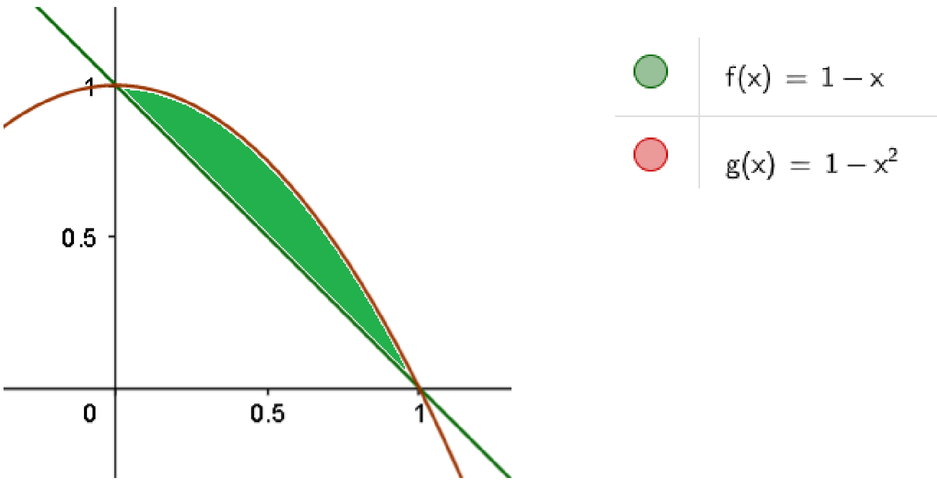
Análisis Matemático II

TP3: Ejercicio 9

a) $$\int_{0}^{1}\int_{1-x}^{1-x^2} dydx$$

Graficamos la región de integración, que resulta el área comprendida entre las funciones **f(x)=1-x** y **g(x)=1-x²**



Vemos que los puntos de intersección son P_1 (1; 0) y P_2 (0; 1).

Para invertir el orden de integración, debemos mirar primero la región de integración de izquierda a derecha. Tratamos a **y** como variable independiente y a **x** como variable dependiente, es decir, expresamos las inversas de las funciones f y g:

$$entrada: x = 1 - y$$

$$salida: x = +\sqrt{1-y}$$

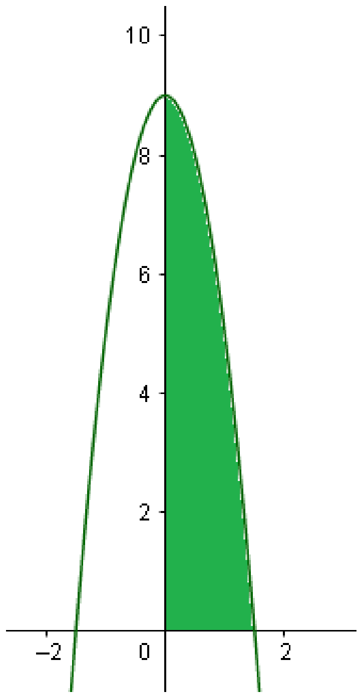
Una vez "barrida" la dirección x, vemos que la variable **y** está comprendida entre 0 y 1. Escribimos la integral equivalente:

$$\int_{0}^{1}\int_{1-y}^{+\sqrt{1-y^2}} dxdy$$

Vale aclarar que invertir el orden de integración de una integral múltiple NO altera el resultado, pero sí puede resultar útil a la hora de resolver un ejercicio: puede resultar más fácil la integral considerando un orden de integración adecuado.

b) $$\int_0^{3/2}\int_0^{9-4x^2} 16x\,dy\,dx$$

Dada la integral anterior, vemos que primero aparece **dy**, es decir, debemos mirar "de abajo hacia arriba". Entramos por ***y=0*** y salimos por ***y=9-4x²***. Luego en dirección x, barremos de 0 a 3/2.



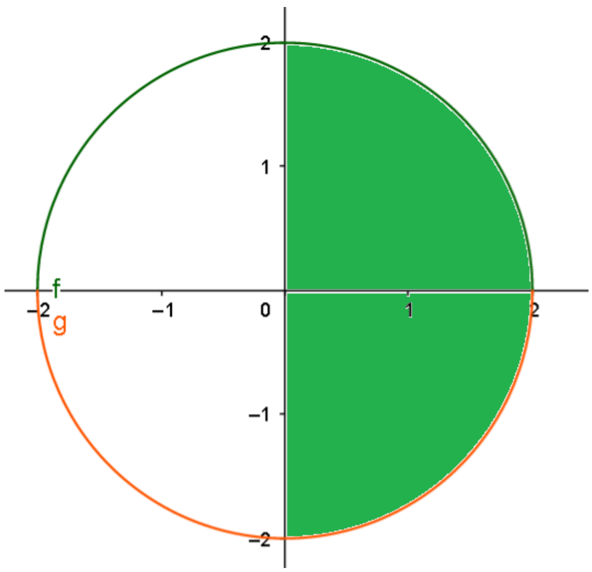
Si invertimos el orden de integración, entramos por x=0 y salimos por la inversa de la parábola, es decir, $x=1/2*(9-y)^{1/2}$. Luego, la variable y va desde 0 a 9. Expresamos la integral con el orden invertido:

$$\int_0^{9}\int_0^{\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{y}{4}}} 16x\,dx\,dy$$

Notar que el argumento de la integral (en este caso 16x) NO varía al invertir el orden de integración.

c) $$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6xdydx$$

Entramos desde abajo por y= $-(4-x^2)^{1/2}$ y salimos por y= $+(4-x^2)^{1/2}$. Luego x varía de 0 a 2, resultando la región de integración de la siguiente figura:



Si invertimos el orden de integración, entramos por x=0 y salimos por $x=+(4-y^2)^{1/2}$. En tanto que y varía entre -2 y 2. Expresamos la integral:

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} 6xdxdy$$