Análisis Matemático II

TP4a: Ejercicio 2

2. Calcule:

   a) $\int_C (x+y)ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (t, 1-t, 0)$, $0 \le t \le 1$.

Es una integral de línea de campo escalar. Debemos expresar el argumento de la integral y el diferencial de arco en función del parámetro t.

Sabemos que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

También lo podemos escribir como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Tenemos la parametrización de la curva, así que podemos calcular las componentes de la velocidad:

$$\vec{r}'(t) = (1, -1, 0)$$

Reemplazando las componentes de la velocidad en la expresión del diferencial de arco, resulta:

$$ds = \sqrt{2}dt$$

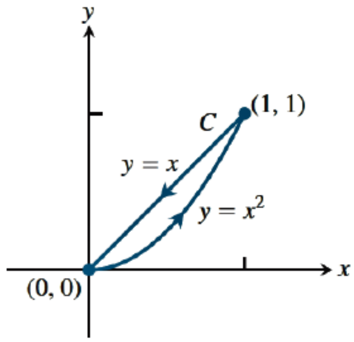
Expresamos el argumento de la integral en función de t, reemplazando las componentes del vector posición de la curva:

$$x + y = t + 1 - t$$

La integral de línea en función de t resulta:

$$\int_0^1 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}$$

$f)\ \int_C (x + \sqrt{y})ds$, donde C está dada en la figura.



Tenemos una curva cerrada, suave por partes. Tenemos que parametrizar los dos tramos y sumar las integrales de cada tramo.

Parametrizamos el segmento de parábola tomando a x como parámetro:

$$\vec{r}_1(t) = (t, t^2)$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Calculamos las componentes del vector velocidad de la curva, el diferencial de longitud de arco, y expresamos la integral en función del parámetro t:

$$\vec{r}_1{}'(t) = (1,2t)$$

$$ds = \sqrt{1+4t^2}dt$$

$$x + \sqrt{y} = t + \sqrt{t^2} = 2t$$

$$\int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$

Ahora calculemos la integral sobre el tramo recto de la curva. Debemos parametrizar la recta y = x desde el punto (1,1) hasta el punto (0,0). Recordemos que el parámetro debe variar en forma creciente. Tomando a x como parámetro, proponemos la siguiente parametrización:

$$\vec{r}_2(t) = (1-t, 1-t)$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Verificamos que la parametrización propuesta cumpla con la posición de los puntos y el sentido.

Repetimos el procedimiento para calcular la integral de línea:

$$\vec{r}_2{}'(t) = (-1, -1)$$

$$ds = \sqrt{2}dt$$

$$x + \sqrt{y} = 1 - t + \sqrt{1-t}$$

$$\int_0^1 \left(1 - t + \sqrt{1-t}\right)\sqrt{2}dt = \frac{7}{3\sqrt{2}}$$

El resultado final se obtiene sumando las integrales sobre ambos tramos de la curva cerrada:

$$\int_C \left(x + \sqrt{y}\right) ds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + \frac{7}{3\sqrt{2}}$$

k) el área de uno de los lados de la "pared" que es ortogonal a la curva $2x + 3y = 6$, $0 \le x \le 6$, y está sobre la curva y bajo la superficie $f(x, y) = 4 + 3x + 2y$.

Debemos calcular una integral de línea de campo escalar de la forma

$$\int_C f(x,y)ds$$

Parametrizamos la curva tomando a x como parámetro t entre 0 y 6:

$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

$$\vec{r}(t) = (t, 2 - \frac{2}{3}t)$$

Calculamos el diferencial de arco, y expresamos la integral en función del parámetro t:

$$\vec{r}'(t) = \left(1, -\frac{2}{3}\right)$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{4}{9}}dt = \frac{\sqrt{13}}{3}dt$$

$$f\left(x(t), y(t)\right) = 4 + 3t + 2\left(2 - \frac{2}{3}t\right) = 8 + \frac{5}{3}t$$

$$\int_0^6 \left(8 + \frac{5}{3}t\right)\frac{\sqrt{13}}{3}dt = 26\sqrt{13}$$