Parcial I - T.M. - Tema 1

1

1) Teoría

2) $f'(x) = \left(5x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot (-x^2 + 2x + 3) + (x^5 - 2\sqrt{x} + 4) \cdot (-2x + 2)$

$- \frac{1}{2x^2}$.

3) a) $x^2 - 16 = 0 \nearrow x = 4$
$\searrow x = -4$

Como g es función racional, su dominio son todos los números reales, excepto donde se anula el denominador.
Así,

$D(g) = \mathbb{R} - \{4, -4\}$.

b) $g(x) = \frac{2}{x^2 - 16}$

$g(-x) = \frac{2}{(-x)^2 - 16} = \frac{2}{x^2 - 16}$

Como $g(x) = g(-x)$ $\forall x \in D(g)$, se tiene que g es par.

c) $\lim_{x \to 4^+} \frac{2}{x^2 - 16} = +\infty \Rightarrow x = 4$ es A.V.

$\lim_{x \to -4^-} \frac{2}{x^2 - 16} = +\infty \Rightarrow x = -4$ es A.V.

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2 - 16} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{16}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{1 - \frac{16}{x^2}} = 0$.

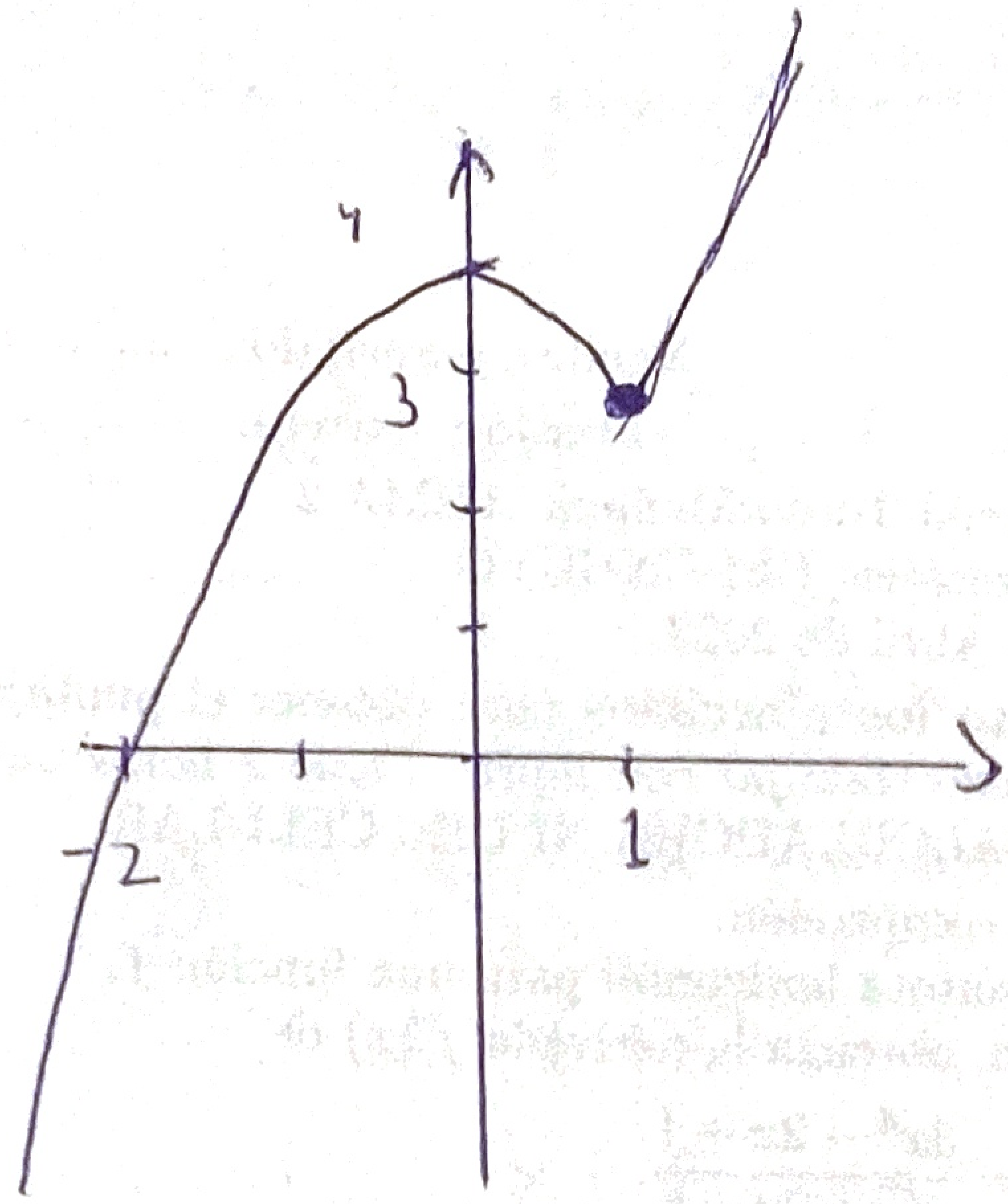
Luego, $y = 0$ es A.H.
Misma conclusión al tomar $x \to -\infty$.

e) g no tiene A.O. pues tiene A.H.

(4)

(2)

a)



b) f es continua en $x=1$ pues:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 4-x^2 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+2x) = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

y además

$$f(1) = 4 - 1^2 = 3 = \lim_{x\to 1} f(x).$$

(5) $$\lim_{x\to 3^-} \frac{2|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-2\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = -2.$$

(6) f tiene discontinuidad:

1) de salto en $x=-3$, pues

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 2 \quad y \quad \lim_{x\to -3^+} f(x) = -2$$

2) esencial en $x=0$, pues

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty \text{ (no existe).}$$

Primer parcial - T.M - Tema 2.

1) Teoría

2) $f'(x) = \dfrac{(12x^3 - 2)\cdot(\sqrt{x^3} + 2x - 1) - (3x^4 - 2x + 1)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + 2\right)}{(\sqrt{x^3} + 2x - 1)^2}$.

3) a) Como g es función racional, analizamos

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1.$$

Luego

$$D(g) = \mathbb{R} - \{1\}.$$

b) g no es par. Por ejemplo:

$$g(2) = \frac{3}{1} = 3$$

$$g(-2) = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Como $g(2) \neq g(-2)$, g no es par.

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty \Rightarrow x = 1$ es A.V.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$

Luego, $y = 1$ es A.H.

Misma conclusión si $x \to -\infty$.

e) No tiene A.O pues tiene A.H.

4) a) Para que f sea continua, debe suceder: (2)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Ahora:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2+b) = b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2-2x+1 = 1.$$

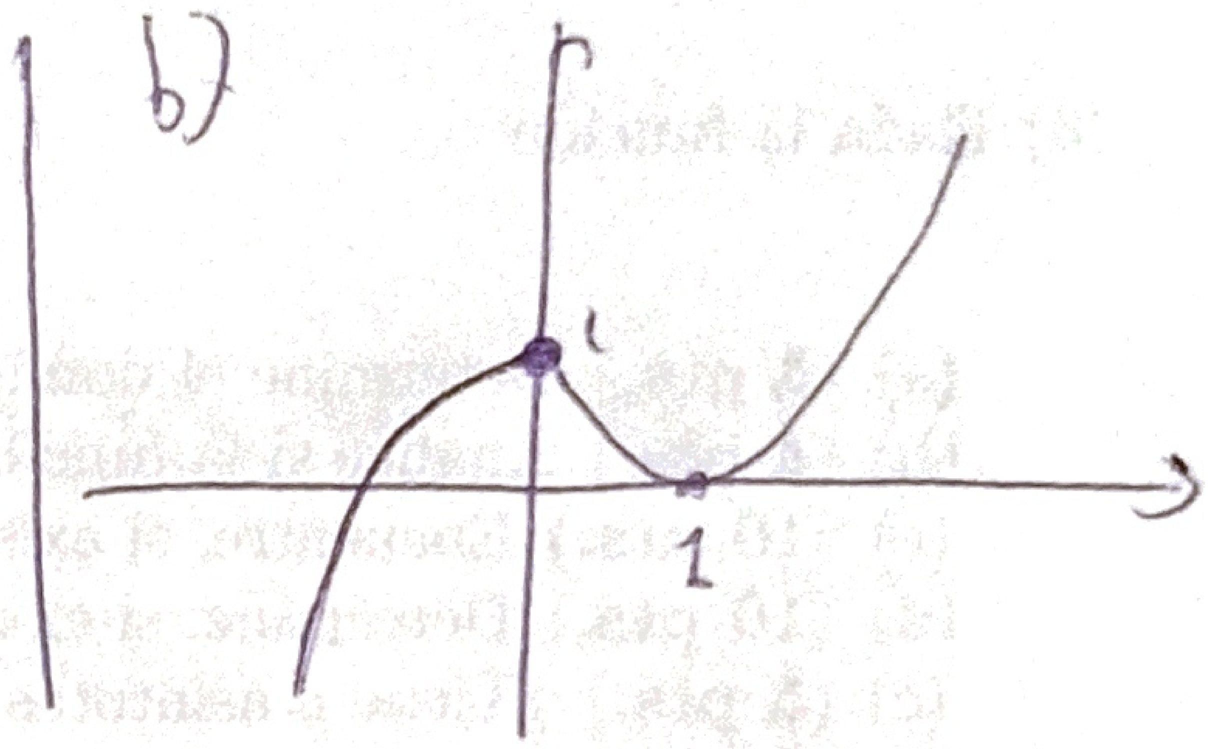
Luego, para que el límite existe tomamos $b=1$.

Finalmente:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0).$$

Así, f es cont. en $x=0$.

b)



5) $$\lim_{x\to 3^+} \frac{2|x-3|}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

6) A partir del gráfico:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$$

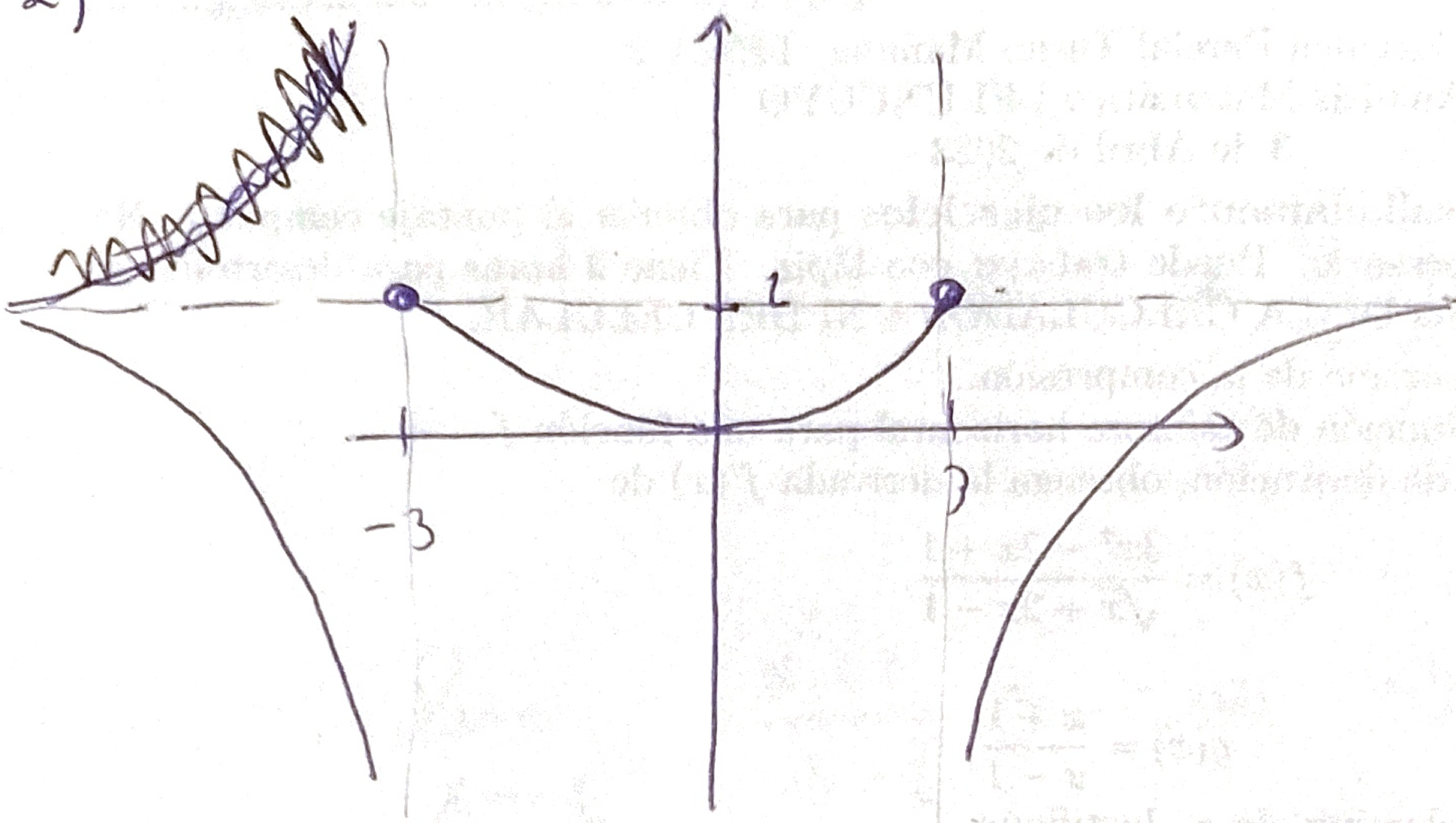
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0.$$

Primer parcial - T.T - Tema 2

1) Teoría

2)



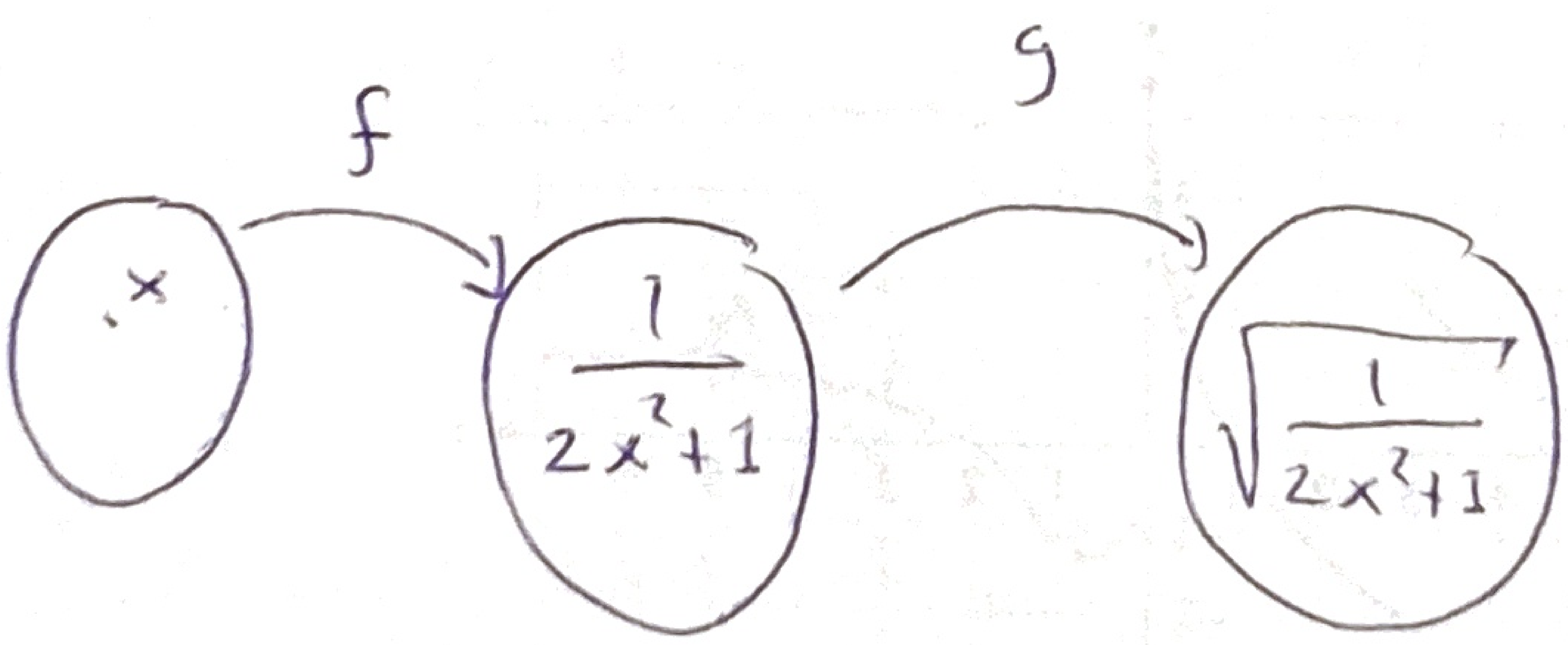
3) a) Observar $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = [0, \infty)$ y
$g(x) = 0$ si $x = 0$.

Luego,

$$D(f/g) = \{ x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0 \}$$

$$= (0, \infty).$$

b)



Como $D(f) = \mathbb{R}$, no hay restricción en x al aplicar f.

Como $\frac{1}{2x^2+1} > 0$,

no hay una condición extra en x para poder hacer $\sqrt{\frac{1}{2x^2+1}}$.

Así,

$$D(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

4)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x^2-3}{x^2+4}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{2x^2-3}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}} = \sqrt{\frac{2-0}{1+0}}$$

$$= \sqrt{2}.$$

5) a) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty \Rightarrow x=1$ es A.V.

No hay más A.V.

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

$= \infty.$

No hay A.H.

c) Primero hacemos división de polinomios:

$$\begin{array}{l|l} x^2+0x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2+x & x+1 \\ \hline \quad x+1 & \\ \quad -x+1 & \\ \hline \qquad 2 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+1}{x-1} = \underbrace{(x+1)}_{c(x)} + \frac{2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-1} - (x+1)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x-1} = 0.$$

Luego $y = x+1$ es A.O.

6)

③

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 + (1+h) - 4}{h}$$

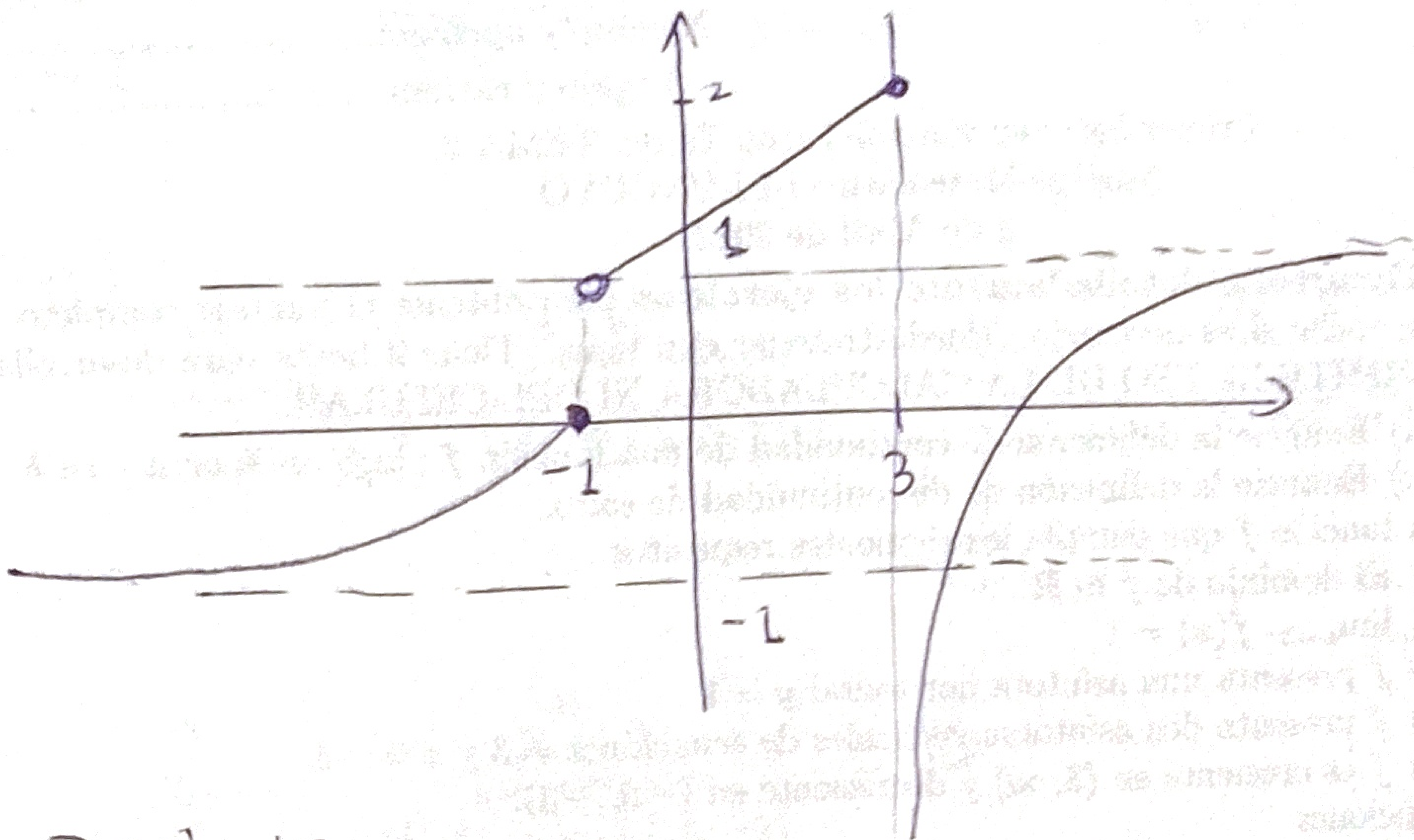
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3} + 6h + 3h^2 + \cancel{1} + h - \cancel{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(7+3h)}{\cancel{h}} = 7$$ ← pendiente ⊥ $y = f(x)$ en $(1, 4)$.

Parcial 1 - T-T - Tema 1

1) Teoría

2)



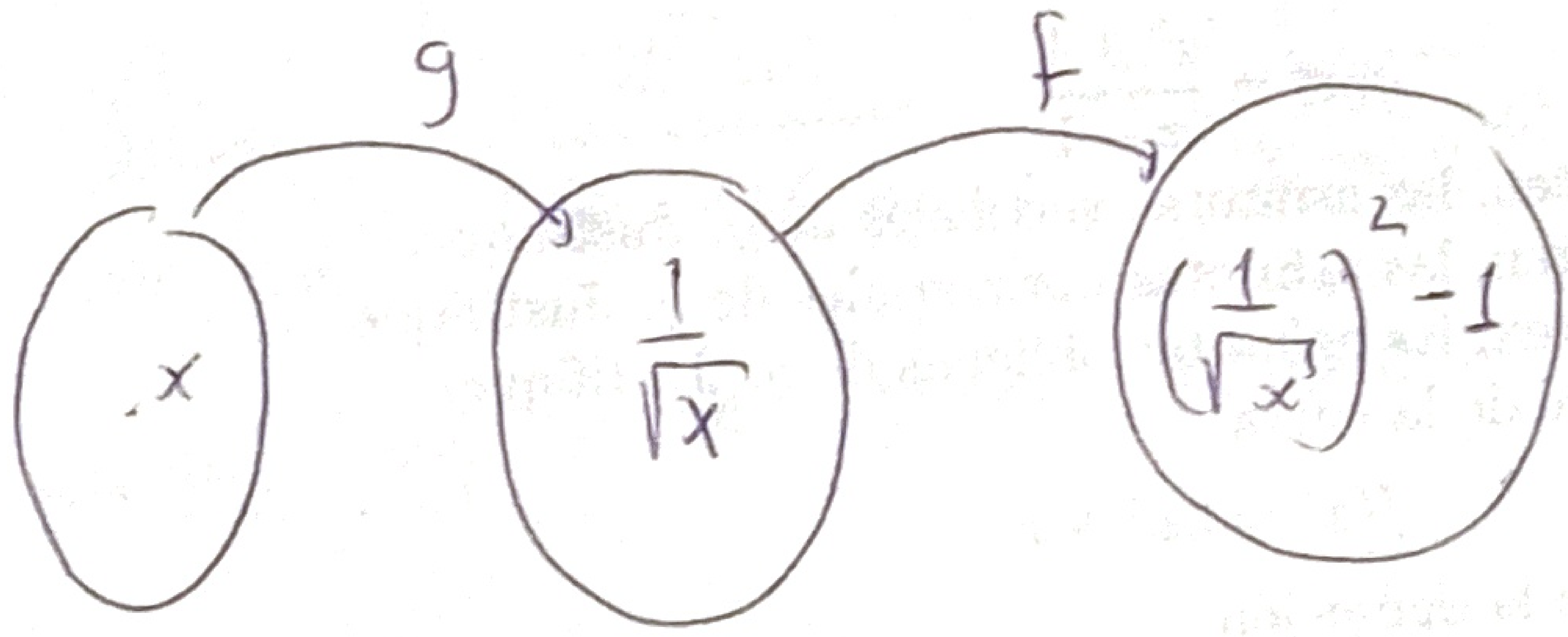
3) a) $D(f) = \mathbb{R}$

$D(g) = (0, \infty)$.

Luego,

$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = (0, \infty)$.

b)



g impone $x \in (0, \infty)$

f no impone restricción adicional a x.

Así, $D(f \circ g) = (0, \infty)$.

4) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(3(1+h)+1} - \sqrt{3.1+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{4+h} - 2)}{h} \frac{(\sqrt{4+h} + 2)}{\sqrt{4+h} + 2} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{4}.$$

5)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3\sqrt{x}\,(x-1)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3\sqrt{x}\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 3.$$

6) a)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-2)}$$

$$= 0$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)} = 0$$

Luego como $x=1$ no pertenece al dominio de g, tenemos que g presenta una disc. evitable en $x=1$.

Justificando en forma similar, se obtiene:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$$

Luego g tiene disc esencial en $x=2$.

b) Por el cálculo previo, $x=2$ es A.V. de g.