3. Estudio experimental mediante modelos a escala. Escalas de *Reynolds* y *Froude*. Elección.

Como dice *Richard H. French* en su libro sobre canales [1], el número de importantes problemas modernos de hidráulica de canales abiertos que puede solucionarse satisfactoriamente mediante técnicas analíticas puras es muy limitado: la mayor parte de los problemas deben ser solucionados por una combinación de técnicas numéricas y analíticas, medidas de campo y modelado físico.

El presente estudio se fundamenta en los ensayos realizados sobre un modelo a escala reducida del sistema que sería aplicable en la práctica para casos reales. Por tanto, es preciso conocer a priori los condicionantes que tiene el estudio experimental mediante modelos a escala reducida.

Para que los resultados obtenidos en un modelo físico sean extrapolables al prototipo real, se deben satisfacer dos criterios:

1) el modelo y el prototipo deben ser **geométricamente similares**. La similitud geométrica puede establecerse mediante una escala de longitudes como la razón entre el prototipo y el modelo.

2) el modelo y el prototipo deben ser **dinámicamente similares**. La similitud dinámica establece que los dos sistemas con fronteras geométricamente iguales tengan patrones de flujo geométricamente similares, en instantes de tiempo correspondientes. Esto requiere que todas las fuerzas individuales que actúan sobre elementos correspondientes de fluido tengan las mismas razones (proporciones) en los dos sistemas.

El problema principal en el desarrollo de modelos físicos no es encontrar los requerimientos de similitud geométrica, sino asegurar la similitud dinámica.

Un enfoque para el desarrollo apropiado de parámetros para asegurar la similitud dinámica es la escalación de las ecuaciones fundamentales. Por ejemplo consideremos las ecuaciones de *Navier-Stokes* que, junto con la ecuación de continuidad, gobiernan el comportamiento de un flujo de agua (flujo incompresible, laminar, de densidad y viscosidad constantes ocurriendo en un campo gravitacional). Para simplificar únicamente será tratada la componente x de las ecuaciones de *Navier-Stokes*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (3.1)$$

Se definien las siguientes variables adimensionales:

$$\hat{x} = \frac{x}{L};\quad \hat{y} = \frac{y}{L};\quad \hat{z} = \frac{z}{L};\quad \hat{h} = \frac{h}{L};\qquad \hat{u} = \frac{u}{U};\quad \hat{v} = \frac{v}{U};\quad \hat{w} = \frac{w}{U}; \qquad (3.2)$$
$$\hat{t} = \frac{tU}{L};\quad \hat{p} = \frac{p}{\rho U^2};$$

donde L y U son una característica de la longitud y la velocidad, respectivamente.

Sustituyendo estas variables adimensionales en la ecuación (3.1) y dividiendo todos sus términos por U^2/L obtenemos la siguiente ecuación adimensional:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \hat{w}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\left(\frac{gL}{U^2}\right)\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{\mu}{\rho UL}\right)\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2}\right) \qquad (3.3)$$

Definiendo el número de ***Froude*** como: $\boxed{F = \frac{U}{\sqrt{gL}}}$

y el número de ***Reynolds*** como: $\boxed{R = \frac{\rho UL}{\mu}}$

la ecuación adimensional puede ser reescrita como:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \hat{w}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\frac{1}{F^2}\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2}\right) \qquad (3.4)$$

La ecuación (3.4) tiene la misma solución para dos sistemas de flujo geométricamente similares siempre que F y R sean numéricamente iguales. O sea, para que haya una similitud dinámica exacta, F y R deben ser iguales en el modelo y en el protptipo. La igualación de los números de *Froude* requiere:

$$F_M = F_P \qquad \Rightarrow \qquad \frac{U_M}{\sqrt{g_M L_M}} = \frac{U_P}{\sqrt{g_P L_P}} \qquad \Rightarrow \qquad U_R = \sqrt{g_R L_R} \qquad (3.5)$$

donde el subíndice M designa al modelo, P al prototipo y R la razón de las variables modelo a prototipo. Por otra parte el requerimiento de igualdad de los números de *Reynolds* da como resultado:

$$U_R = \frac{\mu_R}{\rho_R L_R} \qquad (3.6)$$

Al combinar las ecuaciones (3.5) y (3.6) y reconociendo que $g_R = 1$ obtenemos:

$$L_R = \left(\frac{\mu_R}{\rho_R}\right)^{\frac{2}{3}} = \nu_R^{\frac{2}{3}} \qquad (3.7)$$

donde ν es la viscosidad cinemática. Así, para construir un modelo físico exacto de un canal abierto, el diseñador tiene únicamente un grado de libertad: la selección del modelo de fluido. Teniendo en cuenta que el rango de viscosidades cinemáticas de los fluidos comunmente disponibles es bastante limitada, los requerimientos impuestos por la ecuación (3.7) generalmente dan por resultado un modelo que tiene el mismo tamaño, o muy parecido, que el prototipo. La conclusión es que los modelos físicos exactos de canales abiertos son virtualmente imposibles.

Ahora bien, retomando la ecuación adimensional (3.4) se pueden hacer algunas consideraciones entorno de los números de *Froude* y *Reynolds*:

En un canal abierto rectangular, un flujo no muy lento, entorno al crítico (F = 1) o supercrítico (F > 1), se presentarán en todas sus secciones valores altos del número de *Reynolds* ($R = \frac{vy}{\nu}$ para canal de sección rectangular), superiores a 10000 en el modelo. Y como:

$$R_R = \frac{U_R L_R}{\nu_R} = U_R L_R > 1 \tag{3.8}$$

al ser ν_R = 1 (por circular agua tanto en el prototipo como en el modelo) y tanto U_R como L_R mayores a 1. Por tanto el número de *Reynolds* en un punto del prototipo siempre será mayor al del modelo en ese mismo punto.
En cuanto al número de *Froude*, éste ráramente será mayor a 10.
Se puede observar pues en la ecuación (3.4) que los téminos afectados por $1/F^2$ serán, en un flujo de las características citadas, como mínimo dos órdenes superiores a los términos afectados por $1/R$ y, por tanto, estos últimos serán despreciables. En conclusión, con solo garantizar la igualdad del número de *Froude* entre el prototipo y el modelo conseguiremos una similitud dinámica casi exacta. A esto se le llama modelar utilizando la Ley de *Froude.*

El modelaje, pues, puede realizarse según diferentes leyes especializadas dependiendo de cual es la fuerza primordial que controla el movimiento.

Los modelos basados en la Ley de *Froude* aseguran que la fuerza primordial que causa el movimiento es la gravedad y que todas las otras fuerzas, como la fricción del fluido y la tensión superficial, como hemos visto antes, pueden despreciarse. Solo se necesita la similitud del número de *Froude*, entonces $F_M = F_P$ y dada la razón geométrica L_R:

- la razón de velocidades será: $U_R = \sqrt{L_R}$ (3.9)
- la razón de tiempos será: $T_R = \sqrt{L_R}$ (3.10)
- la razón de cauldales será: $Q_R = (L_R)^{\frac{5}{2}}$ (3.11)

Los modelos basados en la Ley de *Reynolds* aseveran que la viscosidad es la fuerza primordial y, por ende, se pueden despreciar las fuerzas de gravedad y de tensión superficial. Este modelaje puede ser de utilidad en flujos muy lentos y laminares, con calados muy someros.

- la razón de velocidades será: $U_R = \frac{\nu_R}{L_R}$ (3.12)
- la razón de tiempos será: $T_R = \frac{L_R}{\nu_R}$ (3.13)

También se pueden considerar los modelos de la Ley de *Weber* que aseguran la similitud del modelo y del prototipo respecto a los efectos de tensión superficial. Aunque esta ley de modelaje es de primordial importancia en el estudio de formación de gotas, también puede tener importancia crucial en algunos modelos de canales abiertos. Por ejemplo, los efectos de la tensión superficial son perceptibles en el flujo sobre vertedores cuando la carga sobre el vertedor es pequeña. Además agunos fenómenos de oleaje perceptibles en los modelos se originan por tensión superficial. El número de *Weber* se define por

$$W = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} \tag{3.14}$$

donde σ = esfuerzo de tensión superficial
Si se igualan los números de *Weber* en el prototipo y el modelo, da las siguientes relaciones para las razones de escalas de velocidad y tiempo:

$$U_R = \left(\frac{\sigma_R}{L_R \rho_R}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.15}$$

$$T_R = \left(\frac{L_R{}^3 \rho_R}{\sigma_R}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.16}$$

En conclusión, el modelaje utilizado en el presente estudio será el correspondiente a la Ley de *Froude* al darse los condicionantes ideales para aplicar este criterio y obtener unos buenos resultados.