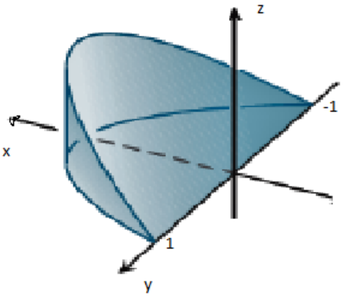
1. Ejercicio 56, TP 3

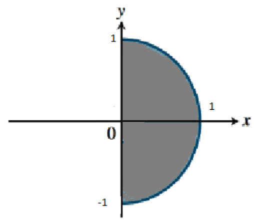
Convierta la integral $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}(x^2+y^2)dzdxdy$ en una integral equivalente en coordenadas cilíndricas y evalúe el resultado.

Determinamos primero los rangos de variación de cada una de las variables: $0 \le z \le x$, $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$ y $-1 \le y \le 1$.

Esto quiere decir que z varía entre el plano $z = 0$ y plano $z = x$ mientras que x e y varían dentro de un semidisco centrado en el origen de radio 1 con $0 \le x$ (ver la figura).



Para describir la región en coordenadas cilíndricas tomamos: $x = r\,cos\theta$, $y = r\,sen\theta$, $z = z$. Vemos que: $0 \le z \le r\,cos\theta$ (esto es equivalente a $0 \le z \le x$), $0 \le r \le 1$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, la región de variación de r y θ se ve en la siguiente figura:



y recordando que $f(x,y,z) = x^2+y^2$, al reemplazar tenemos $f(r\,cos\theta, r\,sen\theta, z) = (r\,cos\theta)^2 + (r\,sen\theta)^2 = r^2$. Luego:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}(x^2+y^2)dzdxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{r\,cos\theta} r^2 dzrdrd\theta = 4/5$$