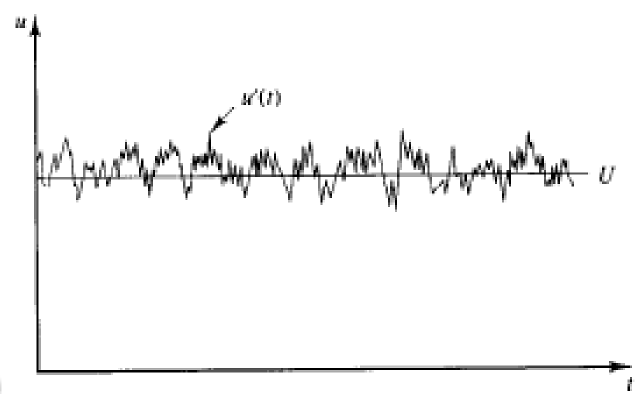
Algoritmos

Todo depende del Número de Reynolds

$$\frac{U_c L_c}{\nu}$$

Efectos convectivos

Relaciona fuerzas de inercia con fuerzas viscosas. Bajos Reynolds (<2000) flujo Laminar, Altos Reynolds flujo turbulento (en distintas formas), que es un flujo caótico. La mayoría de los flujos en la Ingeniería son Turbulentos!!




$$u(t) = U + u'(t)$$

$$u(t) = U + u'(t)$$

La componente variable, no solo cambia en intensidad y signo, sino varía realmente tridimensionalmente. Incluso se generan estructuras circulares denominadas **remolinos turbulentos (eddies)**, con distintos **rangos de escala de longitudes (range of length sales)**. Esos torbellinos tienen características propias:

$$\frac{\vartheta \ell}{\nu}$$

Estos torbellinos dominan para flujos donde la inercia es relativamente más importante que la viscosidad.
Estos torbellinos se estiran y provocan remolinos menores y cada ves menores.
Todas las propiedades fluctuantes del flujo turbulento contienen energía en un amplio rango frecuencias o números de ondas $\left(= \frac{2\pi f}{U}, donde\ f = frecuencia\right)$

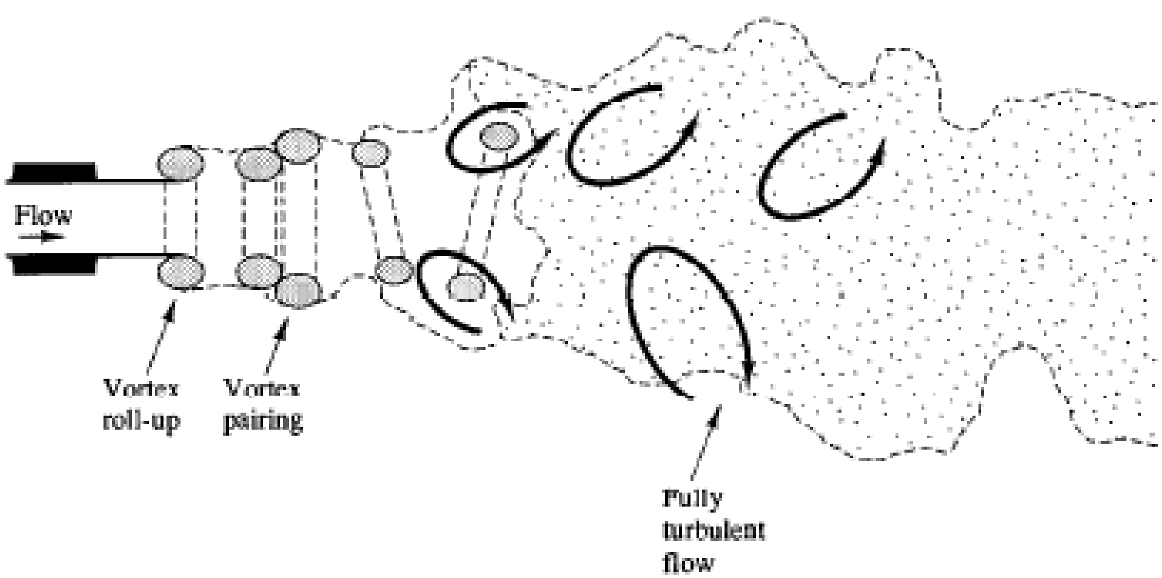
$$u(t) = U + u'(t)$$

El movimiento a escala menor en el flujo es manejado por la viscosidad. El número de Reynolds para estos pequeños torbellinos son determinados por propiedades propias y aumentan su frecuencia a medida que bajan el tamaño, por lo que el número es bastante estable:

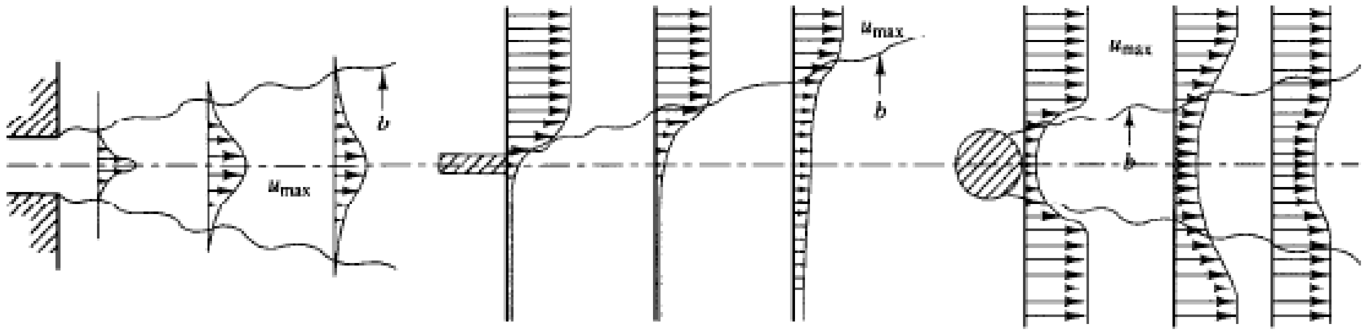
$$\frac{\upsilon\eta}{\nu}$$

Esta energía de generación de pequeños torbellinos se disipa por aumentos de energía térmica interna y redunda en aumentos de pérdidas de energía.
Los torbellinos grandes son muy anisotrópicos (direccionales) e interactúan con la velocidad media. Los pequeños son isotrópicos (no direccionales).

Flujo de jet (transiciones turbulentas)



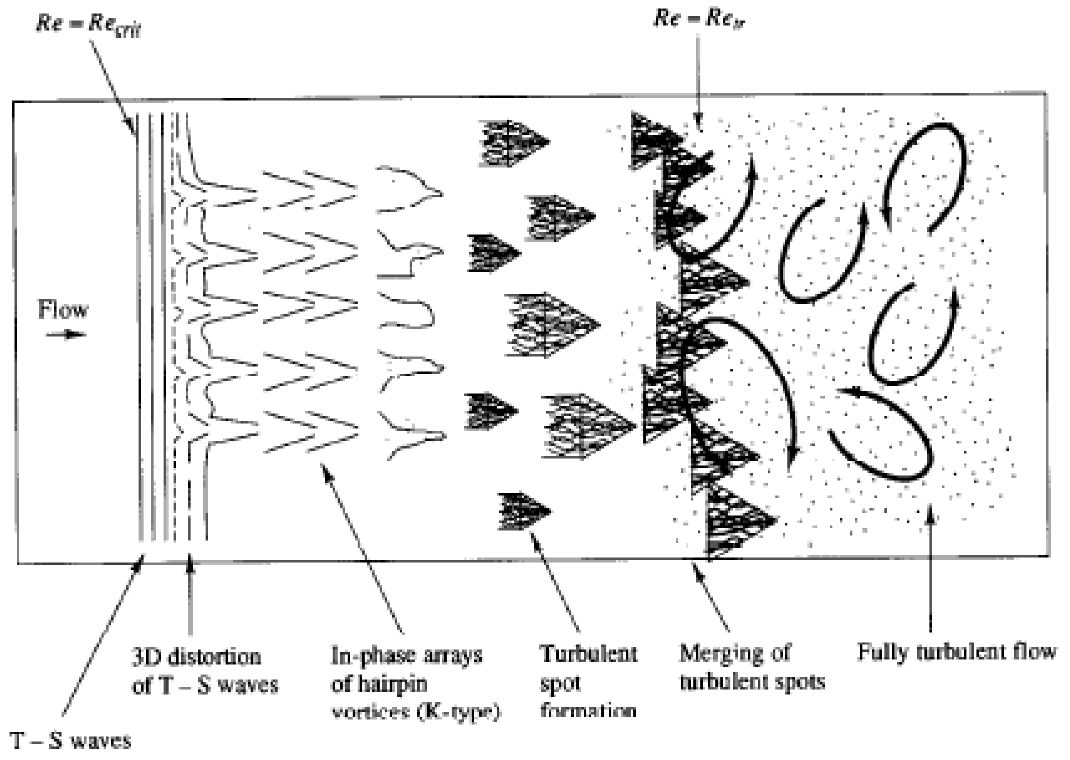
Flujos de turbulencia libre




Jet Mixing layer Wake

Capas límites

Capa límite en una superficie plana
(y+)



La turbulencia afecta a todas las ecuaciones

$$\frac{\partial U}{\partial t} + div(U\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\, div\, grad\, U + \left[-\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + div(V\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\, div\, grad\, V + \left[-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div(W\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\, div\, grad\, W + \left[-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right]$$

Ecuaciones de Reynolds (Tensiones de Reynolds)

Todas las ecuaciones

*Continuidad*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{U}) = 0$$

*Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS)*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + div(U\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + div\,(\mu grad\;U) + \left[-\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right] + S_{Mx}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + div(V\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + div\,(\mu grad\;V) + \left[-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right] + S_{My}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div(W\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + div\,(\mu grad\;W) + \left[-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right] + S_{Mz}$$

*Ecuación del transporte escalar*

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + div(\rho\Phi\mathbf{U}) = div(\Gamma_\Phi\; grad\;\Phi) + \left[-\frac{\partial \rho\overline{\varphi' u'}}{\partial x} - \frac{\partial \rho\overline{\varphi' v'}}{\partial y} - \frac{\partial \rho\overline{\varphi' w'}}{\partial z}\right] + S_\Phi$$

No es tan fácil de resolver, se plantean modelos (simplificaciones)

| | |
|---|---|
| **Modelos Clásicos** | Basados en la Ecuación de Reynolds (promediada en el tiempo)<br>1. Modelo de ecuación cero – modelo de longitud mezcla (Mixing Length)<br>2. Modelo de dos ecuaciones, k-$\varepsilon$, k-$\omega$, SST<br>3. Modelos de la ecuación de tensión de Reynolds<br>4. Modelos de tensión algebraica |
| Simulación de grandes torbellinos | Basados en ecuaciones filtradas en el espacio |
| Simulación Numérica Directa (Direct Numerical Simulation DNS) | Es utilizado para bajos números de Reynolds. Se usa para verificar modelos de turbulencia. |

No es tan fácil de resolver, se plantean modelos (simplificaciones)

| **Modelos Clásicos** | **Usan la ecuación de Reynolds y tratan de resolver la ecuación de turbulencia por cálculos numéricos** |
|---|---|
| Simulación de grandes torbellinos (Large Eddy Simulation LES) | La ecuación de flujo se resuelve para el flujo medio, y se modelan los torbellinos grandes y los pequeños que tengan mayor influencia. **Costo computacional altísimo.** |

| | |
|---|---|
| **Modelos Clásicos** | Modelos **k-$\varepsilon$ y mixing length**, son los más usados y validados. Se basan en la asunción de que existe una analogía entre la acción de las tensiones viscosas y las tensiones viscosas de Reynolds en el flujo medio. Las tensiones viscosas de la ecuación de cantidad de movimiento y en la ley de Newton son tomadas como proporcionales a la tasa de deformación de los elementos.<br>Los modelos **Mixing length** describen las tensiones por medio de formulaciones algebraicas la turbulencia viscosa $\mu_t$ como función de posición. $\left(\sigma_t = \frac{\mu_t}{\Gamma_t}\right)$, $\Gamma_t$: difusividad turbulenta, $\sigma_t$: # de turbulencia de Prandlt/Schmidt.<br>**El modelo k-$\varepsilon$** es más sofisticado y general. Se utilizan dos ecuaciones diferenciales una para la energía cinética y otra para la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta $\varepsilon$. Existen variaciones de este modelo.<br>**El modelo k-$\omega$** es otro modelo de dos ecuaciones donde $\omega$ es una escala de tiempo inversa que es asociada con la turbulencia.<br>**El modelo SST (Shear Stress Transport)** es un modelo de viscosidad turbulenta que incluye dos novedades: 1. combina el modelo **k-$\varepsilon$ y k-$\omega$** (interior y bordes). 2. se introduce una limitación de las tensiones de corte en regiones de gradientes de presión adversos. |

| | |
|---|---|
| **Modelos Clásicos** | En el **modelo de ecuación de tensión de Reynolds (Reynolds Stress Equation model, RSM)** se hacen suposiciones (simplificaciones) sobre las tensiones turbulentas desconocidas en la Ecuación de Reynolds y las ecuaciones diferenciales que resultan se resuelven en conjunto con la ecuación de transporte para la tasa de disipación de energía cinética turbulenta $\varepsilon$. Esto implica un total de siete ecuaciones extra, con su relativo costo computacional adicional.<br>El **modelo algebraico de tensiones** utiliza simplificaciones para reducir las ecuaciones diferenciales descritas en las tensiones de transporte de Reynolds a ecuaciones algebraicas que se resuelven en las ecuaciones k y $\varepsilon$ del modelo k-$\varepsilon$. Esto reduce las ecuaciones del modelo RSM y tiene un gran alcance de modelación. |

**Correas F., Grioni M., Hidalgo M., Tripp N., Bragoni D.**

**G**rupo de **I**nvestigación **H**idráulica **C**omputacional y **A**plicada

*Instituto de Hidráulica, Facultad de Ingeniería*

*Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina*

# TALLER DE MODELACIÓN HIDRÁULICA CON CFD

## GRACIAS POR SU ATENCIÓN

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO