UNIDAD 1: Funciones de varias variables

1.2 Derivadas de orden superior y extremos

Recorrido

Recorrido

Definiciones y notación

Definición

Una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 o diferenciable con continuidad si existen las derivadas parciales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ y son continuas. Si estas derivadas, a su vez, tienen derivadas parciales continuas, diremos que f es de clase C^2 o dos veces diferenciable con continuidad.

Las derivadas parciales iteradas de f se anotan de distintas maneras:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) = f_{zyx}; \text{ etc.}$$

f_{xy} y f_{yx} se llaman derivadas parciales cruzadas o mixtas.

Ejemplo 3.1

EJEMPLO 3.1 Hallar las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$.

Ejemplo 3.1

EJEMPLO 3.1 Hallar las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$.

Solución

Las primeras parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x + 2y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x + 2y).$$

Ejemplo 3.1

EJEMPLO 3.1 Hallar las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$.

Solución

Las primeras parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x + 2y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x + 2y).$$

Ahora derivamos cada una de estas expresiones con respecto a x e y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 5.$$

Igualdad de las derivadas parciales mixtas

Teorema (Teorema 1: igualdad de las derivadas parciales cruzadas)

Si f es de clase C^2, entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales, es decir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Sin demostración.

Recorrido

Repaso: fórmula de Taylor para una variable

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_k(x_0, h),$$

$$R_k(x_0, h) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}h^{k+1}.$$

Fórmula de Taylor de primer orden para varias variables

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0$, sabemos que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Si llamamos $R_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})$, entonces

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}),$$

con

$$\frac{|R_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0, \text{ cuando } \mathbf{h}\to\mathbf{0}.$$

Fórmula de Taylor de primer orden para varias variables

Teorema (Fórmula de Taylor de primer orden)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in U$. *Entonces*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde

$$\frac{R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to 0, \ \textit{cuando } \mathbf{h} \to \mathbf{0} \textit{ en } \mathbb{R}^n.$$

Fórmula de Taylor de primer orden para varias variables

Teorema (Fórmula de Taylor de primer orden)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in U$. *Entonces*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde

$$\frac{R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to 0, \text{ cuando } \mathbf{h} \to \mathbf{0} \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

Forma del resto:

$$R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij}) h_i h_j,$$

donde $\mathbf{c}_{ij}$ es un punto del segmento que une $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Ejemplo: fórmula de Taylor de primer orden

Obtener la fórmula de Taylor de primer orden para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0, 0) = 0$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de primer orden

Obtener la fórmula de Taylor de primer orden para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0, 0) = 0$$
$$f_x(x, y) = \cos(x + 2y);\ f_x(0, 0) = 1$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de primer orden

Obtener la fórmula de Taylor de primer orden para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0, 0) = 0$$
$$f_x(x, y) = \cos(x + 2y);\ f_x(0, 0) = 1$$
$$f_y(x, y) = 2\cos(x + 2y);\ f_y(0, 0) = 2$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de primer orden

Obtener la fórmula de Taylor de primer orden para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0, 0) = 0$$

$$f_x(x, y) = \cos(x + 2y);\ f_x(0, 0) = 1$$

$$f_y(x, y) = 2\cos(x + 2y);\ f_y(0, 0) = 2$$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),\ \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de primer orden

Obtener la fórmula de Taylor de primer orden para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = \cos(x+2y);\ f_x(0,0) = 1$$

$$f_y(x,y) = 2\cos(x+2y);\ f_y(0,0) = 2$$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),\ \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

$$f((0,0) + \mathbf{h}) = 0 + \sum_{i=1}^{2} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de primer orden

Obtener la fórmula de Taylor de primer orden para $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = \cos(x+2y);\ f_x(0,0) = 1$$

$$f_y(x,y) = 2\cos(x+2y);\ f_y(0,0) = 2$$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),\ \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

$$f((0,0) + \mathbf{h}) = 0 + \sum_{i=1}^{2} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

$$f(\mathbf{h}) = 0 + h_1 f_x(\mathbf{x}_0) + h_2 f_y(\mathbf{x}_0) + \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij}) h_i h_j$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de primer orden

Obtener la fórmula de Taylor de primer orden para $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0,0) = 0$$
$$f_x(x,y) = \cos(x+2y);\ f_x(0,0) = 1$$
$$f_y(x,y) = 2\cos(x+2y);\ f_y(0,0) = 2$$
$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),\ \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{R_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$
$$f((0,0) + \mathbf{h}) = 0 + \sum_{i=1}^{2} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$
$$f(\mathbf{h}) = 0 + h_1 f_x(\mathbf{x}_0) + h_2 f_y(\mathbf{x}_0) + \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij}) h_i h_j$$
$$f(\mathbf{h}) = h_1 + 2h_2 + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}), \quad \text{con } \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \tfrac{R_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Fórmula de Taylor de segundo orden para varias variables

Teorema (Fórmula de Taylor de segundo orden)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^3. Entonces

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0, \text{ cuando } \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

Forma del resto:

$$R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}_{ijk}) h_i h_j h_k,$$

donde $\mathbf{c}_{ij}$ es un punto del segmento que une $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Fórmula de Taylor de segundo orden para varias variables

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}(h_1, \cdots, h_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$+ R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde las derivadas de f se evalúan en $\mathbf{x}_0$.

Ejemplo: fórmula de Taylor de segundo orden

Obtener la fórmula de Taylor de segundo orden para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0, 0) = 0$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de segundo orden

Obtener la fórmula de Taylor de segundo orden para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0, 0) = 0$$

$$f_x(x, y) = \cos(x + 2y);\ f_x(0, 0) = 1;\ f_y(x, y) = 2\cos(x + 2y);\ f_y(0, 0) = 2$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de segundo orden

Obtener la fórmula de Taylor de segundo orden para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = \cos(x+2y);\ f_x(0,0) = 1;\ f_y(x,y) = 2\cos(x+2y);\ f_y(0,0) = 2$$

$$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de segundo orden

Obtener la fórmula de Taylor de segundo orden para $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = \cos(x+2y);\ f_x(0,0) = 1;\ f_y(x,y) = 2\cos(x+2y);\ f_y(0,0) = 2$$

$$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$$

$$f(\mathbf{h}) = 0 + h_1 f_x(\mathbf{x}_0) + h_2 f_y(\mathbf{x}_0) + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de segundo orden

Obtener la fórmula de Taylor de segundo orden para $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = \cos(x+2y);\ f_x(0,0) = 1;\ f_y(x,y) = 2\cos(x+2y);\ f_y(0,0) = 2$$

$$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$$

$$f(\mathbf{h}) = 0 + h_1 f_x(\mathbf{x}_0) + h_2 f_y(\mathbf{x}_0) + \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

$$f(\mathbf{h}) = h_1 + 2h_2 + \textstyle\sum_{i,j,k=1}^{2} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}_{ijk}) h_i h_j h_k$$

Ejemplo: fórmula de Taylor de segundo orden

Obtener la fórmula de Taylor de segundo orden para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

$$f(\mathbf{x}_0) = f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = \cos(x+2y);\; f_x(0,0) = 1;\; f_y(x,y) = 2\cos(x+2y);\; f_y(0,0) = 2$$

$$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$$

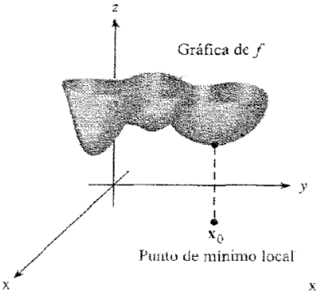
$$f(\mathbf{h}) = 0 + h_1 f_x(\mathbf{x}_0) + h_2 f_y(\mathbf{x}_0) + \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

$$f(\mathbf{h}) = h_1 + 2h_2 + \textstyle\sum_{i,j,k=1}^{2} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}_{ijk}) h_i h_j h_k$$

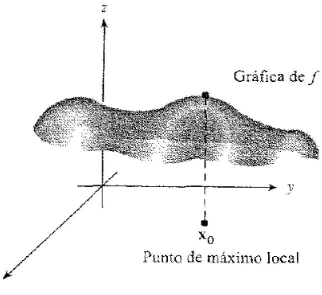
$$f(\mathbf{h}) = h_1 + 2h_2 + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$$

Recorrido

DEFINICIÓN Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar dada, se dice que un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un **punto de mínimo local** de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que para todos los puntos $\mathbf{x}$ de V, $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}_0)$ (*véase* la Figura 3.3.2). Análogamente, $\mathbf{x}_0 \in U$ es un **punto de máximo local** si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$. El punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un ***punto de extremo local*** o ***relativo*** si es punto de mínimo local o de máximo local. Un punto $\mathbf{x}_0$ es un ***punto crítico*** de f si, o bien *f no es diferenciable* en $\mathbf{x}_0$, o bien $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Si un punto crítico no es punto de extremo local, se dice que es un **punto de silla**[6].



Punto de mínimo local



Punto de máximo local

TEOREMA 4: Condición de la derivada primera para puntos de extremo local Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, la función $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de extremo local, entonces $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico de f.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que f alcanza un máximo local en $\mathbf{x}_0$. Entonces para cualquier $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ la función $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ tiene un máximo local en $t = 0$. Por consiguiente, el cálculo de una variable nos dice que $g'(0) = 0$[7]. Por otra parte, por la regla de la cadena,

$$g'(0) = [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}.$$

Así pues, $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} = 0$ para todo $\mathbf{h}$, de modo que $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. El caso en que f alcanza un mínimo local en $\mathbf{x}_0$ es completamente análogo.

Ejemplos 3.13 y 3.14

EJEMPLO 3.13 Hallar todos los puntos críticos de $z = x^2y + y^2x$.

Ejemplos 3.13 y 3.14

EJEMPLO 3.13 Hallar todos los puntos críticos de $z = x^2y + y^2x$.

EJEMPLO 3.14 Obsérvese la Figura 3.3.4, una gráfica dibujada con computador de la función $z = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$. ¿Dónde están los puntos críticos?

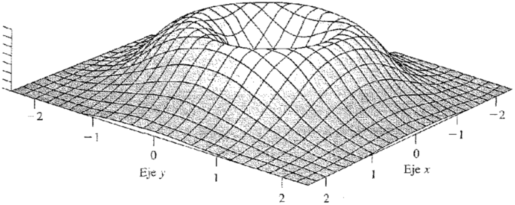


Figura 3.3.4. El volcán: $z = 2(x^2 + y^2)\exp(-x^2 - y^2)$.

Definición Hessiana

DEFINICIÓN Supongamos que $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene derivadas de segundo orden continuas $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}_0)$, para $i, j = 1, \ldots, n$, en el punto $\mathbf{x}_0 \in U$. La ***hessiana de f en $\mathbf{x}_0$*** es la forma cuadrática definida por:

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j = \frac{1}{2}(h_1, \ldots, h_n) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Nótese que, por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas, la matriz de las derivadas segundas es simétrica.

Esta función se usa, por lo común, en puntos críticos $\mathbf{x}_0 \in U$. En este caso, $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, de manera que la fórmula de Taylor (*véase* el Teorema 3, Sección 3.2) se puede escribir de la forma

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$

Así, *en un punto crítico la hessiana es igual al primer término no constante de la serie de Taylor de f.*

Una forma cuadrática $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice ***definida positiva*** si $g(\mathbf{h}) \geqslant 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ sólo para $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. De manera análoga, g es ***definida negativa*** si $g(\mathbf{h}) \leqslant 0$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ sólo para $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Obsérvese que si $n = 1$, $Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$, que es definida positiva si y sólo si $f''(x_0) > 0$.

Teorema 4

TEOREMA 5: Criterio de la derivada segunda para extremos locales Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^3, $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico de f, y la forma cuadrática hessiana $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto de mínimo relativo de f. Análogamente, si $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida negativa, entonces, $\mathbf{x}_0$ es un punto de máximo relativo.

Teorema 4

TEOREMA 5: Criterio de la derivada segunda para extremos locales Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^3, $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico de f, y la forma cuadrática hessiana $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto de mínimo relativo de f. Análogamente, si $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida negativa, entonces, $\mathbf{x}_0$ es un punto de máximo relativo.

LEMA 2 Sea

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2]B\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces $H(\mathbf{h})$ es definida positiva si y sólo si $a > 0$ y $\det B = ac - b^2 > 0$.

Criterio del determinante para decidir si una forma cuadrática es definida positiva

Hay criterios similares para una matriz $n \times n$ simétrica B. Consideramos las n submatrices cuadradas a lo largo de la diagonal (*véase* la Figura 3.3.5). B es definida positiva (esto es, la forma cuadrática asociada con B es definida positiva) si y sólo si los determinantes de estas submatrices diagonales son todos mayores que cero. Para B definida negativa, los signos deben ser

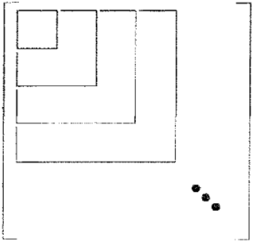


Figura 3.3.5. En el criterio para decidir si una forma cuadrática es definida positiva se usan submatrices «diagonales»; todas deben tener determinante >0.

alternativamente <0 y >0. No demostraremos aquí el caso general[9]. Si los determinantes de las submatrices diagonales son todos distintos de cero, pero la matriz no es definida positiva ni negativa, el punto crítico es de ***tipo silla***; en este caso se puede demostrar, como en el Ejemplo 3.12, que el punto no es ni de máximo ni de mínimo.

Criterio derivada segunda

TEOREMA 6: Criterio de la segunda derivada para los puntos de máximo y mínimo de funciones de dos variables Sea $f(x, y)$ de clase C^3 en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Un punto (x_0, y_0) es un punto de mínimo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

ii) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0.$$

iii) $$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ en } (x_0, y_0).$$

(D se conoce como ***discriminante*** de la forma cuadrática hessiana). Si en ii) tenemos < 0 en lugar de > 0 sin cambiar la condición iii), entonces tenemos un punto de máximo local (estricto).