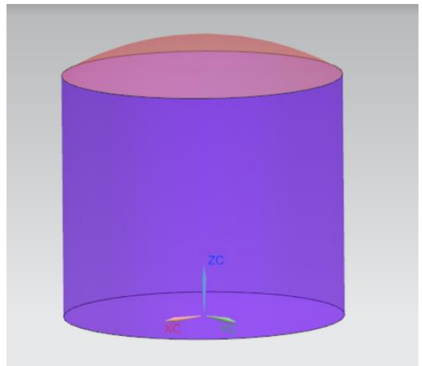
FACULTAD DE INGENIERÍA

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

Análisis Matemático II

TP3: Ejercicio 54

Representamos la región acotada por el plano z = 0, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y cerrada por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (esfera de radio igual a 2).



Calculemos ahora el valor de z en el cual se intersectan las dos superficies.

El cilindro de radio 1 en coordenadas cilíndricas se puede escribir como:

$$r^2 = 1 \qquad (1)$$

La esfera de radio 2 en coordenadas cilíndricas se puede escribir como:

$$r^2 + z^2 = 4 \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) obtenemos el valor z de intersección:

$$z = \pm\sqrt{3}$$

Descartamos la raíz negativa porque el ejercicio especifica que el sólido tiene su base en z=0.

Ahora que ya tenemos todos los datos de la región de integración (radio del cilindro, altura de intersección, forma funcional del "techo", y un ángulo de "barrido" de 2π) podemos plantear la integral en coordenadas cilíndricas con el orden de integración indicado en el ítem a):

$$\text{V}= \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \int_0^{+\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

b) Para integrar con el orden de integración dr dz dθ debemos tener en cuenta lo siguiente: desde $z = 0$ hasta $z = +\sqrt{3}$, la variable r entra en r=0 y sale en r=1, mientras que desde $z = +\sqrt{3}$ hasta $z = 2$, la variable r va desde r=0 hasta $r = +\sqrt{4 - z^2}$.

Esto significa que para plantear la integral con éste orden de integración, tendremos que dividirla en dos integrales.

Para entender esto mejor gráficamente es que se pintaron las dos porciones del sólido con colores distintos.

El planteo resulta:

$$V=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{+\sqrt{3}}\int_{0}^{1} r.dr.dz.d\theta+\int_{0}^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{0}^{+\sqrt{4-z^2}} r.dr.dz.d\theta$$

Recordemos que cambiar el orden de integración no altera el resultado de la integral.